Um circuito com “muitos interruptores”

1.Para nos habituarmos a circuitos que gostam muito de estar sempre a mudar, vamos começar por considerar o seguinte circuito.

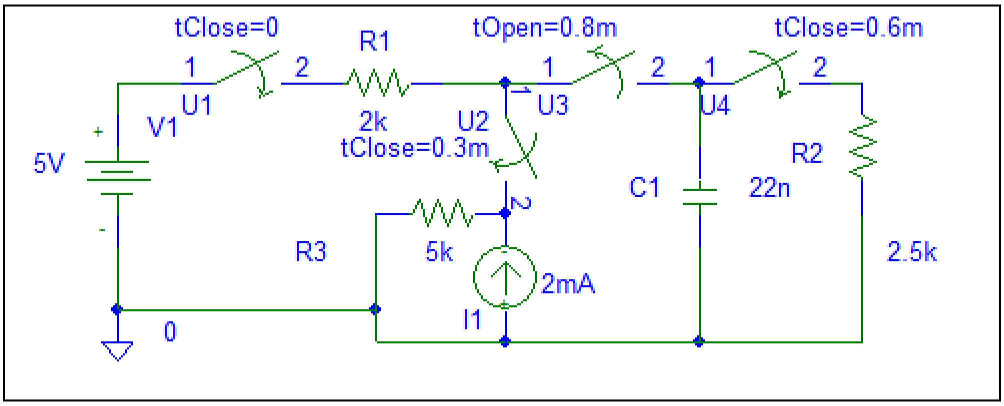
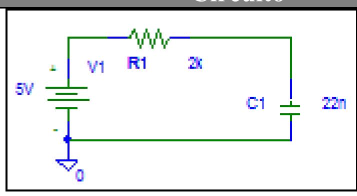
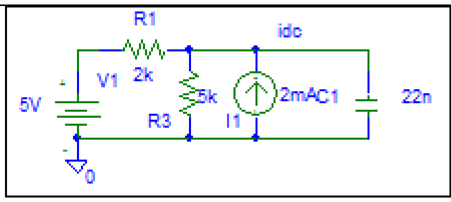
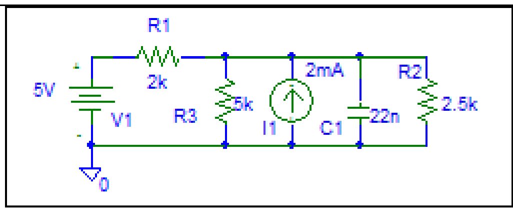
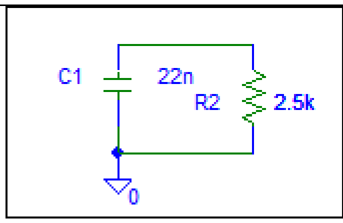


Figura 1: O nosso primeiro circuito

Como sempre, a primeira coisa que devemos fazer é “**olhar para o circuito**” e logo de seguida “**reparar no circuito**” (como diria o nosso Nobel da literatura).

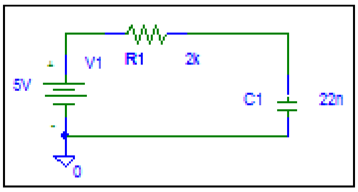
Depois de repararmos no circuito, compreendemos que ele se vai transformando ao longo do tempo, devido à comutação dos interruptores. Como há 4 interruptores vamos tendo sucessivamente os circuitos indicados na tabela seguinte:

Intervalo de tempo	Circuito
$0^{+} \leq t \leq 0.3^{-}ms$	 Circuito A
$0.3^{+}ms \leq t \leq 0.6^{-}ms$	 Circuito B
$0.6^{+}ms \leq t \leq 0.8^{-}ms$	 Circuito C
$0.8^{+}ms \leq t$	 Circuito D

Vamos agora analisar cada um dos circuitos, mas temos de ter em atenção que em cada transição a tensão aos terminais do condensador não pode sofrer descontinuidades. Vamos ainda considerar que o condensador estava inicialmente descarregado, i.e., $Vc(0^{+})=Vc(0^{-})=0$.

Circuito A

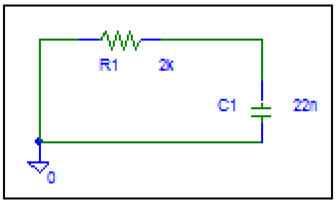
$0^{+} \leq t \leq 0.3^{-}ms$



Vamos considerar separadamente a resposta natural do circuito (que também se pode denominar resposta ao regime livre) e a resposta forçada.

A.1- Resposta natural

- Devida ao elemento reativo
- Anulamos a fonte



teremos:

$$R.i + V_C = 0 \qquad (1)$$

Ou

$$R.C\frac{dV_C}{dt} + V_C = 0 \qquad (2)$$

Sabemos que a solução de (2) será do tipo

$$Vc = A.e^{st} \qquad (3)$$

pelo, que iremos substituir em (2) e obtemos

$$R.C\frac{dAe^{st}}{dt} + Ae^{st} = 0 \qquad (4)$$

Logo

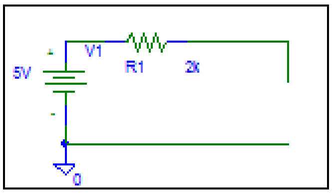
$$R.C.s.A.e^{st} + A.e^{st} = 0 \;\leftrightarrow\; A.e^{st}(R.C.s.+1) = 0 \leftrightarrow\; s = -\frac{1}{R.C}$$

Então já sabemos que, substituindo este valor de *s* em (3) se obtém

$$Vc = A.e^{-\frac{1}{R.C}t} \qquad (5)$$

A.2- Resposta Forçada

- Devida à fonte
- Anulamos o elemento reativo



Teremos

$$V_C = 5 \qquad (6)$$

A.3- Resposta Total

A resposta total obtém-se somando (5) com (6), resultando

$$Vc = A.e^{-\frac{1}{R.C}t} + 5 \qquad (7)$$

Para calcular o valor de A, temos de considerar as condições iniciais, i.e, Vc(0)=0

Temos

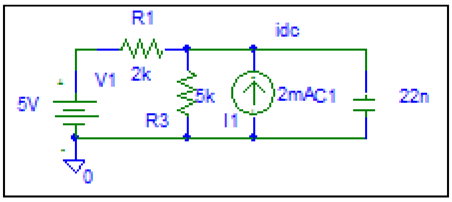
$$0 = A.e^{-\frac{1}{R.C}0} + 5 \;\leftrightarrow A = -5$$

Substituindo o valor obtido para *A* em (7) chegamos a

$$\boxed{Vc = -5.e^{-\frac{1}{R.C}t} + 5 \qquad (9)}$$

Circuito B

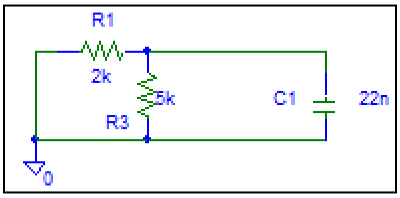
$$0.3^{+}ms \leq t \leq 0.6^{-}ms$$



Vamos considerar separadamente a resposta natural do circuito (que também se pode denominar resposta ao regime livre) e a resposta forçada.

B.1- Resposta natural

- Devida ao elemento reativo
- Anulamos as fontes



Temos duas hipóteses: Ou analisamos o circuito como está (p.ex. com método de nós), ou substituímos pela resistência equivalente

R_{eq}=1.43 KΩ

teremos:

$Req.i + V_C = 0$ (10)

Ou

$Req.C\frac{dV_C}{dt} + V_C = 0$ (11)

Sabemos que a solução de (11) será do tipo

$Vc = A.e^{st}$ (3)

pelo, que iremos substituir em (11) e obtemos

$Req.C\frac{dAe^{st}}{dt} + Ae^{st} = 0$ (12)

Logo

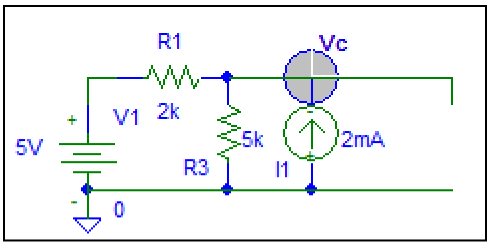
$$Req.C.s.A.e^{st} + A.e^{st} = 0 \leftrightarrow A.e^{st}(Req.C.s.+1) = 0 \leftrightarrow s = -\frac{1}{Req.C}$$

Então já sabemos que, substituindo este valor de *s* em (12) se obtém

$Vc = A.e^{-\frac{1}{Req.C}t}$ (13)

B.2- Resposta Forçada

- Devida às fontes
- Anulamos o elemento reativo



Teremos de calcular a tensão Vc

$-2 + \frac{V_C}{R_3} + \frac{V_C - V_1}{R_1} = 0$ (13)

Logo

V_c= 6.42 V

B.3- Resposta Total

A resposta total obtém-se somando (13) com (14), resultando

$Vc = A.e^{-\frac{1}{Req.C}t} + 6.42$ (15)

Para calcular o valor de A, temos de considerar as condições iniciais, i.e, Vc(0.3^{-}ms), que deverá ser o que se tinha no fim do intervalo anterior,i.e.,

$Vc(0.3^{-}\,ms) = -5.e^{-\frac{1}{R.C}*0.3*10^{-3}} + 5$ ou $Vc(0.3^{-}\,ms) = 5$

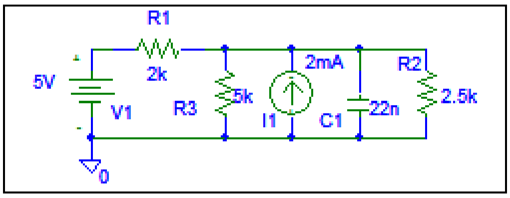
Temos
$5 = A.e^{0} + 6.42 \;\leftrightarrow A = -1.42$

Substituindo o valor obtido para A em (15) chegamos a

$$\boxed{Vc = -1.42.e^{-\frac{1}{Req.C}t} + 6.42 \qquad (17)}$$

Circuito C

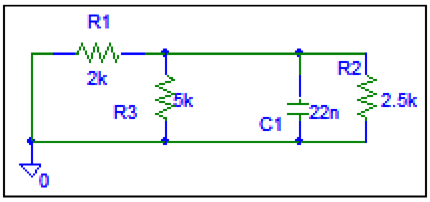
$0.6^{+}ms \leq t \leq 0.8^{-}ms$



Vamos considerar separadamente a resposta natural do circuito (que também se pode denominar resposta ao regime livre) e a resposta forçada.

C.1- Resposta natural

- Devida ao elemento reativo
- Anulamos as fontes



Temos duas hipóteses: Ou analisamos o circuito como está (p.ex. com método de nós), ou substituímos pela resistência equivalente

R_{eq2}=0.91 KΩ

teremos:
$Req2.i + V_C = 0 \qquad (18)$

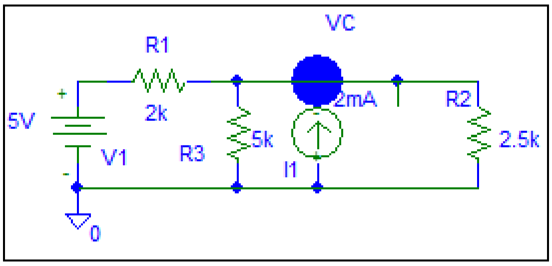
Ou
$Req2.C\frac{dV_C}{dt} + V_C = 0 \qquad (19)$

Sabemos que a solução de (19) será do tipo
$Vc = A.e^{st} \qquad (3)$
pelo, que iremos substituir em (19) e obtemos
$Req2.C\frac{dAe^{st}}{dt} + Ae^{st} = 0$ (20)
Logo
$Req2.C.s.A.e^{st} + A.e^{st} = 0 \;\leftrightarrow\; A.e^{st}(Req2.C.s.+1) = 0 \leftrightarrow\; s = -\dfrac{1}{Req2.C}$
Então já sabemos que, substituindo este valor de s em (20) se obtém

$Vc = A.e^{-\frac{1}{Req2.C}t} \qquad (21)$

C.2- Resposta Forçada

- Devida às fontes



- Anulamos o elemento reativo

Teremos de calcular a tensão Vc

$$-2+\frac{V_C}{R_3}+\frac{V_C-V_1}{R_1}+\frac{V_C}{R_2}=0 \qquad (22)$$

Logo

V_c= 4.01V

C.3- Resposta Total

A resposta total obtém-se somando (21) com (22), resultando

$Vc = A.e^{-\frac{1}{Req2.C}t} + 4.01$ (23)

Para calcular o valor de A, temos de considerar as condições iniciais, i.e, Vc(0.6⁻ms), que deverá ser o que se tinha no fim do intervalo anterior,i.e. ao fim de 0.3ms do 2º intervalo,

$Vc(0.6^{-}\,ms) = -1.42.e^{-\frac{1}{Req.C}*0.3*10^{-3}} + 6.42$ ou $Vc(0.3^{-}\,ms) = 6.42$

Temos

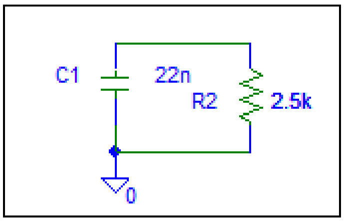
$6.42 = A.e^{0} + 4.01 \;\leftrightarrow\; A = 2.41$

Substituindo o valor obtido para *A* em (23) chegamos a

$$\boxed{Vc = 2.41.e^{-\frac{1}{Req2.C}t} + 4.01 \qquad (24)}$$

Circuito D

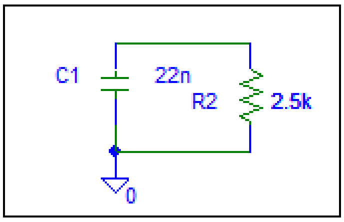
$t \geq 0.8^{-}ms$



Vamos considerar separadamente a resposta natural do circuito (que também se pode denominar resposta ao regime livre) e a resposta forçada. Mas neste caso não há fontes, logo a resposta forçada é nula e basta calcular a resposta natural do circuito

D.1- Resposta natural

- Devida ao elemento reativo



teremos:

$R2.i + V_C = 0$ (25)

Ou

$R2.C\frac{dV_C}{dt} + V_C = 0$ (26)

Sabemos que a solução de (26) será do tipo

$Vc = A.e^{st}$

pelo, que iremos substituir em (26) e obtemos

$R2.C\frac{dAe^{st}}{dt} + Ae^{st} = 0$ (27)

Logo

$$R2.C.s.A.e^{st} + A.e^{st} = 0 \;\leftrightarrow\; A.e^{st}(R2.C.s.+1) = 0 \leftrightarrow\; s = -\frac{1}{R2.C}$$

Então já sabemos que, substituindo este valor de *s* em (20) se obtém

$$Vc = A.e^{-\frac{1}{R2.C}t} \qquad (28)$$

D.3- Resposta Total
Como não há fontes a resposta total é dada por (28)

Para calcular o valor de A, temos de considerar as condições iniciais, i.e, $Vc(0.8^- ms)$, que deverá ser o que se tinha no fim do intervalo anterior,i.e.ao fim de 0.2ms do intervalo anterior,

$Vc(0.8^-\ ms) = 2.41.e^{-\frac{1}{R.C}*0.2*10^{-3}} + 4.01$ ou $Vc(0.8^-\ ms) = 4.01$

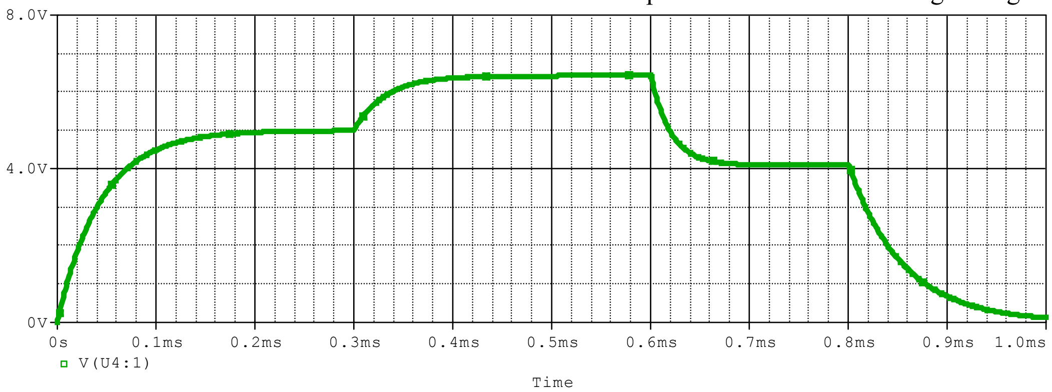
Temos
$4.01 = A.e^0 \;\leftrightarrow A = 4.01$

Substituindo o valor obtido para *A* em (23) chegamos a

$$\boxed{Vc = 4.01.e^{-\frac{1}{R2.C}t} \qquad (24)}$$

Conclusão :

A tensão aos terminais do condensador tem um andamento temporal como se mostra na figura seguinte:



Agora , é a vossa vez…..

Calculem, em cada intervalo quanto tempo é necessário para que a tensão aos terminais do condensador atinja o regime forçado, e verifquem se está de acordo com o gráfico …

Mais um circuito com "muitos interruptores" e uma fonte DEPENDENTE

Para nos familiarizarmos com interruptores e bobines, vamos considerar o seguinte circuito.

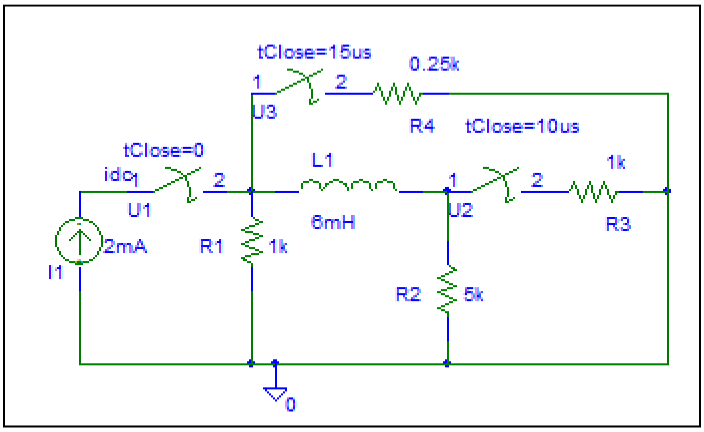
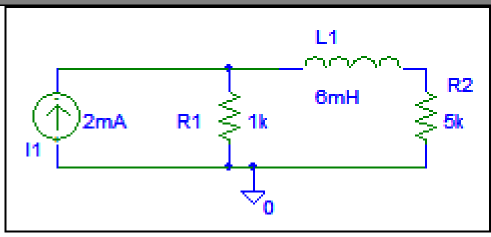
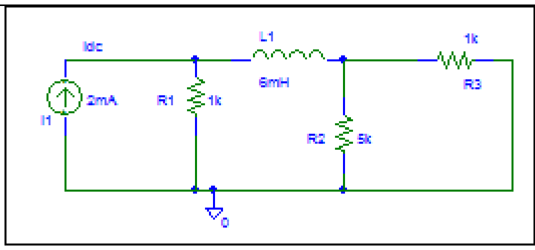
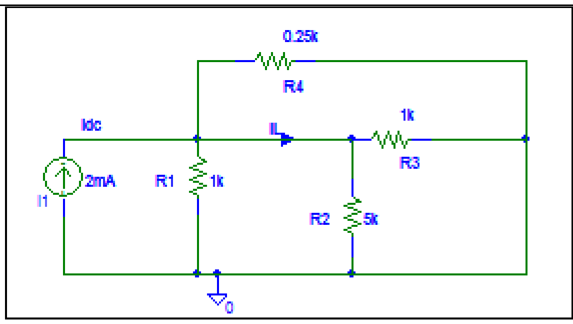


Figura2: O nosso segundo circuito.

Como sempre, a primeira coisa que devemos fazer é "**olhar para o circuito**" e logo de seguida "**reparar no circuito**".

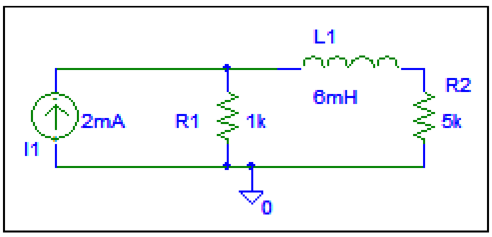
Depois de repararmos no circuito, compreendemos que ele se vai transformando ao longo do tempo, devido à comutação dos interruptores. Como há 3 interruptores vamos tendo sucessivamente os circuitos indicados na tabela seguinte:

Intervalo de tempo	Circuito
$0^+ \leq t \leq 10^- \mu s$	 Circuito A
$10^{\mp} \mu s \leq t \leq 13^- \mu s$	 Circuito B
$t \geq 13^+ \mu s$	 Circuito C

Vamos agora analisar cada um dos circuitos, mas temos de ter em atenção que em cada transição a tensão aos terminais do condensador não pode sofrer descontinuidades. Vamos ainda considerar que a energia inicial na bobine era nula, i.e., i condensador estava inicialmente descarregado, i.e., $i_l(0^+)=i_l(0^-)=0$.

Circuito A

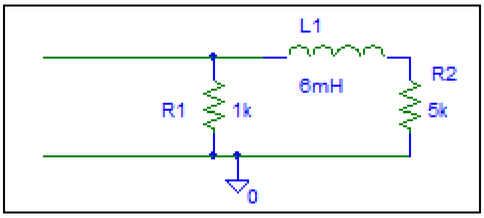
$0^+ \leq t \leq 10^- \mu s$



Vamos considerar separadamente a resposta natural do circuito (que também se pode denominar resposta ao regime livre) e a resposta forçada.

A.1- Resposta natural

- Devida ao elemento reactivo
- Anulamos a fonte



teremos:

$$R_1.i + L.\frac{di}{dt} + R_2.i = 0 \qquad (1)$$

Ou

$$(R_1 + R_2).i + L.\frac{di}{dt} = 0 \qquad (2)$$

Sabemos que a solução de (2) será do tipo

$$i = A.e^{st} \qquad (3)$$

pelo, que iremos substituir em (2) e obtemos

$$(R_1 + R_2).A.e^{st} + L.\frac{dA.e^{st}}{dt} = 0 \qquad (4)$$

Logo

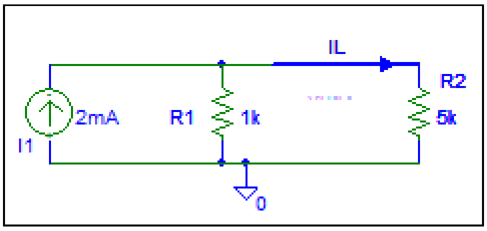
$$(R_1 + R_2).A.e^{st} + L.s.A.e^{st} = 0 \leftrightarrow s = -\frac{(R_1+R_2)}{L}$$

Então já sabemos que, substituindo este valor de *s* em (3) se obtém

$$i = A.e^{-\frac{(R_1+R_2)}{L}t} \quad (5)$$

A.2- Resposta Forçada

- Devida à fonte
- Anulamos o elemento reativo



Teremos

$$i = \frac{R_1}{R_1+R_2}.I1 \leftrightarrow i = 0.3333mA \qquad (6)$$

A.3- Resposta Total

A resposta total obtém-se somando (5) com (6), resultando

$$i = A.e^{-\frac{R_1+R_2}{L}t} + 0.333 \quad (7)$$

Para calcular o valor de A, temos de considerar as condições iniciais, i.e, i(0)=0

Temos

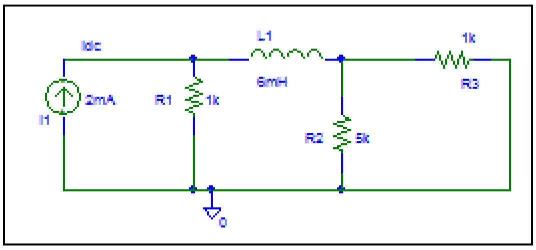
$$0 = A.e^{-\frac{R_1+R_2}{L}t} + 0.333 \leftrightarrow A = -0.333$$

Substituindo o valor obtido para *A* em (7) chegamos a

$$\boxed{i = -0.333.e^{-\frac{R_1+R_2}{L}t} + 0.333 \qquad (9)}$$

Circuito B

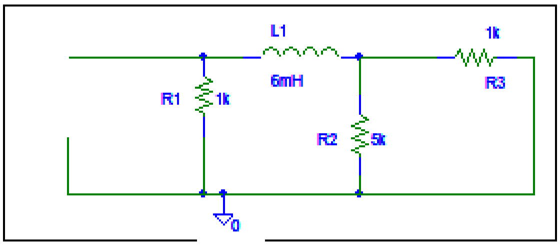
$$10^{\mp}\mu s \le t \le 15^{-}\mu s$$



Vamos considerar separadamente a resposta natural do circuito (que também se pode denominar resposta ao regime livre) e a resposta forçada.

B.1- Resposta natural

- Devida ao elemento reativo
- Anulamos as fontes independentes



Temos duas hipóteses: Ou analisamos o circuito como está (p.ex. com método de nós), ou substituímos R2//R3 pela resistência equivalente Req=833.3 Ω

Vamos considerar o segundo caso e teremos

$$R_1 i_L + L\frac{di_L}{dt} + R_{eq} i_L = 0 \iff (R_1 + R_{eq}) i_L + L\frac{di_L}{dt} i_L = 0 \qquad (10)$$

Sabemos que a solução de (10) será do tipo

$$i_L = A.e^{st} \qquad (11)$$

logo

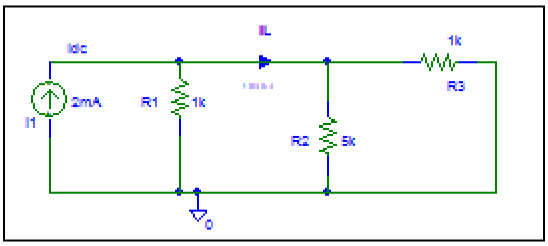
$$L.s.A.e^{st} + A.(R_1 + R_{eq}).e^{st} = 0 \leftrightarrow A.e^{st}\left(L.s + (R_1 + R_{eq})\right) = 0 \leftrightarrow s = -\frac{(R_1 + R_{eq})}{L} \qquad (12)$$

Então já sabemos que, substituindo este valor de *s* em (11) se obtém

$$i_L = A.e^{-\frac{(R_1 + R_{eq})}{L}t} \qquad (13)$$

B.2- Resposta Forçada

- Devida às fontes
- Anulamos o elemento reativo



Por divisor de corrente teremos, sendo R_{eq}=R2//R3

Logo

$$i_L = +\frac{R_1}{R_{eq} + R_1} I_1 \qquad (13)$$

Logo

i_L=1.09mA (14)

B.3- Resposta Total

A resposta total obtém-se somando (13) com (14), resultando

$$i_L = A.e^{-\frac{(R_1+R_{eq})}{L}t} + 1.09 \qquad (15)$$

Para calcular o valor de A, temos de considerar as condições iniciais, i.e, $i_L(10^{-}\mu s)$, que deverá ser o que se tinha no fim do intervalo anterior ,i.e.,

$$i(10\mu s) = -0.333.e^{-\frac{R_1+R_2}{L}.10^{-6}} + 0.333 \quad \text{ou } i(10\mu) = 0.333mA$$

Temos

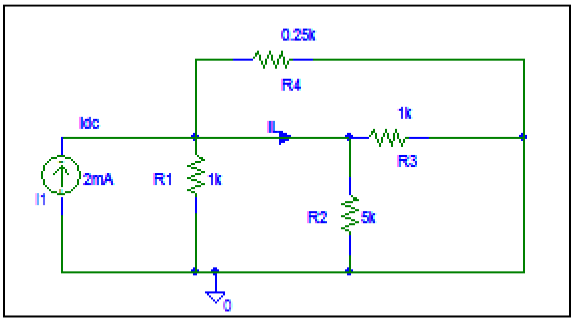
$$0.333 = A.e^{0} + 1.09 \leftrightarrow A = -0.757$$

Substituindo o valor obtido para *A* em (15) chegamos a

$$\boxed{i_L = -0.757x.e^{-\frac{(R_1+R_{eq})}{L}t} + 1.09 \ (17)}$$

Circuito C

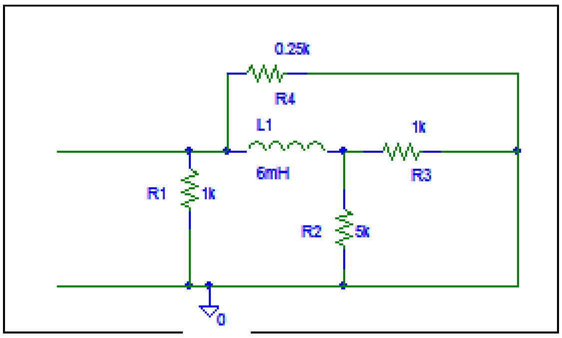
$t \geq 13^{+}\mu s$



Vamos considerar separadamente a resposta natural do circuito (que também se pode denominar resposta ao regime livre) e a resposta forçada.

C.1- Resposta natural

- Devida ao elemento reativo
- Anulamos as fontes independentes



Neste circuito

Neste circuito R4 e R1 estão em paralelo logo, considerando Req2=R4//R1 será Req2=0.2KΩ

E teremos

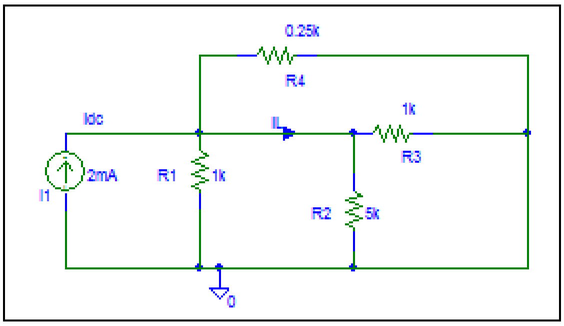
$$R_{eq2}i_L + L\frac{di_L}{dt} + R_{eq}i_L = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (R_{eq2} + R_{eq})i_L + L\frac{di_L}{dt}i_L = 0 \quad (18)$$

Sabemos que a solução de (18) será do tipo

$i_L = A.e^{st}$
logo
$L.s.A.e^{st} + A.(R_{eq2} + R_{eq}).e^{st} = 0 \;\leftrightarrow\; A.e^{st}\left(L.s + (R_{eq2} + R_{eq})\right) = 0 \leftrightarrow \; s = -\frac{(R_{eq2} + R_{eq})}{L}$ (19)
Então já sabemos que, substituindo este valor de *s* em (18) se obtém
$i_L = A.e^{-\frac{(R_1 + R_{eq})}{L}t}$ (20)

C.2- Resposta Forçada

- Devida às fontes
- Anulamos o elemento reativo



Obtém-se, tendo em atenção que Req2=R4//R1=0.2KΩ

$i_L = +\frac{R_{eq2}}{R_{eq}+R_{eq2}} I_1$
Logo
$i_L = 0.4333mA$

C.3- Resposta Total

A resposta total obtém-se somando (21) com (20), resultando
$i_L = A.e^{-\frac{(R_1 + R_{eq})}{L}t} + 0.4333$ (23)

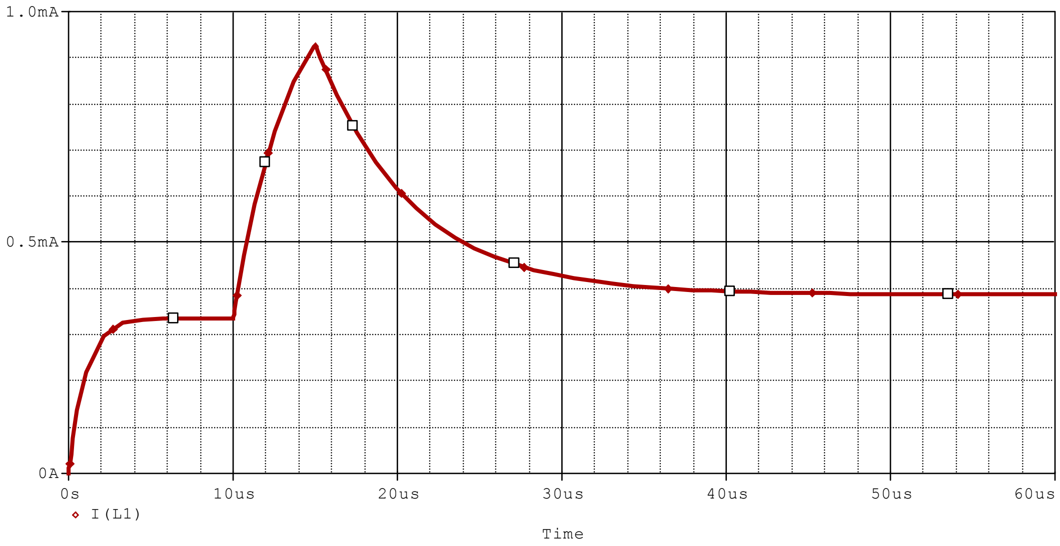
Para calcular o valor de A, temos de considerar as condições iniciais, i.e, $i_L(13^{-}\mu s)$, que deverá ser o que se tinha no fim do intervalo anterior ,i.e., mas ao fim de 3 μs deste intervalo
$i_L(3\mu s) = -0.757x.e^{-\frac{(R_1 + R_{eq})}{L}3x10^{-6}} + 1.09$ $\quad i_L(3\mu s) = .787$
Temos
$.787 = A.e^0 + 0.433 \;\leftrightarrow\; A = .354$

Substituindo o valor obtido para *A* em (23) chegamos a

$$\boxed{i_L = 0.354xe^{-\frac{(R_1 + R_{eq})}{L}t} + 0.4333 \;\; (24)}$$

Conclusão :

A corrente que atravessa a bobina tem um andamento temporal como se mostra na figura seguinte:



Agora , é a vossa vez…..

Calculem, para em cada intervalo quanto tempo é necessário para que a corrente na bobine atinja o regime forçado, e verifquem se está de acordo com o gráfico …