FACULDADE DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
UNIVERSIDADE NOVA DE LISBOA

Análise Matemática II *E*
Departamento de Matemática FCT-UNL
Primeiro Teste – 23 de outubro de 2013
Duração: 1h30m

Nome:________________________________ **Número:**__________

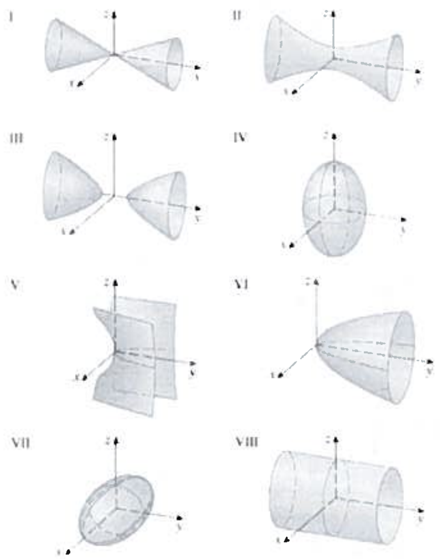


Figura 1: Representação geométrica de superfícies quádricas

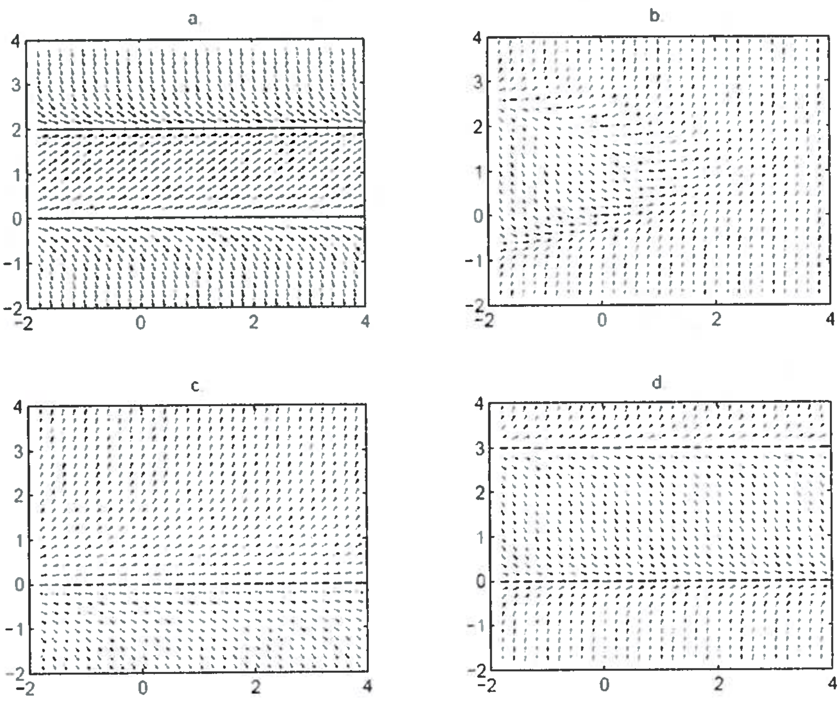


Figura 2: Campos direccionais

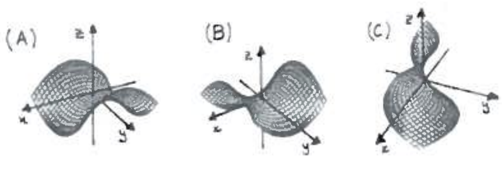


Figura 3: Quádricas obtidas por reflexão

Nome:____ **Número:**__________

AVISO: A cotação do teste varia entre 0 e 20 valores, sendo a cotação de cada pergunta indicada na margem esquerda junto à mesma. Nas perguntas de escolha múltipla haverá lugar a uma penalização (indicada entre parêntesis) no caso de indicar uma resposta errada.
Apenas as respostas às perguntas 14 e 15 devem ser cuidadosamente justificadas na folha nº 1 do enunciado.

[0.5 (0.2)] 1. Quantas soluções tem a equação diferencial $y' - y - 2xe^x = 0$? B

A nenhuma
C duas
E três
B infinitas
D uma
F cinco

[0.5 (0.2)] 2. Quais das seguintes equações diferenciais são separáveis? C

Eq1: $xy' = x^2y + 3y$ Eq2: $xy' = x - y$ Eq3: $e^xy' = xy - x$.

A apenas a Eq1
C Eq1 e Eq3
B apenas a Eq2
D Eq2 e Eq3

[1.0] 3. Para resolver a equação diferencial $2x\frac{dy}{dx} + x^2e^{1-x^2}y = 2$ qual o factor integrante que necessita?

$e^{-\frac{1}{4}e^{1-x^2}}$

[1.5 (0.5)] 4. Identifique as afirmações correctas: B

I. $y - \log(y) = x^2 + 1$ é uma solução implícita de $\frac{dy}{dx} = \frac{2xy}{y-1}$.

II. $x^2 + y^2 = 4$ é uma solução implícita de $\frac{dy}{dx} = \frac{x}{y}$.

A ambos I e II
C apenas II
B apenas I
D nenhuma

[1.5 (0.5)] 5. Determine $y(2)$ sabendo que $y(1) = 1 + e^3$ e $ty' + 2t^2y = 2t^2$. E

A -2
C 0
E 2
B -1
D 1
F nenhuma das restantes

[0.5 (0.2)] 6. Qual dos campos direccionais na Figura 2 corresponde à equação diferencial $y' = y(2-y)$? a

Nos teste com a equação $y' = y(y-3)$ a resposta é d.

[1.5 (0.5)] 7. Considere a equação diferencial $y' = y + t^2$ com o valor inicial $y(1) = 1$. Utilizando o método de Euler com um passo de 0.1 obteve-se como valor aproximado de $y(1.2)$ o valor correspondente à opção: D

A 1.341
C 0.141
B 3.21
D nenhum dos outros valores

[1.0] 8. Determine uma equação da curva $x^2+y^2-2xy-x-y=0$ no sistema de coordenadas XY obtido através da rotação por um ângulo de 45° do sistema de coordenadas xy. $2Y^2 - \frac{2}{\sqrt{2}}X = 0$

[1.0] 9. Observe cada uma das quádricas constantes na Figura 3. Indique uma possível equação para cada uma das figuras:

(A) $z = y^2 - x^2$ (B) $z = x^2 - y^2$ (C) $y = z^2 - x^2$

A figura (B) obtém-se da figura (A) por reflexão desta segundo o plano: $x = y$.

A figura (C) obtém-se da figura (A) por reflexão desta segundo o plano: $y = z$.

[1.0] 10. Indique uma rotação dos eixos xy que permita eliminar o termo xy da equação $2x^2+\sqrt{3}xy+y^2+3y+2=0$: Rotação de 30°.

A cónica correspondente à equação dada é não degenerada. Qual é a cónica? Elipse

[1.5] 11. Em cada uma das alíneas, indique o gráfico da Figura 1 que corresponde à representação geométrica da superfície.

I $x^2-y^2+z^2=0$ VIII $x^2+z^2=1$

II $x^2-y^2+z^2=1$ III $-x^2+y^2-z^2=1$

[1.0] 12. Considere o domínio D de $\mathbb{R}^2$ definido pelas condições $x^2+y^2 \leq 5$ e $0 \leq y \leq x$. Caracterize D utilizando coordenadas polares, completando os espaços.

$$D = \{(x,y) = (r\cos\theta, r\,\text{sen}\,\theta) : r \in [0,\sqrt{5}],\ \theta \in [0,\tfrac{\pi}{4}]\}$$

[1.5] 13. Considere o sólido D de $\mathbb{R}^3$ definido pelas condições $x^2+y^2+z^2 \leq 2$ e $z^2 \geq x^2+y^2$. Caracterize D utilizando coordenadas esféricas, completando os espaços.

$$D = \{(x,y,z) = (\rho.\text{sen}\,\phi.\cos\theta, \rho.\text{sen}\,\phi.\text{sen}\,\theta, \rho\cos\phi) : \rho \in [0,\sqrt{2}],\ \theta \in [0,2\pi],\ \phi \in [0,\tfrac{\pi}{4}] \cup [\tfrac{3\pi}{4},\pi]\}$$

[3.0] 14. Determine a solução geral da equação diferencial $y(\text{cotg}\,x)\frac{dy}{dx} = 1+y^2$.

[3.0] 15. Considere o sólido em $\mathbb{R}^3$ que corresponde à região do espaço limitada pelas superfícies de equação $z+1=\sqrt{x^2+y^2}$ e $z=\sqrt{1-x^2-y^2}$. Descreva a região em coordenadas cilíndricas.

14. A equação dada pode ser escrita na forma

$$\frac{y}{1+y^2}\cdot\frac{dy}{dx}=\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$$

(Note-se que $\cos x \neq 0$ pois caso contrário a equação diferencial é impossível).

Trata-se de uma equação de variáveis separáveis, donde

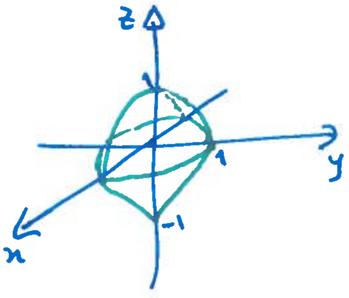
$$\frac{d}{dx}\left(\int \frac{y}{1+y^2}\,dy\right)=\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$$

$$\iff \frac{1}{2}\log(1+y^2) = -\log|\cos x| + c$$

$$\iff \log\left(\sqrt{1+y^2}\right)=\log\left(\frac{1}{|\cos x|}\right)+c$$

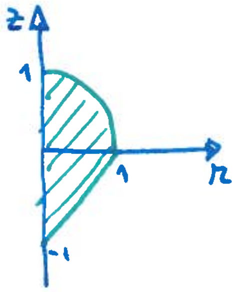
$$\iff \sqrt{1+y^2}=\frac{e^c}{|\cos x|} \iff 1+y^2=\frac{e^{2c}}{\cos^2 x}$$

As soluções da equação dada são as soluções $y(x)$ da equação $1+y^2=\frac{e^{2c}}{\cos^2 x}$, para uma qq. constante arbitária c.



15. A equação $z+1=\sqrt{x^2+y^2}$ corresponde à folha superior $(z\geq -1)$ do cone de equação $(z+1)^2=x^2+y^2$.

A equação $z=\sqrt{1-x^2-y^2}$ corresponde à porção de superfície esférica de equação $x^2+y^2+z^2=1$ com $z\geq 0$.



As duas superfícies intersectam-se nos pontos (x,y,z) tais que:
$\begin{cases}(z+1)^2=x^2+y^2\\ x^2+y^2+z^2=1\\ z\geq 0\end{cases} \iff \begin{cases} z=0\\ x^2+y^2=1\end{cases}$

A região limitada pelas superfícies é:

$$\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3: x^2+y^2+z^2\leq 1 \wedge (z+1)^2\geq x^2+y^2\} =$$

$$=\{(x,y,z)=(r\cos\theta, r\operatorname{sen}\theta, z): r\in[0,1],\ \theta\in[0,2\pi],\ r-1\leq z\leq\sqrt{1-r^2}\}$$