Análise Matemática II E

Exame final
21 de Janeiro de 2013

1. Resolva os seguintes problemas de valores iniciais:

   (a) $(x^2+1)y' = e^{-y}, \qquad y(1) = -1$ [1,5]

   (b) $y' + y = xe^x, \qquad y(1) = 2$ [1,5]

   (c) Relativamente ao problema de valores iniciais da alínea b), obtenha um valor aproximado de $y(1,2)$, utilizando o método de Euler com passo $h = 0,2$.
   (Considere o valor $2,7$ como aproximação de e) [1]

2. Considere a função $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{1-\cos(x^2+y^2)}{4x^2y^2} & \text{se} \quad x \neq 0 \wedge y \neq 0 \\ 1 & \text{se} \quad x = 0 \vee y = 0 \end{cases}$$

   (a) Calcule os limites direccionais de f segundo as rectas $y = x$, $y = -x$, $y = 0$ e $x = 0$, e faça o estudo completo da continuidade de f em $\mathbb{R}^2$. [1]

   (b) Calcule (caso existam) $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)$. [0,5]

   (c) Estude a diferenciabilidade de f em $(0,0)$. [0,5]

3. Considere a função $f(x,y) = \dfrac{xy}{x^2-y^2}$.

   (a) Calcule a aproximação linear de f (obtida a partir da diferenciabilidade) no ponto $(2,1)$. [0,5]

   (b) Utilizando a aproximação linear referida na alínea (a), calcule um valor aproximado de $f(2,01;1,03)$. [0,5]

4. Seja f uma função diferenciável em $\mathbb{R}$, e $u : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $u(x,y) = \sin x - f(\sin y - \sin x)$.

   (a) Prove que $\dfrac{\partial f}{\partial x}\cos y + \dfrac{\partial f}{\partial y}\cos x = \cos x \cos y$ (independentemente da função f) . [1]

   (b) Supondo que $f'(1) = 0$, calcule $\nabla u(0, \pi/2)$. [1]

5. Considere a superfície $e^z - xyz = 0$ e o ponto P_0 sobre a superfície.

   (a) Determine o plano tangente e a recta normal em P_0 . [1]

   (b) Determine o declive da superfície em P_0 na direcção $(1, -1/2)$. [1]

   (c) Determine as direcções segundo as quais o declive em P_0 é nulo e máximo, respectivamente. [0,5]

   (d) Identifique (através de um esboço, se preferir) as intersecções da superfície com os planos horizontais (distinguindo os casos de cota positiva, negativa e nula). [0,5]

(v.s.f.f.)

6. (a) Determine os pontos de estacionaridade da função $f(x,y) = (x^2+y^2)^2 - 2(x^2+y^2)$ e para os que seja possível determine se são pontos de máximo local, mínimo local ou pontos sela. [1]

   (b) Determine o ponto de máximo (absoluto) da função $f(x,y,z) = \log x + \log y + 3\log z$ na porção da esfera $x^2+y^2+z^2 = 5$ situada no 1º octante (ou seja, $x > 0\,,\ y > 0\,,\ z > 0$). [1]

7. Inverta a ordem de integração e calcule o integral $\displaystyle\int_0^4 \int_{-\sqrt{4-y}}^{\frac{y-4}{2}} x\,dxdy$ [2]

8. Seja T o triângulo de vértices $(0,0)$, $(2,0)$ e $(0,2)$ no plano uv, e S a sua imagem no plano xy, em que $x = u+v\,,\ y = v-u^2$.

   (a) Faça um esboço da região S no plano xy. [0,5]

   (b) Calcule a área de S utilizando um integral duplo sobre o domínio T do plano uv. [1,5]

9. Calcule o volume do sólido situado acima do plano $z = 0$, limitado superiormente pela superfície $x^2+y^2+z^2 = a^2$ $(a > 0)$ e inferiormente pela superfície $z = 3(x^2+y^2)$. [2]