FACULDADE DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
UNIVERSIDADE NOVA DE LISBOA

Análise Matemática II E

Departamento de Matemática FCT-UNL
Segundo Teste – 20 de novembro de 2013
Duração: 1h30m

Nome:______________________ **Número:**__________

Nº Caderno:__________ **Total de folhas entregues:** ___

1ª Parte

[1.5] 1. Faça corresponder a cada uma das funções vectoriais ou equações paramétricas, uma das opções (I) a (V), correspondente à sua representação gráfica.

(I) Recta (II) Elipse (III) Parábola (IV) Circunferência (V) Hélice

III $x = 2t + 1$, $y = t^2$, com $t \in \mathbb{R}$;

II $\vec{\sigma}(t) = (3 + \sin t)\mathbf{i} + 2\cos t\mathbf{j}$, com $t \in [0, 2\pi]$;

I $\vec{\sigma}(t) = (4t - 1)\mathbf{i} + (t + 2)\mathbf{j}$, com $t \in \mathbb{R}$;

IV $\vec{\sigma}(t) = (\cos(2t), 1, \sin(2t))$, com $t \in [0, \pi]$;

V $\vec{\sigma}(t) = (-t, 2\cos t, 2\sin t)$, com $t \in \mathbb{R}$;

I $x = 1 + t$, $y = 3 - 4t$, $z = -2 + 5t$, com $t \in \mathbb{R}$;

[1.0] 2. Indique o conjunto de pontos onde a função vectorial dada por $\vec{r}(t) = \frac{t-2}{t+2}\mathbf{i} + \sin t\mathbf{j} + \log(9 - t^2)\mathbf{k}$ é contínua.

A função $\vec{r}$ é contínua em $]-3,3[\setminus\{-2\}$.

[1.0] 3. Indique, caso exista(m), o(s) ponto(s) de intersecção entre o gráfico de $\vec{\sigma}(t) = (\sqrt{t}, 1-3t^2, 1+t)$, para $t \in [0, +\infty[$, e a superfície de equação $y = 4x^2 + z^2$.

A superfície e o gráfico de $\vec{\sigma}$ intersectam-se no ponto $(0,1,1)$.

[1.5] 4. Determine o vector posição de uma partícula cujo vector velocidade é dado em função do tempo t ($t \geq 0$) por $\vec{v}(t) = 2t\mathbf{i} + \frac{1}{1+t^2}\mathbf{j} + \sqrt{t}\mathbf{k}$, que no instante $t = 1$ se encontra em $\mathbf{i} + \mathbf{k}$.

O vector posição é $\vec{\sigma}(t) = t^2\vec{i} + \left(-\frac{\pi}{4} + \operatorname{arctg} t\right)\vec{j} + \left(\frac{2}{3}t^{3/2} + \frac{1}{3}\right)\vec{k}$, $t \geq 0$.

[1.5] 5. Faça corresponder a cada uma das funções dadas, uma das opções (I) a (IV), correspondente à forma das suas curvas de nível.

(I) Rectas (II) Elipses (III) Hipérboles (IV) Parábolas

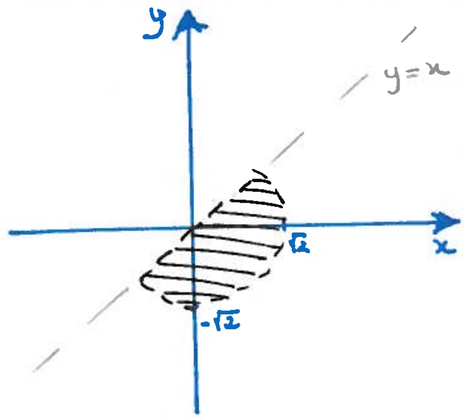
I $f(x, y) = -1 - x - y$

II $f(x, y) = e^{2x^2+y^2}$

III $f(x, y) = \log(2xy)$

IV $f(x, y) = x^2 - y$

[1.5] 6. Considere a função $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $f(x, y) = \dfrac{\log(2 - x^2 - y^2)}{\sqrt{x - y}}$. Indique o conjunto de pontos onde a função é contínua. Elabore um esboço do mesmo.



A função f é contínua em
$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < (\sqrt{2})^2 \wedge x > y\}$.

[2.0] 7. Considere a função $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $f(x, y) = \dfrac{x^2 + y^2}{x - y}$. Indique a derivada parcial de primeira ordem de f em ordem a x, em cada ponto do seu domínio.

Temos $f_x(x,y) = \dfrac{x^2 - 2xy - y^2}{(x-y)^2}$, para $(x,y) \in D$.

2ª Parte

Atenção: As respostas às perguntas seguintes devem ser cuidadosamente justificadas em folha(s) do caderno de prova, devidamente **identificada(s)**, com o nome e o número de aluno.

[5.0] 8. Designe por C a curva resultante da intersecção das superfícies de equação $x^2 + y^2 = 1$ e $y + z = 2$.

(a) Determine uma representação paramétrica da curva C.

(b) Indique uma equação da recta tangente à curva C no ponto $(1, 0, 2)$.

(c) Suponha que uma partícula se move no espaço ao longo da curva C. De acordo com a representação paramétrica indicada em (a), determine o(s) instante(s) em que a velocidade é mínima.

Nota: Nas alíneas (b) e (c), considere para C as equações paramétricas $x = 1 + \sin t$, $y = 1 - \cos t$, $z = 2\cos t$, caso não responda à alínea (a).

[5.0] 9. Considere a seguinte função definida em $\mathbb{R}^2$:

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{3x^2 \sin y}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}.$$

(a) Mostre que f é contínua em $(0, 0)$.

(b) Calcule as derivadas parciais de primeira ordem de f em $(0, 0)$.

(c) Estude o limite da função $g(x, y) = \dfrac{3x^2 \sin y}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}}$ em $(0, 0)$. Será f diferenciável em $(0, 0)$? Justifique.

2^a Parte

8(a) A curva C admite equações paramétricas

$$x = \cos t \quad , \quad y = \operatorname{sen} t \quad , \quad z = 2 - \operatorname{sen} t$$

com $t \in [0, 2\pi]$.

(b) De acordo com a representação paramétrica em (a) o gráfico da função vectorial $\vec{\sigma}(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t, 2 - \operatorname{sen} t)$, com $t \in [0, 2\pi]$ é a curva C, tendo-se $\vec{\sigma}(0) = (1, 0, 2)$.

Tem-se $\vec{\sigma}\,'(t) = (-\operatorname{sen} t, \cos t, -\cos t)$, $t \in [0, 2\pi]$,

pelo que $\vec{\sigma}\,'(0) = (0, 1, -1)$.

Assim, uma equação da recta tangente à curva C em $(1, 0, 2)$ é:

$$(x, y, z) = (1, 0, 2) + \lambda(0, 1, -1) \quad , \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

(c) A velocidade da partícula é dada por:

$$g(t) = \|\vec{\sigma}\,'(t)\| = \sqrt{\operatorname{sen}^2 t + \cos^2 t + \cos^2 t} = \sqrt{1 + \cos^2 t}$$

em cada instante $t \in [0, 2\pi]$. A velocidade é mínima quando $\cos t = 0$, ou seja, $t \in \left\{\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right\}$

9. (a) Como

$$\left| f(x,y) - 0 \right| \leq \left| \frac{3x^2 \operatorname{sen} y}{x^2+y^2} \right| = \frac{3x^2 |\operatorname{sen} y|}{x^2+y^2} \leq$$

$$\leq \frac{3(x^2+y^2)|\operatorname{sen} y|}{x^2+y^2} =$$

$$= 3|\operatorname{sen} y|$$

e $3|\operatorname{sen} y|$ tende para 0 quando (x,y) tende para $(0,0)$, então $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0 = f(0,0)$.

Consequentemente, a função f é contínua em $(0,0)$.

(b) Como $f(h,0) = 0$ e $f(0,h) = 0$, $\forall h \in \mathbb{R}$,

então $f_x(0,0) = 0$ e $f_y(0,0) = 0$.

(c) Ora $\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0) \\ y = mx}} g(x,y) = \lim_{x\to 0} \frac{3x^2 \operatorname{sen}(mx)}{(x^2+m^2x^2)^{3/2}} =$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{3x^2 \operatorname{sen}(mx)}{x^3(1+m^2)^{3/2}} = \lim_{x\to 0} \left[\frac{3m}{(1+m^2)^{3/2}} \cdot \frac{\operatorname{sen}(mx)}{mx} \right] = \frac{3m}{(1+m^2)^{3/2}}.$$

Logo, g não tem limite em $(0,0)$.

Como $\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{f(h,k) - f(0,0) - f_x(0,0).h - f_y(0,0).k}{\sqrt{h^2+k^2}} =$

$= \lim_{(h,k)\to(0,0)} g(h,k)$ não existe, concluímos que f não é diferenciável em $(0,0)$.