FACULDADE DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
UNIVERSIDADE NOVA DE LISBOA

Análise Matemática II *E*

Departamento de Matemática FCT-UNL
Terceiro Teste – 18 de dezembro de 2013
Duração: 1h30m

Nome:____ **Número:**____________

Nº Caderno:____________ **Total de folhas entregues:** ___

1ª Parte

[1.5] 1. Considere funções f e g diferenciáveis e os valores na seguinte tabela:

	f	g	f_x	f_y
$(0,1)$	2	5	3	7
$(-1,1)$	5	2	6	4

Calcule:

(a) $g_u(0,1)$ sabendo que $g(u,v) = f(-1+\cos(u+\frac{\pi}{2}v), ve^u)$;

(b) $g_s(-1,1)$ sabendo que $g(r,s) = f(r^2s+r, \log(-ers))$.

[1.5] 2. Suponha que um objecto se encontra na posição $(1,1,\frac{\pi}{4})$ e pretende deslocar-se sobre a superfície correspondente ao gráfico da função $f(x,y) = \arctan(xy)$.

(a) Indique o declive que o objecto encontrará se se mover na direção paralela ao eixo dos x's e segundo o sentido positivo deste.

(b) Indique o declive que o objecto encontrará se se mover em direcção ao ponto $(x,y) = (0,2)$.

(c) Qual a direcção que o objecto deve seguir se pretender subir mais rapidamente?

[1.5] 3. Considere a função $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{y^2+xy^2}{\sqrt{x^2+y^2}}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$ cujo gradiente no ponto $(0,0)$ é $(0,0)$. Determine a derivada direcional $D_{\vec{u}}f(0,0)$, sendo $\vec{\mathbf{u}}$ o vector unitário $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$. Será f diferenciável em $(0,0)$? Justifique a resposta.

[1.5] 4. Determine uma equação do plano tangente ao gráfico da função $f(x,y) = xy^3 - 2yx + 2$ no ponto $P(2,1,0)$.

[2.0] 5. Considere o seguinte integral $\int_1^2 \int_0^{\log x} f(x,y)\,dydx$. Elabore um esboço da região de integração e inverta a ordem de integração.

[2.0] 6. Escreva um integral iterado que permita calcular a área da região do plano xOy limitada pelas parábolas de equação $y = 2x^2$ e $y = 1 + x^2$. (Não precisa de determinar o valor do integral.)

7. (**Pergunta bónus:** A resposta a esta pergunta é facultativa. A sua cotação é de 1.5 valores. O total da cotação obtida com as respostas às perguntas 1 a 7 - inclui pergunta bónus - não ultrapassará os 10 valores.)

Determine o declive da recta tangente à curva $(x^2 + y^2 - 2x)^2 = 4(x^2 + y^2)$ no ponto $(0,2)$.

2ª Parte

Atenção: As respostas às perguntas seguintes devem ser cuidadosamente justificadas em folha(s) do caderno de prova, devidamente **identificada(s)**, com o nome e o número de aluno.

[5.0] 8. (a) Determine os extremos relativos da função $f(x,y) = 4xy - 2x^2 - y^4$.

(b) Indique os extremos absolutos de $g(x,y) = xy$ no conjunto $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + 2y^2 = 1\}$.

[5.0] 9. (a) Efectuando uma mudança de variáveis para coordenadas cilíndricas calcule $\iiint_E e^z\,dV$, onde E é a região do primeiro octante limitada pelo parabolóide $z = 1 + x^2 + y^2$ e interior ao cilindro $x^2 + y^2 = 5$.

(b) Efectue uma mudança de variáveis de acordo com a transformação $T(u,v) = (x - y, x + y)$ para mostrar que $\iint_R (x-y)^2\,dA = \frac{8}{3}$, onde R é o paralelogramo de vértices $(0,0)$, $(1,1)$, $(2,0)$ e $(1,-1)$.