# Análise Matemática II E (2008/2009)

## 1º Teste 9 de Maio de 2009

## Tópicos de resolução

1. $y' = 2x\sqrt{1-4y^2}$

a) As soluções constantes são os valores de $y$ que anulam o factor $\sqrt{1-4y^2}$:

$$\sqrt{1-4y^2} = 0 \Leftrightarrow 1-4y^2 = 0 \Leftrightarrow y^2 = \frac{1}{4} \Leftrightarrow y = \pm\frac{1}{2}$$

A equação tem duas soluções constantes: $y(x) = -\frac{1}{2}$ e $y(x) = \frac{1}{2}$.

b) Para calcular as soluções não constantes:

$$\frac{y'}{\sqrt{1-4y^2}} = 2x$$

$$\frac{1}{2}\,\mathrm{arc\,sen}(2y) = x^2 + C$$

$$\mathrm{arc\,sen}(2y) = 2x^2 + C$$

$$2y = \mathrm{sen}\,(2x^2 + C)$$

$$y(x) = \frac{1}{2}\,\mathrm{sen}\left(2x^2 + C\right)$$

2. $\begin{cases} y' - 2ty = e^{t^2} \\ y(0) = 1 \end{cases}$

a) Cálculo de $y_H(t)$ (solução da equação homogénea $y' - 2ty = 0$):

$$y' = 2ty \qquad \frac{y'}{y} = 2t \qquad \log y = t^2 + C$$

$$y_H(t) = C e^{t^2}$$

$$y(t) = C(t) e^{t^2}$$

$$y'(t) = C'(t) e^{t^2} + 2t\, C(t) e^{t^2}$$

$$C'(t) e^{t^2} + 2t\, C(t) e^{t^2} - 2t\, C(t) e^{t^2} = e^{t^2}$$

$$C'(t) e^{t^2} = e^{t^2}$$

$$C'(t) = 1$$

$$C(t) = t + C$$

Assim, $y(t) = C e^{t^2} + t e^{t^2}$

Cálculo de $C$: $y(0) = 1 \iff C = 1$

A solução do problema de valores iniciais é $y(t) = (t+1) e^{t^2}$

b) Método de Euler: $y_{i+1} = y_i + h\, f(t_i, y_i)$

$h = 0.1$ ; $f(t,y) = 2ty + e^{t^2}$ ; a aproximação de $y(0.2)$ é $y_2$, pelo que é necessário fazer os cálculos de $y_{i+1}$ para $i=0$ e $i=1$:

$$y_1 = y_0 + h\, f(t_0, y_0) =$$

$$= 1 + 0,1 \times \left(2 \times 0 \times 1 + e^{0}\right) = 1 + 0,1 \times 1 = 1,1$$

$$y_2 = y_1 + h\, f(t_1, y_1) = 1,1 + 0.1 \times \left(2 \times 0.1 \times 1,1 + e^{0,01}\right) =$$

$$= 1,1 + 0,1 \times \left(0,22 + 1,01\right) =$$

$$= 1,1 + 0,1 \times 1,23 =$$

$$= 1,1 + 0,123 = 1,223$$

$$y(0,2) \approx y_2 = 1,223$$

3. $x^2 - \frac{y^2}{2} - \frac{z^2}{2} = 1$

a) Intersecção com o plano $xy$ $(z=0)$:

$x^2 - \frac{y^2}{2} = 1$ : hipérbole

Intersecção com o plano $xz$ $(y=0)$:

$x^2 - \frac{z^2}{2} = 1$ : hipérbole

Intersecção com o plano $yz$ $(x=0)$:

$-\frac{y^2}{2} - \frac{z^2}{2} = 1$ : equação impossível

A superfície não intersecta o plano $yz$

b) Hiperbolóide de 2 folhas

c) É uma superfície de revolução porque resulta da rotação da hipérbole $x^2 - \frac{y^2}{2} = 1$ em torno do eixo $x$

d) Reflexão no plano $x=y$ : $y^2 - \frac{x^2}{2} - \frac{z^2}{2} = 1$

e) O declive pedido é $\frac{\partial z}{\partial x}(-4, \sqrt{5}, -5)$.

Derivando a equação em ordem a $x$:

$2x - z\frac{\partial z}{\partial x} = 0$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{2x}{z}$$

$$\frac{\partial z}{\partial x}\left(-4, \sqrt{5}, -5\right) = \frac{2\times(-4)}{-5} = \frac{8}{5}$$

4. $\vec{u}(t) = \left( \frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}, 1 \right)$ , $t \in \mathbb{R}$

a) O vector tangente é $\vec{u}'(t)$ :

$$\vec{u}'(t) = \left( \frac{2(1+t^2) - 2t \cdot 2t}{(1+t^2)^2}, \frac{-2t(1+t^2) - 2t(1-t^2)}{(1+t^2)^2}, 0 \right)$$

$$= \left( \frac{2(1-t^2)}{(1+t^2)^2}, \frac{-4t}{(1+t^2)^2}, 0 \right)$$

$$\vec{u}(t) \cdot \vec{u}'(t) = \frac{2t \cdot 2(1-t^2) + (1-t^2)(-4t) + 1 \cdot 0}{(1+t^2)^3}$$

$$= \frac{4t(1-t^2) - 4t(1-t^2)}{(1+t^2)^3} = 0$$

O produto interno de $\vec{u}(t)$ e $\vec{u}'(t)$ é igual a 0, logo os dois vectores são ortogonais.

b) $r^2 = x^2 + y^2 = \left( \frac{2t}{1+t^2} \right)^2 + \left( \frac{1-t^2}{1+t^2} \right)^2 =$

$$= \frac{4t^2 + 1 - 2t^2 + t^4}{1+2t^2+t^4} = \frac{1+2t^2+t^4}{1+2t^2+t^4} = 1$$

$\begin{cases} r = 1 \\ z = 1 \end{cases}$ : circunferência de centro em $(0,0,1)$ e raio 1, situada no plano $z = 1$

5. $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 \cos y}{\sin x} & \text{se } \sin x \neq 0 \\ 0 & \text{se } \sin x = 0 \end{cases}$

a) $\sin x = 0 \iff x = k\pi \ , \ k \in \mathbb{Z}$

Se $k \neq 0$, temos $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(k\pi, y_0)} \frac{x^2 \cos y}{\sin x} = \infty$

(o numerador tende para $k^2 \pi^2 \cos y_0$ e o denominador para 0)

Se $k=0$, temos $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,y_0)} \frac{x^2 \cos y}{\sin x} =$

$$= \lim_{(x,y)\to(0,y_0)} x \cdot \frac{x}{\sin x} \cos y = 0 \cdot 1 \cdot \cos y_0 = 0$$

Assim, $f$ é contínua em $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}\}$

b) $$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{2x \cos y \sin x - x^2 \cos y \cos x}{\sin^2 x}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{x^2 \sin y}{\sin x}$$

c) $$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{h^2 \cos 0}{\sin(h)} - 0}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h}{\sin(h)} = 1$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{k\to 0} \frac{0-0}{k} = 0$$

d) $\begin{cases} x = 2\pi u v \\ y = \pi(u+v) \end{cases}$ $\quad (u_0, v_0) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \Rightarrow (x_0, y_0) = \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$

$$\frac{\partial f}{\partial x}\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right) = \frac{2x\cos y \sin x - x^2 \cos y \cos x}{\sin^2 x}\Bigg|_{(x,y)=\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)} =$$

$$= \frac{\pi(-1)\cdot 1 - \frac{\pi^2}{4}(-1)\cdot 0}{1} = -\pi$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}\left(\pi/2, \pi\right) = -\frac{x^2 \sin y}{\sin x}\Bigg|_{(x,y)=\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)} = -\frac{\frac{\pi^2}{4}\cdot 0}{1} = 0$$

$$\frac{\partial x}{\partial u}\left(1/2, \frac{1}{2}\right) = 2\pi v\Big|_{\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)} = \pi \qquad \frac{\partial x}{\partial v}\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = 2\pi u\Big|_{(1/2, 1/2)} = \pi$$

$$\frac{\partial y}{\partial u}\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \pi \qquad \frac{\partial y}{\partial v}\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \pi$$

$$\frac{\partial f}{\partial u}\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \frac{\partial f}{\partial x}\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)\frac{\partial x}{\partial u}\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) + \frac{\partial f}{\partial y}\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)\frac{\partial y}{\partial u}\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) =$$

$$= -\pi \cdot \pi = -\pi^2$$

$$\frac{\partial f}{\partial v}\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \frac{\partial f}{\partial x}\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)\frac{\partial x}{\partial v}\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) + \frac{\partial f}{\partial y}\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)\frac{\partial y}{\partial v}\left(1/2, 1/2\right) =$$

$$= -\pi \cdot \pi = -\pi^2$$