Análise Matemática II E

Teste 2 - 16 de Dezembro de 2011

Respostas

1. a) Em $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, f é contínua, pelas propriedades operatórias da continuidade, visto que se trata de um subconjunto aberto do domínio; em $(0,0)$, temos uma indeterminação de tipo $\frac{0}{0}$; calculando os limites direccionais (utilizando por exemplo coordenadas polares), obtem-se:

$$\lim_{r\to 0} f(r\cos\theta, r\sin\theta) = \lim_{r\to 0} \frac{r^3\cos\theta\sin^2\theta}{(r^2)^{3/2}} = \lim_{r\to 0}\cos\theta\sin^2\theta = \cos\theta\sin^2\theta$$

Os limites direccionais dependem de θ, portanto não existe $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$; conclui-se assim que f é contínua em $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.
b)
$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h\to 0}\frac{f(h,0)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{0}{h} = 0;$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{k\to 0}\frac{f(0,k)-f(0,0)}{k} = \lim_{k\to 0}\frac{0}{k} = 0.$$
c) Como f não é contínua em $(0,0)$, não é diferenciável nesse ponto.

2. Não é possível, pois, sendo g de classe C^2, as suas derivadas parciais de 2ª ordem cruzadas têm de ser iguais; ora nas condições do enunciado, tem-se $\frac{\partial^2 g}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}(x+y) = 1 \neq -1 = \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}(y-x)$.

3. $\frac{\partial z}{\partial u}(u,v) = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u} = (2x+3y)\cos u + (3x+2y)\cos u =$
$= 5(x+y)\cos u$
$\frac{\partial z}{\partial v}(u,v) = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v} = (2x+3y)(-\sin v) + (3x+2y)\sin v =$
$= (x-y)\sin v$
$u = \frac{\pi}{2}, v = \frac{\pi}{3} \Rightarrow x = \sin\frac{\pi}{2} + \cos\frac{\pi}{3} = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2},\ y = \sin\frac{\pi}{2} - \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}.$
Assim, $\frac{\partial z}{\partial u}\left(\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{3}\right) = 5\cdot 2\cdot\cos\frac{\pi}{2} = 0,\ \frac{\partial z}{\partial v}\left(\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{3}\right) = 1\cdot\sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$

4. Seja $F(x,y,z) = e^{(z-x)y} + \sin(xyz^2) - \frac{1}{2}$. Tem-se
$$\frac{\partial F}{\partial x}(P_0) = \frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}\,\pi}{12},\ \frac{\partial F}{\partial y}(P_0) = \frac{\sqrt{3}}{2},\ \frac{\partial F}{\partial z}(P_0) = -\frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}\,\pi}{6}\,.$$

a) A equação do plano tangente em P_0 é
$$\left(\frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}\,\pi}{12}\right)(x-1) + \frac{\sqrt{3}}{2}\left(y + \frac{\pi}{6}\right) - \left(\frac{\pi}{6} + \frac{\sqrt{3}\,\pi}{6}\right)(z-1) = 0\,.$$

b) A direcção pedida é a do vector $\nabla z(P_0) = \left(\dfrac{2-\sqrt{3}}{2+2\sqrt{3}}, \dfrac{3\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}\,\pi}\right)$,

pois
$$\frac{\partial z}{\partial x}(P_0) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}(P_0)}{\frac{\partial F}{\partial z}(P_0)},\ \frac{\partial z}{\partial y}(P_0) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial y}(P_0)}{\frac{\partial F}{\partial z}(P_0)}\,.$$

5. $\dfrac{\partial f}{\partial x} = 2xy$; $\dfrac{\partial f}{\partial y} = x^2 + 3y^2 - 1$. Considerando então o sistema de estacionaridade, a primeira equação ($2xy = 0$) é equivalente a $x = 0 \vee y = 0$. Introduzindo $x = 0$ na segunda equação, obtem-se $y = \pm\dfrac{1}{\sqrt{3}}$; introduzindo $y = 0$ na segunda equação, obtem-se $x = \pm 1$, e portanto existem 4 pontos de estacionaridade:
$P_1 = (1,0)$, $P_2 = (-1,0)$, $P_3 = \left(0, \dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)$, $P_4 = \left(0, -\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)$.
Aplicando o critério da 2ª derivada, conclui-se que P_1 e P_2 são pontos sela, P_3 é ponto de mínimo local, e P_4 é ponto de máximo local.

6. Ponto de intersecção das duas rectas: $(1,3)$; ponto de intersecção da recta $x + y = 4$ com a parábola: $(2,2)$; ponto de intersecção da recta $y = 3x$ com a parábola: $(6,18)$; ponto da recta $y = 3x$ correspondente à abcissa 2: $(2,6)$.

As duas regiões mencionadas são separadas pela recta $x + y = 4$. Se escolhermos a região "abaixo" dessa recta (ou seja, aquela em que $x + y \leq 4$), o integral pedido é
$$\int_0^1 \int_{\frac{x^2}{2}}^{3x} 1\,d\,y\,d\,x + \int_1^2 \int_{\frac{x^2}{2}}^{4-x} 1\,d\,y\,d\,x = \frac{8}{3}$$
Se escolhermos a outra região, obtemos o integral
$$\int_2^3 \int_{4-y}^{\sqrt{2y}} 1\,d\,x\,d\,y + \int_3^{18} \int_{y/3}^{\sqrt{2y}} 1\,d\,x\,d\,y = 15 + \frac{1}{3}$$

Em qualquer dos casos, este integral representa a área da região correspondente.

7. $\dfrac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = \begin{vmatrix} 2x & -2y \\ 2x & 2y \end{vmatrix} = 8xy$ Atendendo a que o jacobiano de (x,y) em ordem a (u,v) é o inverso aritmético do jacobiano de (u,v) em ordem a (x,y), obtemos
$\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \dfrac{1}{8xy}$; como estamos no 1º quadrante, $xy > 0$, e portanto
$\left|\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| = \dfrac{1}{8xy}$
$1 \le x^2 - y^2 \le 4 \Rightarrow 1 \le u \le 4$; $9 \le x^2 + y^2 \le 16 \Rightarrow 9 \le v \le 16$. Assim, o integral pedido é igual a

$$\int_9^{16}\int_1^4 xy\,\frac{1}{8xy}\,d\,u\,d\,v = \frac{1}{8}\int_9^{16}\int_1^4 1\,d\,u\,d\,v = \frac{21}{8}\,.$$

8. a) A intersecção do plano $ax+by+cz=d$ com o plano $z=0$ é a recta $ax+by=d$, que intersecta o eixo x no ponto $x=d/a$. Tem-se pois

$$\text{volume de } G = \int_0^{d/a}\int_0^{-\frac{a}{b}x+\frac{d}{b}}\int_0^{-\frac{a}{c}x-\frac{b}{c}y+\frac{d}{c}} 1\,d\,z\,d\,y\,d\,x$$

b) Equação dos planos que passam pelo ponto $(1,1,2)\ :\ a(x-1)+b(y-1)+c(z-2)=0\ \Leftrightarrow ax+by+cz=a+b+2c\,.$
Assim, a função a minimizar é $V(a,b,c,d)=\dfrac{d^3}{6abc}$, sujeita à restrição $d=a+b+2c \Leftrightarrow g(a,b,c,d)=a+b+2c-d=0$. A partir dos gradientes de V e g obtemos o sistema dos multiplicadores de Lagrange:

$$\begin{cases} -\frac{d^3}{6a^2bc} & = \lambda \\ -\frac{d^3}{6ab^2c} & = \lambda \\ -\frac{d^3}{6abc^2} & = 2\lambda \\ \frac{d^2}{2abc} & = -\lambda \\ a+b+2c & = d \end{cases}$$

Eliminando λ obtém-se $a=b=2c,\ d=6c$, e portanto o plano pretendido é $2cx+2cy+cz=6c \Longleftrightarrow 2x+2y+z=6\,.$