Análise Matemática II E

1º Teste, 21/4/2010

Deve mudar de folha sempre que mudar de pergunta. Deve apresentar os seus cálculos, argumentos e justificações. Atenção, existem mais perguntas no verso desta folha.

1. Considere a equação diferencial

$$y' = e^{x-2y}.$$

   a) Verifique se a equação tem soluções de equilíbrio (ou seja, soluções constantes). [0,5]

   b) Determine a solução $y(x)$ da equação que verifica a condição inicial $y(0) = 1$. [2]

   c) Obtenha dois valores aproximados de $y(0,2)$, utilizando o método de Euler com passo (i) $h = 0,1$, (ii) $h = 0,2$; diga, justificando, qual dos valores obtidos é a melhor aproximação. *Observação: Considere para os seus cálculos os seguintes valores:* $e^{-2} \approx 0,135$, $e^{-1,927} \approx 0,146$. [1,5]

2. Resolva o problema de valores iniciais

$$\begin{cases} y' - y\cos x = \sin(2x) \\ \\ y(0) = -1 \end{cases}$$

Observação: Note que $\int e^{-\sin x}\sin(2x)\,d\,x = -2e^{-\sin x}(1+\sin x)$. [2]

3. a) Identifique a superfície definida em $\mathbb{R}^3$ por $x^2 + y^2 = 3z^2$. [0,5]

   b) Escreva a equação da superfície em coordenadas esféricas. [1]

   c) Justifique que se trata de uma superfície de revolução, indicando qual a rotação que a gera (ou seja, que linha roda em torno de que eixo). [1]

   d) Escreva a equação da superfície que se obtém por reflexão desta no plano $z = y$. [0,5]

4. Considere as superfícies definidas em $\mathbb{R}^3$ pelas equações $x^2 + y^2 + z^2 = 4\,a^2$ e $x^2 + (y-a)^2 = a^2$.

   a) Identifique as duas superfícies. [1]

   b) Escreva a equação de cada uma das superfícies em coordenadas cilíndricas. [1]

   c) Determine a intersecção das superfícies. [1,5]

   d) Determine a recta tangente à linha referida na alínea c) no ponto $(a,\, a,\, \sqrt{2}a)$. [1,5]
   Observação: Caso não tenha resolvido a alínea c), determine a recta tangente à curva definida por
   $\mathbf{u}(t) = (a\sin(2t),\, a + a\cos(2t),\, 2a\sin t)$ *no ponto* $(a,\, a,\, \sqrt{2}a)$.

5. Considere a função $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^4 y^4}{(x^2+y^4)^3} & \text{se} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

   a) Calcule os limites direccionais de f em $(0,0)$. [1]

   b) Calcule o limite de f em $(0,0)$ segundo a parábola $y^2 = x$. [1]

   c) O que pode concluir sobre a continuidade de f em $\mathbb{R}^2$? [1]

6. Considere a função definida por

$$f(x,y) = \begin{cases} xy\,\log(xy) & \text{se} \quad xy > 0 \\ 0 & \text{se} \quad xy = 0 \end{cases}$$

   a) Represente geometricamente o domínio de f, e indique se é um conjunto aberto, fechado, ou nem aberto nem fechado. [1]

   b) Estude a continuidade de f. [2]
   Sugestão: Para levantar a indeterminação, utilize uma composição de funções adequada.