Análise Matemática II E

Teste 1
30 de Outubro de 2010

1. Considere a equação diferencial $xy' - y = y^2$.
   (a) Verifique se a equação admite soluções de equilíbrio (ou seja, soluções constantes), e em caso afirmativo determine-as. [1]
   (b) Determine a solução $y(x)$ da equação que verifica a condição inicial $y(1) = -2$. [2,5]
   (c) Utilizando o método de Euler com passo $h = 0,1$, obtenha um valor aproximado da solução do problema de valores iniciais $xy' - y = y^2$, $y(1) = -0,5$ no ponto $x = 1,1$. [1]

2. Determine a solução geral da equação $y' + \dfrac{2y}{x} = \dfrac{1}{x}$. [2,5]

3. Suponha que uma população evolui segundo o modelo logístico com taxa de crescimento intrínseco $k = 0,025$/ano, e capacidade de suporte L dada.
   (a) Escreva o problema de valor inicial que modeliza a evolução da referida população. [1]
   (b) Supondo que a dimensão inicial da população é igual a $L/4$, calcule o tempo decorrido até que a população triplique. *(Recorde que a solução do problema de valor inicial da alínea (a) é* $y(t) = \dfrac{y_0 L}{y_0 + (L - y_0)e^{-kt}}$*)*. [1,5]

4. Considere a superfície $x^2 + y^2 - z^2 - 2x = 0$.
   (a) Classifique a superfície. [0,5]
   (b) Justifique que se trata de uma superfície de revolução, e descreva essa revolução (isto é, indique que curva roda em torno de que eixo). [1]
   (c) Escreva (na forma mais simplificada possível) a equação da superfície em coordenadas esféricas. [1]
   (d) Escreva a equação da superfície que se obtém desta por reflexão no plano $y = z$. [0,5]

(v.s.f.f.)

5. Considere a curva em $\mathbb{R}^3$ definida por

$$\mathbf{u}(t) = \big(2\cos^2(t)\ ,\ 2\sin(t)\cos(t)\ ,\ 2\sin(t)\big)\ , \qquad t \in \mathbb{R}.$$

Determine a recta tangente e o plano normal à curva no ponto $(1, 1, \sqrt{2})$. [2]

6. Descreva geometricamente a seguinte curva (pode fazer um esboço, se preferir):

$$x(t) = t\ ,\ y(t) = -t\ ,\ z(t) = \frac{t^2}{2}\ , \qquad t \in \mathbb{R}.$$

[2]

7. Considere a função $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2 - 4} + \log(x - y + 1)$.

   (a) Determine o conjunto D - domínio de f. [1]

   (b) Determine o interior, a fronteira, o fecho e o derivado de D. [1]

   (c) Diga, justificando, se D é aberto, fechado, ou nem aberto nem fechado. [1]

   (d) Estude a continuidade de f em D. [0,5]

   (Nota: As respostas às alíneas (a) e (b) podem ser apresentadas graficamente)