# Análise Matemática II E

**Época normal**
**26 de Junho de 2012**

1. Considere a equação diferencial $x^3 \sin(y)\, y' = 2$.

   (a) Verifique se a equação tem soluções constantes, e em caso afirmativo calcule-as. [0,5]

   (b) Calcule a solução que verifica a condição inicial $y(1) = \dfrac{\pi}{3}$. [2]

2. Considere a equação diferencial $y' = 2y - 2x^2 - 3$.

   (a) Verifique que a função $y_p(x) = x^2 + x + 2$ é solução da equação. [0,5]

   (b) Determine a solução que verifica a condição inicial $y(0) = 1$. [1,5]

   (c) Obtenha um valor aproximado da solução referida na alínea b) no ponto $x = 0,2$, utilizando o método de Euler com passo $h = 0,1$. [1]

3. Determine a recta tangente e o plano normal à curva definida por $\mathbf{r}(t) = (t-2)\,\mathbf{i} + (3t^2+1)\,\mathbf{j} + 2t^3\,\mathbf{k}$ no ponto de intersecção da curva com o plano $yz$. [2]

4. Considere a função $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{|x|+|y|} & \text{se} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$

   (a) Estude a continuidade de $f$ em $\mathbb{R}^2$. [1]

   (b) Calcule, caso existam, $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)$. [0,5]

   (c) Calcule a aproximação linear de $f$ a partir de $f(2,-2)$, obtida utilizando a diferenciabilidade, e utilize-a para calcular um valor aproximado de $f(2,01;-2,02)$. [1,5]

5. Seja $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função de classe $C^2$, e $z$ a função definida em $\mathbb{R}^2$ por $z(x,y) = f(x-y,\, y-x)$.

   (a) Verifique que $\dfrac{\partial z}{\partial x} + \dfrac{\partial z}{\partial y} = 0 \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$. [1,5]

   (b) Exprima $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$ em função das derivadas parciais de 2ª ordem da função $f$. [1]

6. Considere a função $f(x,y) = x^2 - x + y^2 + y + xe^y - ye^x$.

   (a) Verifique que $(0,0)$ é ponto de estacionaridade. [0,5]

   (b) Estude o ponto $(0,0)$ quanto a ser ponto de máximo relativo, mínimo relativo ou ponto sela. [1]

   (c) Determine, utilizando o método dos multiplicadores de Lagrange, três números naturais $x, y, z$ com soma igual a 20 tais que $xyz^2$ tenha o valor máximo. [1,5]

*(v.s.f.f.)*

7. Converta em coordenadas polares e calcule o integral $\displaystyle\int\int_D \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\, dA_{xy}$ , em que $D$ é o semicírculo de centro em $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$ e raio $\frac{1}{2}$ situado no $1^{\text{o}}$ quadrante. [2]

8. Calcule $\displaystyle\int\int\int_D \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\, dV_{xyz}$ , em que $D$ é o sólido no $1^{\text{o}}$ octante, limitado pelas superfícies $z=\sqrt{x^2+y^2}$, $z=\sqrt{3x^2+3y^2}$ e $x^2+y^2+z^2=6$ . [2]

*(Sugestão: Utilize coordenadas esféricas)*