ANÁLISE MATEMÁTICA II E

1º Teste – Respostas

2 de Novembro de 2011

1. a) $y' = -y^2 \qquad -y^2 = 0 \;\Leftrightarrow\; y = 0$

   A equação tem uma única solução constante, a função $y(x) = 0 \;\; \forall x \in \mathbb{R}$.

   b) $-\dfrac{y'}{y^2} = 1$

   $\dfrac{1}{y} = x + C$

   $y(x) = \dfrac{1}{x+C}$

   $y(0) = \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow \dfrac{1}{C} = \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow C = 2$

   A solução pedida é $y(x) = \dfrac{1}{x+2}$.

   c) $x_0 = 0 \qquad y_0 = \dfrac{1}{2}$

   $y(0,1) \approx y_1 = y_0 + hf(x_0, y_0) =$

   $= \dfrac{1}{2} + 0,1 \times \left(-\left(\dfrac{1}{2}\right)^2\right) = \dfrac{1}{2} - 0,1 \times \dfrac{1}{4} = \dfrac{19}{40}.$

2. $y' = -2\,\dfrac{y}{x} + 4x$

   Método de variação da constante: $y'_H = -2\,\dfrac{y_H}{x} \qquad \log y_H = -2\log x + C$

   $y_H(x) = \dfrac{C}{x^2} \qquad y(x) = \dfrac{C(x)}{x^2} \qquad y' = \dfrac{C'}{x^2} - 2\,\dfrac{C}{x^3}$

   $\dfrac{C'}{x} - 2\,\dfrac{C}{x^2} + 2\,\dfrac{C}{x^2} = 4x^2$

   $C'(x) = 4x^3 \qquad C(x) = x^4 + C$

   $y(x) = \dfrac{C}{x^2} + x^2$

   $y(1) = 3 \Leftrightarrow C + 1 = 3 \Leftrightarrow C = 2$

   A solução do problema de valor inicial é $y(x) = x^2 + \dfrac{2}{x^2}$.

3. a) $S_1 : \quad x^2 + y^2 + z^2 - 4z + 4 = 4 \Leftrightarrow x^2 + y^2 + (z-2)^2 = 4$: esfera de centro em $(0,0,2)$ e raio 2; $S_2 : \quad \dfrac{9}{4} - z = x^2 + y^2$: parabolóide circular cujo eixo é o eixo z, partindo do ponto $(0,0,9/4)$ e abrindo para baixo. As duas superfícies são de revolução.

   b) $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 4z & \ldots \\ x^2 + y^2 + z = \frac{9}{4} & z^2 - 4z = z - \frac{9}{4} \end{cases}$

Obtêm-se as soluções $z = 9/2$ e $z = 1/2$; como $z \leq 9/4$, a primeira não é admissível, e portanto $z = 1/2$, o que implica $x^2+y^2 = \frac{7}{4}$. Assim, a intersecção das duas superfícies é a circunferência de centro em $(0,0,1/2)$ e raio $\frac{\sqrt{7}}{2}$, situada no plano horizontal $z = \frac{1}{2}$.

c) $S_1: \quad \rho^2 = 4\rho\cos\phi \quad \Leftrightarrow \quad \rho = 4\cos\phi$

$S_2: \quad \rho^2\sin^2\phi + \rho\cos\phi = \dfrac{9}{4}$.

d) (i) $x^2+y^2+z^2 = -4z$: esfera de centro em $(0,0,-2)$ e raio 2.

(ii) $x+y^2+z^2 = \dfrac{9}{4}$: parabolóide circular cujo eixo é o eixo x, partindo do ponto $(\frac{9}{4},0,0)$ e abrindo no sentido negativo do eixo x.

4. a) $\mathbf{r}(t_0) = \left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}e^{-\pi/6}, \dfrac{1}{2}e^{-\pi/6}, e^{-\pi/6}\right) \Rightarrow t_0 = \dfrac{\pi}{6}$

$\mathbf{r}'(t) = (-e^{-t}\cos t - e^{-t}\sin t, -e^{-t}\sin t + e^{-t}\cos t, -e^{-t})$

$\mathbf{r}'\left(\dfrac{\pi}{6}\right) = -e^{-\pi/6}\left(\dfrac{1+\sqrt{3}}{2}, \dfrac{1-\sqrt{3}}{2}, 1\right)$.

A equação da recta tangente é

$\mathbf{l}(t) = \mathbf{r}(t_0) + t\mathbf{r}'(t_0) = e^{-\pi/6}\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}, \dfrac{1}{2}, 1\right) - te^{-\pi/6}\left(\dfrac{1+\sqrt{3}}{2}, \dfrac{1-\sqrt{3}}{2}, 1\right)$, $t \geq 0$.

b) Tem-se $0 < z(t) \leq 1$, e $x^2(t)+y^2(t) = z^2(t)$. Assim, a curva é uma hélice circular que parte do ponto $(1,0,1)$ e está situada sobre a porção do cone circular $z = \sqrt{x^2+y^2}$ compreendida entre as cotas 0 (não atingida) e 1.

5. a) $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x-2y \geq 0 \wedge 4xy > 1\}$.

b) $\operatorname{int} D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x-2y > 0 \wedge 4xy > 1\}$

$\operatorname{fr} D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x-2y = 0 \wedge 4xy \geq 1\} \cup \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x-2y \geq 0 \wedge 4xy = 1\}$

D não é aberto porque não é igual ao seu interior, e não é fechado porque não contém a sua fronteira.

6. f é contínua em todos os pontos $(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ (x,y) \neq (0,0)$, pelas propriedades operatórias da continuidade, visto que se trata de um subconjunto aberto do domínio. Para estudar a existência de $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(x^2+y^2)}{\sqrt{x^2+y^2}}$, podemos utilizar a mudança de variáveis $r = \sqrt{x^2+y^2}$, que verifica $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} r = 0$:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(x^2+y^2)}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{r\to 0^+} \frac{\sin r^2}{r} = \lim_{r\to 0^+} r\,\frac{\sin r^2}{r^2} = 0 \,.\, 1 = 0 = f(0,0).$$

Assim, f também é contínua em $(0,0)$.

Conclui-se que f é contínua em $\mathbb{R}^2$.