Análise Matemática II E

Teste 2
17 de Dezembro de 2010

1. Considere a função $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{(x^2y + xy^2)\sin(x-y)}{x^2+y^2} & \text{se} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ & \text{se} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$.

   a) Estude a continuidade de f em $\mathbb{R}^2$. [1]

   b) Calcule $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)$. [0,5]

   c) Estude a diferenciabilidade de f em $(0,0)$. [1]

   d) Sabendo que $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,y) = -\sin y \quad \forall y \in \mathbb{R}$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,0) = \sin x \quad \forall x \in \mathbb{R}$, calcule $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0)$ e $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0)$. [1]

   e) O que pode concluir sobre a continuidade das funções $\dfrac{\partial f}{\partial x}$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ e $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ no ponto $(0,0)$? Justifique as respostas. [0,5]

Sejam ϕ e ψ funções diferenciáveis, e $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ a função definida por

$$f(x,y) = xy + \phi(x^2 - y) + \psi(x + y^2)$$

Calcule $\dfrac{\partial f}{\partial x}(1,2)$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y}(1,2)$ em função das derivadas de ϕ e ψ em pontos apropriados. [2,5]

Considere a superfície $x^2 + 2y^2 + 3z^2 + xy - z = 9$, e o ponto $P(1,-2,1)$ sobre a superfície.

   a) Determine a direcção em que o declive é máximo no ponto P. [1]

   b) Calcule o declive da superfície na direcção $-\mathbf{i} + \mathbf{2j}$ no ponto P. [1,5]

   c) Determine o plano tangente e a recta normal à superfície no ponto P. [2]

   a) Estude quanto a máximos relativos, mínimos relativos e pontos sela a função

$$f(x,y) = 4xy - 2x^2 - y^4$$

[1,5]

   b) Calcule os pontos de máximo e mínimo (absolutos) da função $z = x^3 + y^3 - 3xy$ sobre a circunferência $x^2 + y^2 = 4$. [1,5]

(v.s.f.f.)

Converta em coordenadas polares e calcule o seguinte integral:

$$\int_0^{\sqrt{2}} \int_y^{\sqrt{4-y^2}} \frac{1}{1+x^2+y^2}\, dx\, dy.$$

[2]

Inverta a ordem de integração no seguinte integral:

$$\int_{-1}^{0} \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} 2xy\, dx\, dy + \int_0^1 \int_{-\sqrt{1-y}}^{\sqrt{1-y}} 2xy\, dx\, dy.$$

[2]

ATENÇÃO: Não calcule esse integral.

Calcule o volume do sólido limitado pelas superfícies $z = 0$, $z = \sqrt{x^2+y^2}$ e $x^2+y^2 = 4$. [2]