FACULDADE DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
UNIVERSIDADE NOVA DE LISBOA

Análise Matemática II *E*

Departamento de Matemática FCT-UNL
Segundo Teste – 20 de novembro de 2013
Duração: 1h30m

Nome:____ **Número:**____________

Nº Caderno:____________ **Total de folhas entregues:** ___

1ª Parte

[1.5] 1. Faça corresponder a cada uma das funções vectoriais ou equações paramétricas, uma das opções (I) a (V), correspondente à sua representação gráfica.

(I) Recta (II) Elipse (III) Parábola (IV) Circunferência (V) Hélice

____ $x = 2t + 1$, $y = t^2$, com $t \in \mathbb{R}$;

____ $\vec{\sigma}(t) = (3 + \sin t)\mathbf{i} + 2\cos t\mathbf{j}$, com $t \in [0, 2\pi]$;

____ $\vec{\sigma}(t) = (4t - 1)\mathbf{i} + (t + 2)\mathbf{j}$, com $t \in \mathbb{R}$;

____ $\vec{\sigma}(t) = (\cos(2t), 1, \sin(2t))$, com $t \in [0, \pi]$;

____ $\vec{\sigma}(t) = (-t, 2\cos t, 2\sin t)$, com $t \in \mathbb{R}$;

____ $x = 1 + t$, $y = 3 - 4t$, $z = -2 + 5t$, com $t \in \mathbb{R}$;

[1.0] 2. Indique o conjunto de pontos onde a função vectorial dada por $\vec{r}(t) = \frac{t-2}{t+2}\mathbf{i} + \sin t\mathbf{j} + \log(9 - t^2)\mathbf{k}$ é contínua.

____

[1.0] 3. Indique, caso exista(m), o(s) ponto(s) de intersecção entre o gráfico de $\vec{\sigma}(t) = (\sqrt{t}, 1 - 3t^2, 1 + t)$, para $t \in [0, +\infty[$, e a superfície de equação $y = 4x^2 + z^2$.

____

[1.5] 4. Determine o vector posição de uma partícula cujo vector velocidade é dado em função do tempo t ($t \geq 0$) por $\vec{v}(t) = 2t\mathbf{i} + \dfrac{1}{1 + t^2}\mathbf{j} + \sqrt{t}\mathbf{k}$, que no instante $t = 1$ se encontra em $\mathbf{i} + \mathbf{k}$.

____

[1.5] 5. Faça corresponder a cada uma das funções dadas, uma das opções (I) a (IV), correspondente à forma das suas curvas de nível.

(I) Rectas (II) Elipses (III) Hipérboles (IV) Parábolas

____ $f(x, y) = -1 - x - y$ ____ $f(x, y) = e^{2x^2 + y^2}$

____ $f(x, y) = \log(2xy)$ ____ $f(x, y) = x^2 - y$

[1.5] 6. Considere a função $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $f(x,y) = \dfrac{\log(2 - x^2 - y^2)}{\sqrt{x-y}}$. Indique o conjunto de pontos onde a função é contínua. Elabore um esboço do mesmo.

[2.0] 7. Considere a função $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $f(x,y) = \dfrac{x^2 + y^2}{x - y}$. Indique a derivada parcial de primeira ordem de f em ordem a x, em cada ponto do seu domínio.

2ª Parte

Atenção: As respostas às perguntas seguintes devem ser cuidadosamente justificadas em folha(s) do caderno de prova, devidamente **identificada(s)**, com o nome e o número de aluno.

[5.0] 8. Designe por $\mathcal{C}$ a curva resultante da intersecção das superfícies de equação $x^2 + y^2 = 1$ e $y + z = 2$.

(a) Determine uma representação paramétrica da curva $\mathcal{C}$.

(b) Indique uma equação da recta tangente à curva $\mathcal{C}$ no ponto $(1, 0, 2)$.

(c) Suponha que uma partícula se move no espaço ao longo da curva $\mathcal{C}$. De acordo com a representação paramétrica indicada em (a), determine o(s) instante(s) em que a velocidade é mínima.

Nota: Nas alíneas (b) e (c), considere para $\mathcal{C}$ as equações paramétricas $x = 1 + \sin t$, $y = 1 - \cos t$, $z = 2\cos t$, caso não responda à alínea (a).

[5.0] 9. Considere a seguinte função definida em $\mathbb{R}^2$:

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{3x^2 \sin y}{x^2 + y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}.$$

(a) Mostre que f é contínua em $(0,0)$.

(b) Calcule as derivadas parciais de primeira ordem de f em $(0,0)$.

(c) Estude o limite da função $g(x,y) = \dfrac{3x^2 \sin y}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}}$ em $(0,0)$. Será f diferenciável em $(0,0)$? Justifique.