Análise Matemática II E

Teste 1
21 de abril de 2012

1. Resolva o problema de valor inicial

$$\begin{cases} x^2y' + 3xy = \dfrac{\sin x}{x} \\ \\ y(\pi) = \dfrac{2}{\pi^3} \end{cases}$$

[3]

2. Considere a equação diferencial $y' = 1 + x + y^2 + xy^2$
   (a) Verifique se a equação admite soluções de equilíbrio (ou seja, soluções constantes), e em caso afirmativo determine-as. [0,5]
   (b) Determine a solução $y(x)$ da equação que verifica a condição inicial $y(-2) = -1$. [3]

3. Determine um valor aproximado da solução do problema de valor inicial

$$\begin{cases} y' = t^2 + y^2 \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

no ponto $t = 0,2$, utilizando o método de Euler com passo $h = 0,1$. [1,5]

4. Considere a superfície $9x^2 + 9y^2 - 36z^2 + 36 = 0$
   (a) Identifique as intersecções da superfície com os planos coordenados. [0,5]
   (b) Classifique a superfície. [1]
   (c) Verifique se se trata de uma superfície de revolução, e em caso afirmativo descreva essa revolução (isto é, indique que curva roda em torno de que eixo). [1]
   (d) Escreva (na forma mais simplificada possível) a equação da superfície em coordenadas esféricas. [0,5]
   (e) Escreva a equação da superfície que se obtém desta por reflexão no plano $y = z$. [0,5]

(v.s.f.f.)

5. Considere a curva em $\mathbb{R}^3$ definida por

$$\mathbf{u}(t) = \left(2t^2 \ , \ 1+t \ , \ 3-t^2\right) \ , \qquad t \in \mathbb{R}$$

(a) Determine a recta tangente à curva no ponto $(2, 0, 2)$. [1,5]

(b) Determine o plano normal à curva no ponto $(2, 0, 2)$. [1]

(c) Faça um esboço da projeção da curva sobre o plano coordenado xy. [1]

6. Considere a função $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $f(x, y) = \dfrac{1}{\sqrt{x \sin y}}$

(a) Determine o conjunto D - domínio de f. [1,5]

(b) Determine o interior, a fronteira e o fecho de D. [1]

(c) Diga, justificando, se D é aberto, fechado, ou nem aberto nem fechado. [1]
(Nota: As respostas às alíneas (a) e (b) podem ser apresentadas graficamente)

7. Determine as superfícies de nível (ou seja, as superfícies definidas por $f(x, y, z) = c$, em que c é constante) da função $f(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2$, para os valores da constante (i) $c = 1$, (ii) $c = 0$ e (iii) $c = -1$.

[1,5]