Análise Matemática II E

1º Teste, 9/5/2009

Deve mudar de folha sempre que mudar de pergunta. Deve apresentar os seus cálculos, argumentos e justificações. Atenção, existem mais perguntas no verso desta folha.

1. Considere a equação diferencial

$$y' = 2x\sqrt{1-4y^2}.$$

   a) Verifique se a equação tem soluções de equilíbrio (ou seja, soluções constantes), e em caso afirmativo, determine-as. [1]

   b) Determine a solução $y(x)$ da equação que verifica a condição inicial $y(\frac{\sqrt{\pi}}{2}) = 0$. [2]

2. Considere o problema de valores iniciais

$$\begin{cases} y' - 2ty = e^{t^2} \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

   a) Resolva o problema de valores iniciais. [2]

   b) Obtenha um valor aproximado de $y(0,2)$, utilizando o método de Euler com passo $h = 0,1$.
   Observação: Considere o valor $e^{0,01} = 1,01$. [1]

3. Considere a superfície definida por $x^2 - \dfrac{y^2}{2} - \dfrac{z^2}{2} = 1$.

   a) Identifique as intersecções da superfície com os planos coordenados. [1]

   b) Classifique a superfície. [1]

   c) Justifique que se trata de uma superfície de revolução, e explique qual é a revolução (isto é, indique que curva roda em torno de que eixo). [1]

d) Escreva a equação da superfície que se obtém desta por reflexão no plano $x = y$. [0,5]

e) Calcule o declive da superfície na direcção do eixo x no ponto $(-4, \sqrt{5}, -5)$. [1]

4. Considere a curva em $\mathbb{R}^3$ definida por

$$\mathbf{u}(t) = \left(\frac{2t}{1+t^2} \ , \ \frac{1-t^2}{1+t^2} \ , \ 1 \right) \ , \qquad t \in \mathbb{R}.$$

a) Verifique que o vector tangente à curva é ortogonal a $\mathbf{u}(t)$, $\forall t \in \mathbb{R}$. [1,5]

b) Identifique geometricamente a curva. [2]
Sugestão: utilize as coordenadas cilíndricas r e z.

5. Considere a função $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 \cos(y)}{\sin(x)} & se \quad \sin(x) \neq 0 \\ \\ 0 \quad se \quad \sin(x) = 0 \end{cases}$$

a) Estude a continuidade de f em $\mathbb{R}^2$. [1,5]

b) Calcule as derivadas parciais de f nos pontos $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ tais que $\sin(x) \neq 0$. [1,5]

c) Calcule $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)$. [1,5]

d) Considerando novas variáveis (u,v) definidas por

$$\begin{cases} x = 2\pi uv \\ \\ y = \pi(u+v) \end{cases}$$

e designando ainda por f a função composta $f(x(u,v), y(u,v))$, calcule $\dfrac{\partial f}{\partial u}$ e $\dfrac{\partial f}{\partial v}$ no ponto $(u_0, v_0) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$. [1,5]