ANÁLISE MATEMÁTICA II E

1º Teste – Respostas

21 de Abril de 2012

1. Forma normal da equação: $y' + \dfrac{3}{x}y = \dfrac{\sin x}{x^3}$

   Método de variação da constante: $y'_H = -3\,\dfrac{y_H}{x}$ $\qquad \log y_H = -3\log x + C$

   $y_H(x) = \dfrac{C}{x^3} \qquad y(x) = \dfrac{C(x)}{x^3} \qquad y' = \dfrac{C'}{x^3} - 3\,\dfrac{C}{x^4}$

   $x^2\left(\dfrac{C'}{x^3} - 3\,\dfrac{C}{x^4}\right) + 3\,x\dfrac{C}{x^3} = \dfrac{\sin x}{x^3}$

   $\dfrac{C'}{x} - \dfrac{3C}{x^2} + \dfrac{3C}{x^2} = \dfrac{\sin x}{x}$

   $C'(x) = \sin x \qquad C(x) = -\cos x + C$

   $y(x) = \dfrac{C - \cos x}{x^3}$

   $y(\pi) = \dfrac{2}{\pi^3} \Leftrightarrow \dfrac{C+1}{\pi^3} = \dfrac{2}{\pi^3} \Leftrightarrow C = 1$

   A solução do problema de valor inicial é $y(x) = \dfrac{1-\cos x}{x^3}$.

2. a) $1+x+y^2+xy^2 = 1+x+(1+x)y^2 = (1+x)(1+y^2)$. Como $1+y^2 \neq 0 \quad \forall y \in \mathbb{R}$, conclui-se que a equação não tem nenhuma solução constante.

   b) $\dfrac{y'}{1+y^2} = 1+x$

   $\arctan y = x + \dfrac{x^2}{2} + C$

   $y = \tan\left(x + \dfrac{x^2}{2} + C\right)$

   $y(-2) = -1 \Leftrightarrow -1 = \tan(-2+2+C) \Leftrightarrow C = -\dfrac{\pi}{4}$

   A solução pedida é $y(x) = \tan\left(x + \dfrac{x^2}{2} - \dfrac{\pi}{4}\right)$.

3. $t_0 = 0, \quad t_1 = 0,1, \quad t_2 = 0,2$, portanto a aproximação pedida é $y_2 \approx y(t_2)$

   Cálculo de y_1:

   $y_1 = y_0 + hf(t_0,\, y_0) = 1 + 0,1 \times 1^2 = 1,1$

   $y_2 = y_1 + hf(t_1,\, y_1) = 1,1 + 0,1 \times (0,1^2 + 1,1^2) = 1,222.$

4. a) Intersecção com o plano $xy \;\; (z=0) : \emptyset$; intersecção com o plano $yz \;\; (x=0)$: hipérbole de equação $-y^2/4 + z^2 = 1$ (hipérbole que não intersecta o eixo dos y); intersecção com o plano $xz \;\; (y=0)$: análoga à anterior.

b) Hiperbolóide de duas folhas.

c) A superfície é de revolução, gerada pela rotação da hipérbole $-x^2/4+z^2=1$, $y=0$ (por exemplo) em torno do eixo dos z.

d) $\rho^2(4\cos^2\varphi-\sin^2\varphi)=4$

e) $-\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{z^2}{4}+y^2=1$

5. a) $\mathbf{u}(t_0)=(2\,t_0^2,\,1+t_0,\,3-t_0^2)=(2,\,0,\,2)\Rightarrow t_0=-1$
$\mathbf{u}'(t)=(4\,t,1,-2\,t)$
$\mathbf{u}'(-1)=(-4,1,2)$.
A recta tangente é
$\mathbf{l}(t)=\mathbf{u}(t_0)+t\mathbf{u}'(t_0)=\mathbf{u}(-1)+t\mathbf{u}'(-1)=(2,0,2)+t(-4,1,2),\quad t\in\mathbb{R}$.

b) O plano normal é o plano perpendicular ao vector tangente $\mathbf{u}'(-1)$ que passa pelo ponto $(2,0,2)$: $-4(x-2)+y+2(z-2)=0\Leftrightarrow -4x+y+2z=4$.

c) Projecção da curva sobre o plano xy $(z=0)$: $x(t)=2\,t^2,\ y(t)=1+t\Rightarrow t=y-1$: $x=2(y-1)^2$: parábola cujo eixo é a recta $y=1$, com vértice no ponto $(0,1)$, concavidade virada para a direita.

6. a) $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2: x\sin y>0\}=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:(x>0\wedge\sin y>0)\vee(x<0\wedge\sin y<0)\}=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:(x>0\wedge 2k\pi<y<(2k+1)\pi,\ k\in\mathbb{Z})\vee(x<0\wedge(2k-1)\pi<y<2k\pi,y\in\mathbb{Z})\}$.

b) $\operatorname{int} D=D$
A fronteira de D é a união do eixo dos y com as rectas horizontais $y=k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$.
$\overline{D}=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:(x\geq 0\wedge 2k\pi\leq y\leq(2k+1)\pi,\ k\in\mathbb{Z})\vee(x\leq 0\wedge(2k-1)\pi\leq y\leq 2k\pi,y\in\mathbb{Z})\}$.

c) D é aberto porque é igual ao seu interior, e não é fechado porque não contém a sua fronteira.

7. (i) hiperbolóide de uma folha, (ii) cone circular, (iii) hiperbolóide de duas folhas.