FACULDADE DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
UNIVERSIDADE NOVA DE LISBOA
Departamento de Matemática

Análise Matemática II E

Época de recurso
30 de Janeiro de 2012

1. (i) Considere a equação diferencial $yy' - x^2 e^{y^2} = 0$.

   (a) Verifique se a equação tem soluções constantes. [0,5]

   (b) Determine a solução $y(x)$ da equação que verifica a condição inicial $y(0) = 1$. [2]

   (c) Obtenha um valor aproximado da solução referida na alínea b) no ponto $x = 0,2$, utilizando o método de Euler com passo $h = 0,1$.
   Nota: *Considere o valor aproximado* $e \approx 2,718$. [0,5]

   (ii) Resolva o problema de valores iniciais

$$\begin{cases} xy' - 2y = -3x \\ y(-1) = -2 \end{cases}$$

[2]

2. Considere a curva no plano definida por $\mathbf{r}(t) = (2 + 3t)\,\mathbf{i} + (t^2 + 4)\,\mathbf{j}$.

   (a) Determine a recta tangente à curva no ponto $(-1, 5)$. [1]

   (b) Considere a função $d(t)$ definida em $\mathbb{R}$ que, para cada $t \in \mathbb{R}$, representa a distância à origem do ponto $\mathbf{r}(t)$ da curva. Calcule $d'(1)$, e indique se nesse ponto, e no sentido em que t aumenta, a curva se vai aproximar ou afastar da origem. [1]

3. Considere a função $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2} & \text{se} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$

   (a) Estude a continuidade de f em $\mathbb{R}^2$. [1]

   (b) Calcule, caso existam, $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)$. [0,5]

   (c) Estude a diferenciabilidade de f em $(0,0)$. [1]

4. Considere a superfície $x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 4yz + 8xz = 20$.

   (a) Determine o plano tangente à superfície no ponto $(-2, 4, -4)$. [1]

   (b) Indique a direcção em que o declive da superfície no mesmo ponto é máximo. [0,5]

   (c) Calcule o declive da superfície no mesmo ponto segundo a direcção do vector $\mathbf{u} = 3\mathbf{i}$ - $\mathbf{j}$ [1]

5. (a) Estude a função $f(x, y) = xy(2x+4y+1)$ quanto a máximos relativos, mínimos relativos e pontos sela. [1]

   (b) Determine o ponto do plano $2x - y + 2z = 16$ mais próximo da origem. [1]

6. Inverta a ordem de integração e calcule o integral $\displaystyle\int_0^1 \int_x^1 e^{y^2}\, dy\, dx.$ [2]

7. Calcule $\displaystyle\int\int_D (x^2 - y^2)\, dx\, dy$, em que $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1 \wedge -x \leq y \leq x\}$.

   Sugestão: Converta o integral para coordenadas polares. [2]

8. Calcule o volume do sólido no 1º octante limitado pelos planos $x + y + z = 1$ e $x + y + 2z = 1$. [2]