Análise Matemática II E

Teste 3
29 de Maio de 2013

1. Considere a função $f(x,y) = e^x \sin(\pi/2 + x + 2y) + \log(1+y)\cos(x - 3y)$.

   (a) Calcule a aproximação linear de f a partir de $f(0,0)$, obtida utilizando a diferenciabilidade. [1]

   (b) Utilizando a alínea (a), calcule um valor aproximado de $f(0,07;0,04)$. [1]

2. Seja $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função diferenciável cujo gradiente no ponto $(2,2)$ é o vector $\nabla f(2,2) = (1,-1)$, e g a função definida em $\mathbb{R}$ por $g(t) = f(1+e^t, 1+\cos t)$. Calcule $g'(0)$. [2]

3. Considere a superfície definida por $z^5 + xz^4 + yz^3 = 3$ e o ponto P_0 $(1,1,1)$ sobre a superfície.

   (a) Determine o plano tangente e a recta normal à superfície em P_0. [1,5]

   (b) Determine o declive da superfície em P_0 segundo a direcção do vector $\mathbf{u} = (1,-3)$. [1,5]

   (c) Indique a direcção em que o declive da superfície em P_0 é máximo. [1]

4. (a) Estude a função $f(x,y) = x^2y + y^3 - y$ quanto a pontos de máximo local, mínimo local e pontos sela. [2]

   (b) Determine as dimensões de uma embalagem cilíndrica (tipo lata de cerveja) de custo mínimo que tenha a capacidade de 1 litro. [2]

5. Considere o integral $\displaystyle\int\int_D \sqrt{x^2+y^2}\, dA_{xy}$, em que $D \subset \mathbb{R}^2$ é o círculo de centro em $(1,0)$ e raio 1 .

   (a) Formule o integral em coordenadas cartesianas. [1,5]

   (b) Formule o integral em coordenadas polares, e calcule-o. [2,5]

6. Considere o integral $\displaystyle\int\int_D (x^2 - y^2)\, dA_{xy}$, em que $D \subset \mathbb{R}^2$ é o domínio limitado pelas rectas $y = -x$, $y = 1 - x$, $y = x$ e $y = x + 2$. Calcule o integral utilizando a mudança de variáveis $u = x + y$, $v = x - y$. [2]

7. Utilizando um integral triplo em coordenadas cilíndricas, calcule o volume do sólido no interior da superfície $x^2 + y^2 = 4$ e limitado pela superfície $x^2 + y^2 + z^2 = 9$. [2]