# Análise Matemática II E

**Teste 2**
**16 de Dezembro de 2011**

1. Considere a função $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy^2}{(x^2+y^2)^{3/2}} & \text{se} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$

   (a) Estude a continuidade de $f$ em $\mathbb{R}^2$. [1,5]

   (b) Calcule $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)$. [1]

   (c) Estude a diferenciabilidade de $f$ em $(0,0)$. [1]

2. Seja $g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função de classe $C^2$ (isto é, todas as derivadas parciais de $g$ de 1ª e 2ª ordem existem e são contínuas em todos os pontos de $\mathbb{R}^2$). É possível ter-se $\dfrac{\partial g}{\partial x} = x + y$ e $\dfrac{\partial g}{\partial y} = y - x$? Justifique a resposta. [1]

3. Seja $z = f(u,v)$ a função definida por $z = x^2 + 3xy + y^2$, em que $x = \sin u + \cos v,\ y = \sin u - \cos v$. Calcule $\dfrac{\partial z}{\partial u}$ e $\dfrac{\partial z}{\partial v}$ no ponto $\left(\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{3}\right)$. [2]

4. Considere a superfície definida por $e^{(z-x)y} + \sin(xyz^2) = \dfrac{1}{2}$, e o ponto $P_0\left(1, -\dfrac{\pi}{6}, 1\right)$ sobre a superfície.

   (a) Determine o plano tangente à superfície no ponto $P_0$. [2]

   (b) Indique a direcção em que o declive da superfície no ponto $P_0$ é máximo. [1,5]

5. Estude a função $f(x,y) = x^2y + y^3 - y$ quanto a máximos relativos, mínimos relativos e pontos sela. [2]

6. A parábola $2y = x^2$ e as rectas $y = 3x$ e $x + y = 4$ limitam duas regiões no 1º quadrante. Calcule $\displaystyle\int\int_D 1\, dA_{xy}$, em que $D$ é uma dessas regiões (à sua escolha).O que representa este integral? [2]

7. Calcule $\displaystyle\int\int_D xy\, dA_{xy}$, em que $D$ é a região no 1º quadrante limitada pelas curvas $x^2 - y^2 = 1$, $x^2 - y^2 = 4$, $x^2 + y^2 = 9$ e $x^2 + y^2 = 16$, utilizando a mudança de variáveis $u = x^2 - y^2,\ v = x^2 + y^2$. [2]

8. Seja $G$ o sólido no 1º octante limitado pelos planos coordenados e pelo plano $ax + by + cz = d$ (em que $a, b, c, d > 0$).

   (a) Formule (MAS NÃO CALCULE) um integral triplo iterado que permite calcular o volume de $G$. [2]

   (b) Sabendo que o integral da alínea a) é igual a $\dfrac{d^3}{6abc}$, determine o plano que passa pelo ponto $(1,1,2)$ para o qual o volume de $G$ é mínimo. [2]