Análise Matemática II E

Teste 2
3 de Junho de 2011

1. Considere a função $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3 - y^4}{x^2 + y^2} & \text{se} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$

   (a) Estude a continuidade de f em $\mathbb{R}^2$. [2]

   (b) Calcule $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)$. [1]

   (c) Estude a diferenciabilidade de f em $(0,0)$. [1,5]

2. Seja $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função diferenciável para a qual se tem $\nabla f(2,1) = (-3,5)$, e $z(x,y)$ a função definida por $z(x,y) = f(x^2 + y^2, xy + 2)$.

   (a) Calcule $\nabla z(x,y)$. [2]

   (b) Calcule o declive de z no ponto $(1,-1)$ na direcção do vector $\mathbf{u} = (3,1)$. [1,5]

   (c) Determine a direcção em que o declive de z no ponto $(1,-1)$ é máximo. [1]

3. Determine os pontos em que o plano tangente à superfície $x + y + z + xy - x^2 - y^2 = 0$ é horizontal. [2]

4. Seja $f(x,y) = 2x^2 - y + y^2 + 5$.

   (a) Estude f quanto a máximos relativos, mínimos relativos e pontos sela. [2]

   (b) Determine os extremos absolutos de f sobre a circunferência $x^2 + y^2 = 1$. [2,5]

5. Inverta a ordem de integração e calcule o integral $\displaystyle\int_{-3}^{0}\int_{-y}^{3} x\,dx\,dy + \int_{0}^{9}\int_{\sqrt{y}}^{3} x\,dx\,dy$. [1,5]

6. Calcule, utilizando coordenadas polares, o volume do sólido limitado pelas superfícies $z = 0$, $z = 1 - x^2 - y^2$ e $x^2 + y^2 - x = 0$. [1,5]

7. Calcule $\displaystyle\int\int_D (x+y)^2\,dx\,dy$, em que D é o paralelogramo limitado pelas rectas $x + y = 0$, $x + y = 1$, $2x - y = 0$ e $2x - y = 3$. [1,5]
   (Sugestão: Utilize a mudança de variáveis $u = x + y,\ v = 2x - y$)