

# Análise Matemática II E

2º Teste, 19 de Junho de 2009

Duração: 2 horas.

Deve mudar de folha sempre que mudar de pergunta. Deve apresentar os seus cálculos, argumentos e justificações. Atenção, existem mais perguntas no verso desta folha.

1. Considere a função  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $f(x, y) = x^2 + y^3$ .
  - a) Calcule a derivada direccional de  $f$  segundo a direcção do vector  $\mathbf{u} = (1, 2)$  no ponto  $P(-1, 3)$ . [2]
  - b) Calcule a derivada direccional de  $f$  no mesmo ponto  $P$  segundo a direcção de máximo crescimento de  $f$ . [2]
  
2. Considere a função  $f(x, y) = 3x^2 + y^2$ .
  - a) O gráfico de  $f$  é uma superfície em  $\mathbb{R}^3$ . Determine o plano tangente e a recta normal a essa superfície no ponto  $(1, -2, 7)$ . [2]
  - b) Determine os pontos  $(x, y)$  e as direcções em que a derivada direccional de  $f$  tem o valor máximo, considerando  $f$  restringida à circunferência  $x^2 + y^2 = 1$ . [4]  
*Observação: Caso não consiga resolver a alínea b), determine o máximo e o mínimo de  $\phi(x, y) = x^2 + 2y^2 - x$  sobre a circunferência  $x^2 + y^2 = 1$ .* [2]
  
3. Determine os pontos críticos, e verifique se são máximos ou mínimos relativos ou pontos sela, da função  
$$f(x, y) = y^2 + 3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + 24. \quad [2]$$

4. Troque a ordem de integração no seguinte integral

$$\int_1^e \int_0^{\log x} x \, dy dx,$$

e calcule-o.

[2]

*v.s.f.f.*

5. Use coordenadas polares para calcular o seguinte integral:

$$\int_0^{2a} \int_0^{\sqrt{2ax-x^2}} \sqrt{x^2 + y^2} dy dx.$$

[2]

6. Calcule o volume dos seguintes sólidos:

- a) o sólido no interior do cilindro  $x^2 + y^2 = a^2$  entre os planos  $z = 0$  e  $z = x$  e em que  $x \geq 0$ ; [2]
- b) o sólido limitado inferiormente pela esfera  $x^2 + y^2 + z^2 - 3z = 0$  e superiormente pelo parabolóide  $2 - z = x^2 + y^2$ . [2]