Análise Matemática II E

Teste 1
13 de Abril de 2011

1. Considere a equação diferencial $(1+x^2)^2y' = -2x(1+y^2)$.

   (a) Verifique se a equação admite soluções de equilíbrio (ou seja, soluções constantes), e em caso afirmativo determine-as. [1]

   (b) Determine a solução $y(x)$ da equação que verifica a condição inicial $y(0) = 1$. [2,5]

2. (a) Determine a solução do seguinte problema de valor inicial:

$$\begin{cases} xy' - (x+1)y + e^x(x^2+1) = 0 \\ \\ y(-1) = -e \end{cases}$$

[2,5]

   (b) Utilizando o método de Euler com passo $h = 0,1$, obtenha um valor aproximado da solução do problema de valor inicial da alínea (a) no ponto $x = -0,9$. [1]
   (Considere as aproximações $e \approx 2,718$ e $\frac{1}{e} \approx 0,368$.)

3. Mostre que uma população que duplica em 100 anos e triplica em 200 anos não obedece ao modelo exponencial. [1]

4. Considere uma população que evolui segundo o modelo logístico com taxa de crescimento intrínseco k e capacidade de suporte L dadas.

   (a) Escreva o problema de valor inicial que modeliza a evolução da referida população, considerando a condição inicial $y(0) = y_0$. [0,5]

   (b) Verifique que a solução $y(t) = \dfrac{y_0 L}{y_0 + (L - y_0)e^{-kt}}$ do problema de valor inicial formulado na alínea (a) se pode escrever na forma $y(t) = \dfrac{L}{1 + Ae^{-kt}}$, e calcule A em função da capacidade de suporte e do valor inicial y_0. [0,5]

   (c) Supondo que $y_0 < \dfrac{L}{2}$, verifique que $A = e^{k\hat{t}}$, em que $\hat{t}$ é o instante em que a solução $y(t)$ atinge o valor $\dfrac{L}{2}$. [0,5]

   (d) Conclua que, nas condições da alínea (c), a solução é dada por $y(t) = \dfrac{L}{1 + e^{-k(t-\hat{t})}}$. [0,5]

5. Considere as superfícies S_1 e S_2 definidas respectivamente por $x^2 + y^2 + (z-1)^2 = \frac{3}{2}$ e $x^2 + y^2 - z^2 = 1$.

   (a) Classifique as superfícies, e indique, justificando, se são de revolução. [1]

   (b) Determine a intersecção de S_1 com o plano xy e a intersecção de S_2 com o plano $x = 0$. [1]

   (c) Escreva a equação da superfície que se obtém de S_2 por reflexão no plano $x = z$, e identifique a orientação dessa superfície. [1]

   (d) Escreva as equações de S_1 e de S_2 em coordenadas esféricas. [1]

6. Considere a curva em $\mathbb{R}^3$ definida por

$$\mathbf{r}(t) = \left(e^t \ , \ e^{-t} \ , \ \log t\right)$$

   (a) Determine o domínio D de $\mathbf{r}$. [0,5]

   (b) Determine o vector tangente e a equação da recta tangente à curva no ponto $(e, \frac{1}{e}, 0)$. [1,5]

   (c) Determine a projecção da curva no plano xy . [1]

7. Considere a função $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x,y) = \sqrt{\frac{36 - 9x^2 - 4y^2}{x^2 + y^2 - 4}}$$

   (a) Determine o conjunto D - domínio de f. [1]

   (b) Determine o interior, a fronteira, o fecho e o derivado de D. [1]

   (c) Diga, justificando, se D é aberto, fechado, ou nem aberto nem fechado. [1]
   (Nota: As respostas às alíneas (a) e (b) podem ser apresentadas graficamente)