Análise Matemática II E

Época normal
20 de Junho de 2011

1. (i) Considere a equação diferencial $y' = \dfrac{4y}{x(y-3)}$.

   (a) Verifique se a equação tem soluções de equilíbrio (ou seja, soluções constantes). [0,5]

   (b) Determine a solução $y(x)$ que verifica a condição inicial $y(1) = -1$. [1,5]

   (c) Obtenha um valor aproximado da solução $y(x)$ referida na alínea (b) no ponto $x = 1,2$, utilizando o método de Euler com passo $h = 0,2$. [1]

   (ii) Resolva o problema de valores iniciais

$$\begin{cases} (x-2)y' = y + 2(x-2)^3 \\ \\ y(1) = -1 \end{cases}$$

[1,5]

2. Considere a função $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $f(x,y) = \begin{cases} (x^2+y^2)\sin\left(\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) & \text{se} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ \\ 0 & \text{se} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$

   (a) Estude a continuidade de f em $\mathbb{R}^2$. [1]

   (b) Calcule $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)$. [0,5]

   (c) Estude a diferenciabilidade de f em $(0,0)$. [1]

3. Considere a curva no plano definida por $\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + (1+t^2)\mathbf{j}$.

   (a) Determine os pontos da curva em que o vector posição $\mathbf{r}(t)$ e o vector tangente $\mathbf{r}'(t)$ (i) são perpendiculares; (ii) têm a mesma direcção e sentido; (iii) têm a mesma direcção e sentidos contrários. [1]

   (b) Esboce a curva $\mathbf{r}(t)$. [1]

   (c) Identifique a superfície obtida por rotação da curva $\mathbf{r}(t)$ em torno do eixo y, e escreva a sua equação em coordenadas esféricas.
   (Se não conseguir identificar a superfície, escreva a definição das coordenadas esféricas). [1]

(v.s.f.f.)

4. Seja f uma função diferenciável. Considere a função $z(x,y)$ definida em $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \neq 0\}$ por $z = f\left(\dfrac{y}{x}\right)$. Verifique que $\quad x\dfrac{\partial z}{\partial x} + y\dfrac{\partial z}{\partial y} = 0 \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \neq 0.$ [1,5]

5. A temperatura de uma placa é dada por $T(x,y) = e^x \cos y + e^y \cos x$.

   (a) Em que direcção aumenta mais rapidamente a temperatura a partir do ponto $(0,0)$? Indique a taxa de aumento nessa direcção. [1]

   (b) Verifique se a partir do ponto $(0,0)$ a temperatura aumenta ou diminui na direcção $-3\mathbf{i} + \mathbf{j}$. [1]

6. (a) Estude quanto a máximos relativos, mínimos relativos e pontos sela a função $f(x,y) = 2x^2 + y^2 - xy - 7y$. [1]

   (b) Determine os pontos da curva $x^2 - y^2 = 1$ mais próximos do ponto $(0,2)$. [1]

7. (a) Inverta a ordem de integração e calcule o integral $\displaystyle\int_0^1 \int_x^1 e^{y^2}\, dy\, dx$. [1,5]

   (b) Converta em coordenadas polares o integral $\displaystyle\int\int_D \frac{1}{1+x^2+y^2}\, dx\, dy$, em que D é o triângulo de vértices $(0,0), (1,0), (1,1)$. [1,5]

8. Escreva o integral duplo que dá a área da elipse de semi-eixos a e b, $(a, b > 0)$, e calcule-o, utilizando a mudança de variáveis $x = ar\cos\theta$, $y = br\sin\theta$. [1,5]