# Análise Matemática II E

**Época normal**
**10 de Janeiro de 2011**

1. (i) Considere a equação diferencial $y' = \dfrac{x^2}{y(1+x^3)}$.

   (a) Verifique se a equação tem soluções de equilíbrio (ou seja, soluções constantes). [0,5]

   (b) Determine a solução $y(x)$ da equação que verifica a condição inicial $y(0) = -2$. [1,5]

   (c) Obtenha um valor aproximado da solução referida na alínea b) no ponto $x = 0,2$, utilizando o método de Euler com passo $h = 0,1$. [1]
   NOTA: Não é necessário completar o cálculo que permite obter a aproximação pedida, basta indicá-lo.

   (ii) Resolva o problema de valores iniciais

$$\begin{cases} x\,y' + 2y = \sin x \\ \\ y(\pi) = 0 \end{cases}$$

[1,5]

2. Considere a função $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{xy - 2x - y} & \text{se} \quad y \neq \dfrac{2x}{x-1} \\ \\ 0 & \text{se} \quad y = \dfrac{2x}{x-1} \end{cases}$

   (a) Verifique que $f$ não é contínua em nenhum ponto $(x,y)$ tal que $y = \dfrac{2x}{x-1}$. [1]

   (b) Calcule $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)$. [0,5]

   (c) Estude a diferenciabilidade de $f$ em $(0,0)$. [0,5]

3. Seja $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função diferenciável, e $g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ a função definida por $g(u,v) = f(x,y)$, com $x = uv$, $y = \dfrac{1}{2}(u^2 - v^2)$.

   (a) Calcule $\dfrac{\partial g}{\partial u}(2,-1)$ e $\dfrac{\partial g}{\partial v}(2,-1)$ em função das derivadas de $f$ num ponto apropriado. [1]

   (b) Sabendo que $\|\nabla f(x,y)\|^2 = 2 \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$, determine o valor das constantes $a, b$ de tal modo que

$$a\left(\frac{\partial g}{\partial u}\right)^2 + b\left(\frac{\partial g}{\partial v}\right)^2 = u^2 + v^2 \qquad \forall (u,v) \in \mathbb{R}^2$$

[1]

4. Considere as superfícies $S_1$ e $S_2$ definidas respectivamente por $x^2+y^2+2z^2=4$ e $z=e^{x-y}$.

   (a) Identifique a superfície $S_1$, e verifique, justificando, se se trata de uma superfície de revolução. [0,5]

   (b) Determine o declive da superfície $S_2$ no ponto $(1,1)$ na direcção do vector $\mathbf{u}=(\sqrt{3},-1)$, e a direcção de máximo decrescimento de $z$ no ponto $(1,1)$. [1]

   (c) Determine as equações paramétricas da recta tangente à curva de intersecção das duas superfícies no ponto $(1,1,1)$. [1]

5. (a) Estude quanto a máximos relativos, mínimos relativos e pontos sela a função $f(x,y)=3x-x^3-2y^2+y^4$. [1,5]

   (b) Determine o máximo e o mínimo da função $f(x,y,z)=x-2y+2z$ sobre a esfera $x^2+y^2+z^2=1$. [1,5]

6. Calcule $\displaystyle\int\int_D e^{x+y}\,dA$, em que $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : |x|+|y|\leq 1\}$. [2]

7. Formule em coordenadas polares e calcule o integral $\displaystyle\int\int_D x\,dA$, em que $D$ é o círculo de centro no ponto $\left(\frac{1}{2},0\right)$ e raio $\frac{1}{2}$. [2]

8. Calcule o volume do sólido limitado pelas superfícies $z=0$, $z=\sqrt{x^2+y^2}$ e $x^2+y^2=2x$. [2]