Análise Matemática II E

2º Teste II 26 de Junho de 2010

Deve mudar de folha sempre que mudar de pergunta. Deve apresentar os seus cálculos, argumentos e justificações, e apresentar os resultados na forma mais simplificada possível. Atenção, existem mais perguntas no verso desta folha.

1. Considere a função $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy(\cos x - \sin y)}{\sqrt{x^2+y^2}} & se \quad (x,y) \neq (0,0) \\ \\ 0 & se \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

   a) Calcule as derivadas parciais de f no ponto $(0,0)$. [1]

   b) Estude a diferenciabilidade de f no ponto $(0,0)$. [1,5]

2. Seja $f:\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função diferenciável, cujo gradiente é $\nabla f(u,v) = ((1+u)\,e^{u+2v},\ 2u\,e^{u+2v})$, e $z:\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ a função definida por

$$z(x,y) = xy + f(x^2+y^2,\ xy).$$

   a) Determine o gradiente de z no ponto$(x,y) = (2,-1)$. [2]

   b) Determine a derivada direccional de z no ponto $(2,-1)$ segundo a direcção do vector $\mathbf{a} = (-1,-3)$. [1]

   c) Determine a direcção de máximo crescimento de z a partir do ponto $(2,-1)$. [1]

3. Determine o plano tangente e a recta normal à superfície $-2x^2 + 3y^2 + z^2 = 1$ no ponto $(-\sqrt{3}, 1, 2)$. [2]

4. Estude quanto a máximos relativos, mínimos relativos e pontos sela a função $f(x,y) = x^4 + y^4 - 2x^2 + 4xy - 2y^2$, com $x \neq 0,\ y \neq 0$. [2]

5. Calcule o mínimo da função $f(x,y,z) = x^3 + y^3 + z^3$, x, y, z positivos, sobre o plano $x + 9y + 4z = 1$. [2]

6. Inverta a ordem de integração e calcule o seguinte integral:

$$\int_{1/3}^{1} \int_{1}^{3x} e^{\frac{3x}{y}}\, dy\, dx + \int_{1}^{3} \int_{x}^{3} e^{\frac{3x}{y}}\, dy\, dx.$$

[2,5]

7. Considere o integral $\displaystyle\int\int_A e^{xy}\, dx\, dy$, em que A é a região no 1º quadrante limitada pelas linhas $y = \dfrac{x}{2}$, $y = x$, $y = \dfrac{1}{x}$ e $y = \dfrac{2}{x}$.

   a) Escreva o integral sob a forma de integral iterado.
   ATENÇÃO: Não calcule esse integral. [1]

   b) Utilize a mudança de variáveis $u = \dfrac{y}{x},\ v = xy$ para calcular o integral. [2]

8. Calcule $\displaystyle\int\int\int_D z\, dV$, em que D é o sólido limitado superiormente pela superfície $z = 4 - (x^2 + y^2)$ e inferiormente pela superfície $z^2 = 9(x^2 + y^2)$. [2]

   (Nota: utilize o sistema de coordenadas que preferir.
   Note ainda que $\sqrt{225} = 15$).