Transformações Geométricas 2D

Sistemas Gráficos/

Computação Gráfica e Interfaces

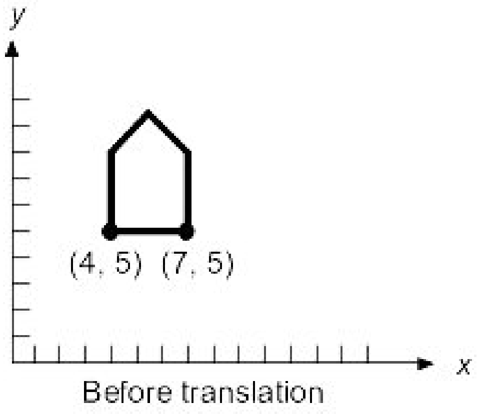
Transformações Geométricas 2D

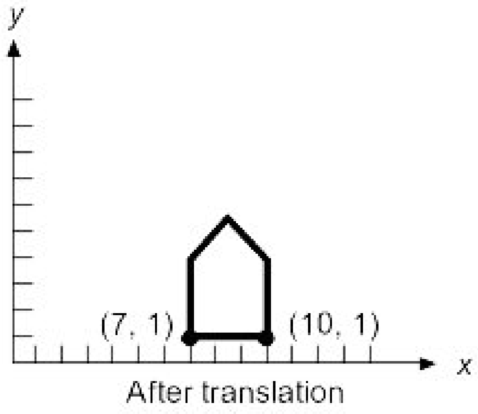
As transformações geométricas são essenciais na computação gráfica para posicionar, mudar a orientação e escalar objectos na cena criada. O movimento é também implementado por variar os parâmetros de transformação ao longo do tempo.

Transformações:

- Translação
- Escalamento
- Rotação

Translação





$$\begin{cases} x_T = x + T_x \\ y_T = y + T_y \end{cases}$$

Vértices: (4,5) e (7,5)

$T_x = 3 \quad T_y = -4$

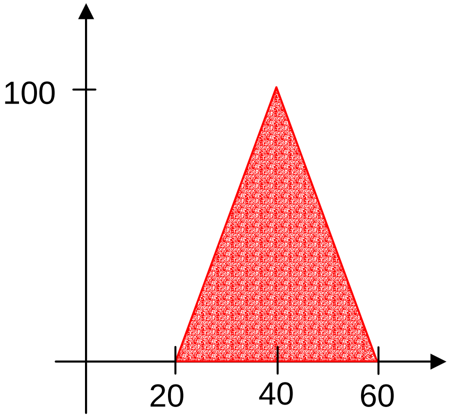
O par de translação denomina-se por *vector de translação.* A cada vértice é aplicado um deslocamento **T**:

$$\begin{bmatrix} x_T \\ y_T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} T_x \\ T_y \end{bmatrix}$$

Na forma de produto matricial:

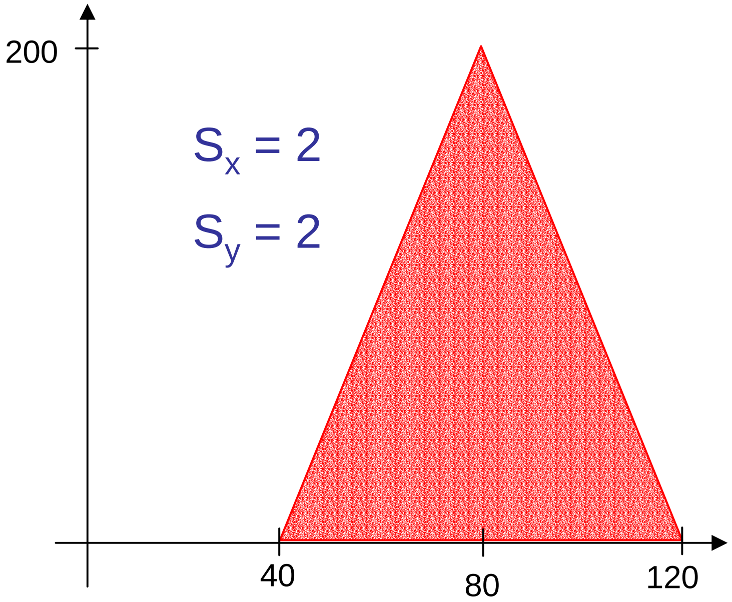
$$\begin{bmatrix} x_T \\ y_T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & T_x \\ 0 & 1 & T_y \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

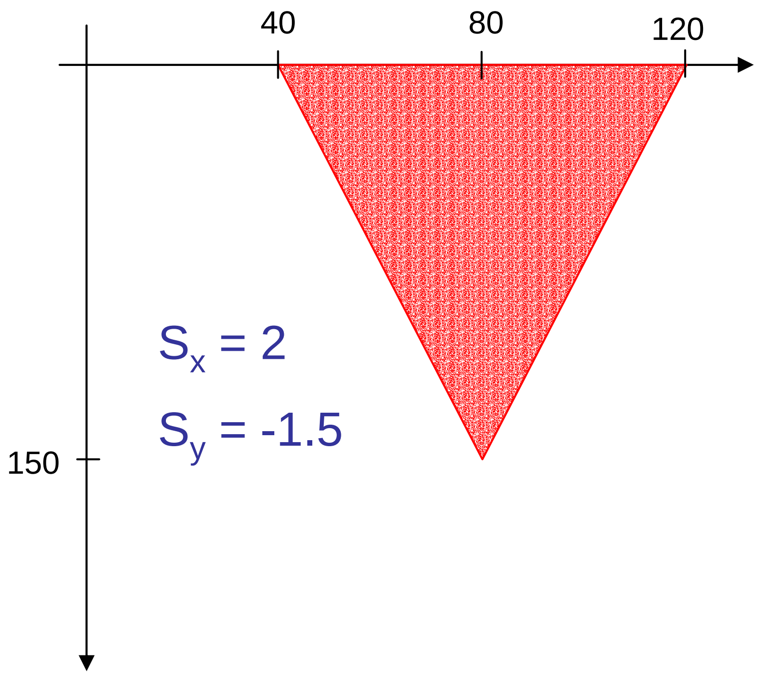
Escalamento



$$\begin{cases} x_T = x * S_x \\ y_T = y * S_y \end{cases}$$

Em relação à origem.





Escalamento

Na forma matricial:

$$\begin{bmatrix} x_T \\ y_T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_x & 0 \\ 0 & s_y \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

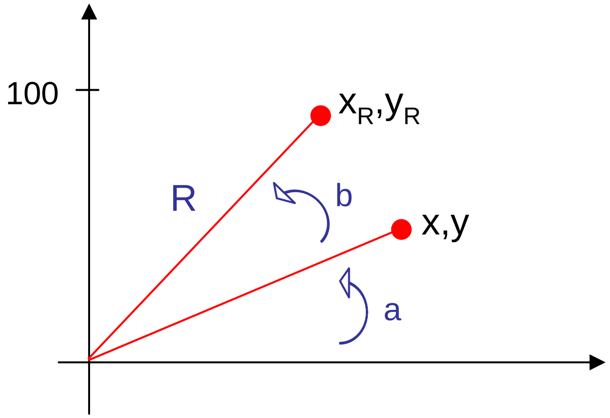
Factor de escala:

>1 aumenta o objecto

<1 reduz o objecto

$s_x=s_y$ factor de escala uniforme → não distorce o objecto

Rotação

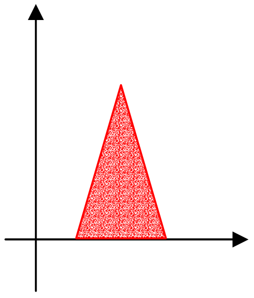


$$\begin{cases} x = R.\cos(a) \\ y = R.\mathrm{sen}(a) \end{cases}$$

Em torno da origem.

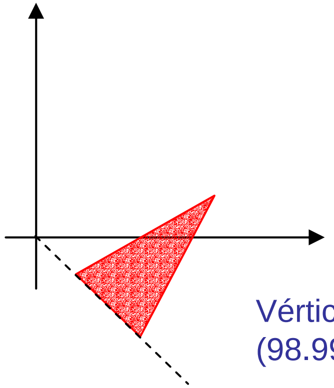
$$\begin{cases} x_R = R.\cos(a+b) = R.\cos(a).\cos(b) - R.\mathrm{sen}(a).\mathrm{sen}(b) = x.\cos(b) - y.\mathrm{sen}(b) \\ y_R = R.\mathrm{sen}(a+b) = R.\mathrm{sen}(b).\cos(a) + R.\mathrm{sen}(a).\cos(b) = x.\mathrm{sen}(b) + y.\cos(b) \end{cases}$$

Obtém-se a nova posição em função da anterior e do ângulo relativo de rotação.



Vértices: (20,0), (60,0), (40,100)

Rotação de -45º



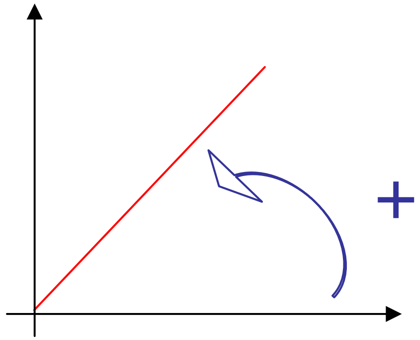
Vértices: (14.14, -14.14), (42.43, -42.43), (98.99, 42.43)

Rotação

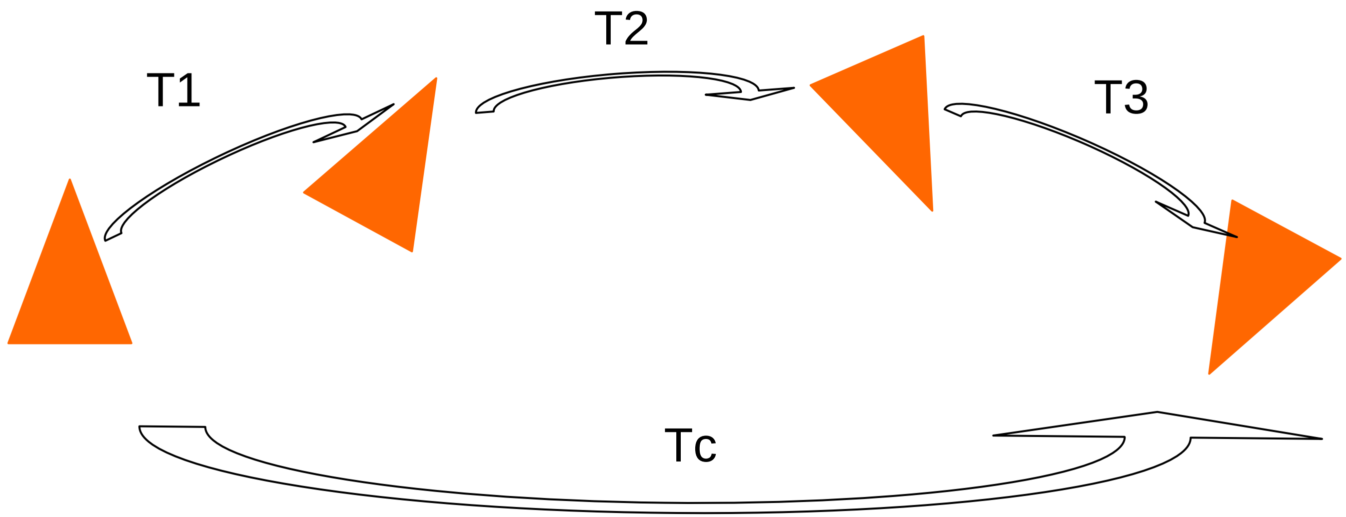
Na forma matricial:

$$\begin{bmatrix} x_R \\ y_R \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(b) & -sen(b) \\ sen(b) & \cos(b) \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Nota: *b* positivo no sentido contrário ao movimento dos ponteiros do relógio.



Composição de Transformações

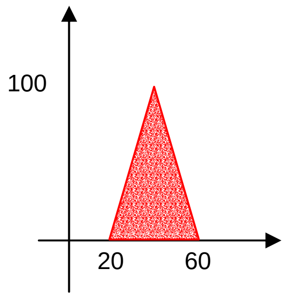


A aplicação de uma sequência de operações

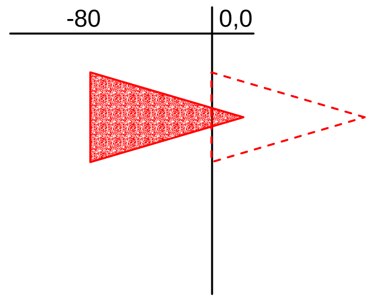
=

1 única transformação

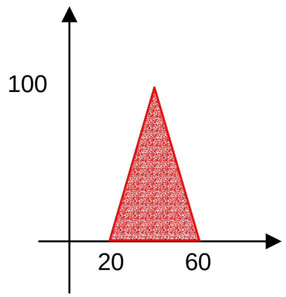
Composição de Transformações



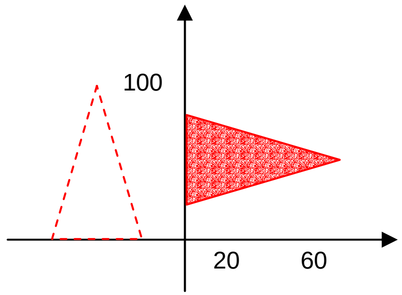
Situação inicial	Após rotação	Após translação
(20,0)	(0,-20)	(-80,-20)
(60,0)	(0,-60)	(-80,-60)
(40,100)	(100,-40)	(20,-40)
	a = - 90º	Tx=-80, Ty=0



Trocando as transformações:



Situação inicial	Após translação	Após rotação
(20,0)	(-60,0)	(0,60)
(60,0)	(-20,0)	(0,20)
(40,100)	(-40,100)	(100,40)
	Tx=-80, Ty=0	a = - 90º



Conclusão: a aplicação das transformações não é comutativa

Coordenadas homogéneas

A sequência anterior, rotação seguida de translação, aplicada a cada vértice pode ser escrita como:

1º
$$\begin{bmatrix} x_{R1} \\ y_{R1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(a) & -sen(a) \\ sen(a) & \cos(a) \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

2º
$$\begin{bmatrix} x_{R2} \\ y_{R2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & T_x \\ 0 & 1 & T_y \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x_{R1} \\ y_{R1} \\ 1 \end{bmatrix}$$

Se as matrizes que representam as transformações fossem da mesma dimensão poder-se-íam combinar.

No entanto, as transformações anteriores podem também ser escritas como (forma homogénea):

$$\begin{bmatrix} x_{R1} \\ y_{R1} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(a) & -sen(a) & 0 \\ sen(a) & \cos(a) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} = R(a) . \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_{R2} \\ y_{R2} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & T_x \\ 0 & 1 & T_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x_{R1} \\ y_{R1} \\ 1 \end{bmatrix} = T(T_x, T_y) . \begin{bmatrix} x_{R1} \\ y_{R1} \\ 1 \end{bmatrix}$$

Podemos então escrever:

$$\begin{bmatrix} x_{R2} \\ y_{R2} \\ 1 \end{bmatrix} = T(T_x, T_y) . R(a) . \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

O produto de matrizes é:
- **Associativo**
- **Em geral Não comutativo**

$$T(T_x, T_y) . R(a) \neq R(a) . T(T_x, T_y)$$

Coordenadas homogéneas - resumo

Matriz de Rotação

$$\begin{bmatrix} \cos(a) & -sen(a) & 0 \\ sen(a) & \cos(a) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = R(a)$$

Matriz de Translação

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & T_x \\ 0 & 1 & T_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = T(T_x, T_y)$$

Matriz de Escalamento

$$\begin{bmatrix} s_x & 0 & 0 \\ 0 & s_y & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = S(s_x, s_y)$$

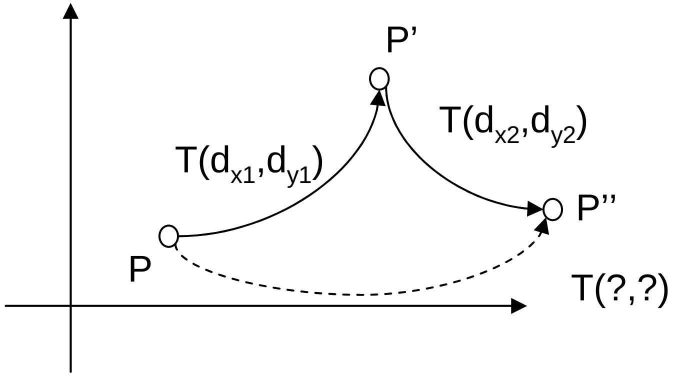
Em coordenadas homogéneas um objecto de *n* dimensões é representado num espaço a *n+1* dimensões.

(x,y) → (x.h, y.h, h)

2D 3D

Consideramos h=1

Transformações - Exemplos



P'= T(d_{x1},d_{y1})*P

P''= T(d_{x2},d_{y2})*P'

P''= T(d_{x2},d_{y2})*T(d_{x1},d_{y1})*P

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & d_{x2} \\ 0 & 1 & d_{y2} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 1 & 0 & d_{x1} \\ 0 & 1 & d_{y1} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & d_{x2}+d_{x1} \\ 0 & 1 & d_{y2}+d_{y1} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$T(d_{x2},d_{y2})*T(d_{x1},d_{y1})=T(d_{x1}+d_{x2}, d_{y1}+d_{y2})$

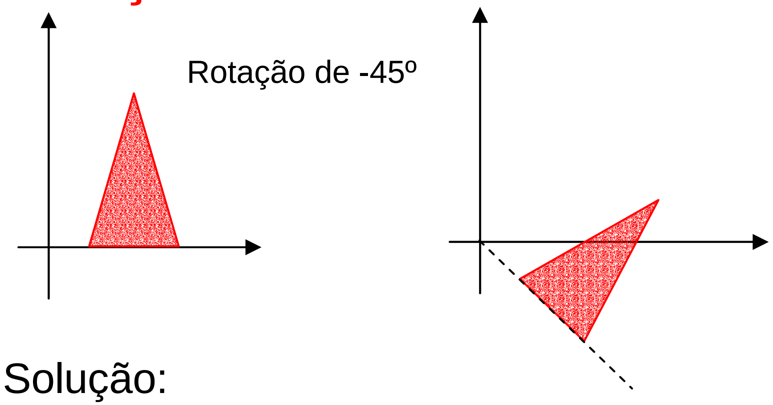
Verificar que:

$S(s_{x2},s_{y2})*S(s_{x1},s_{y1})=S(s_{x1}*s_{x2}, s_{y1}*s_{y2})$

$R(a_2)*R(a_1) = R(a_2+a_1)$

Transformações relativas a um ponto arbitrário (pivot)

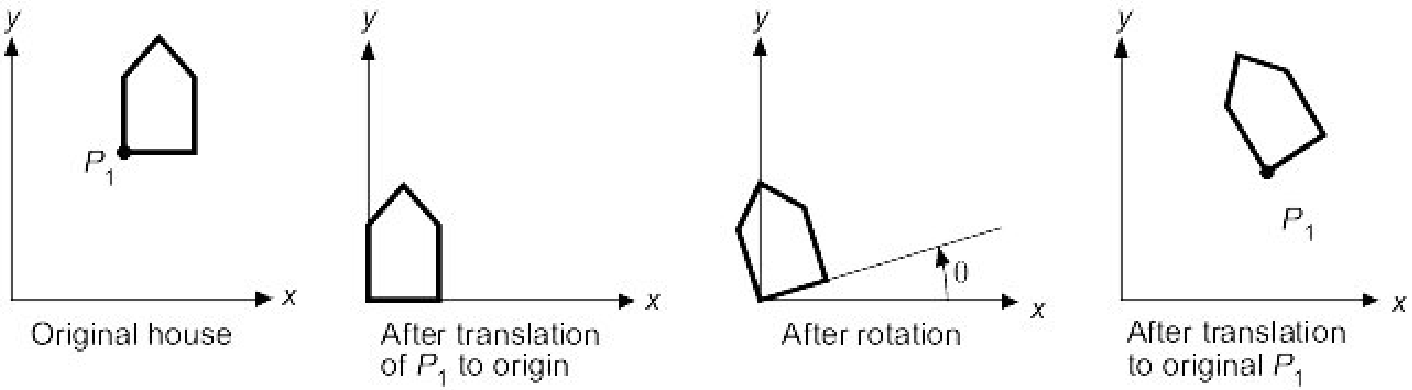
Rotação



A rotação desloca os objectos em torno da origem.

Solução:

- Fazer a translação do objecto de modo que o ponto *pivot* coincida com a origem
- Rodar o objecto em torno da origem
- Fazer a translação o objecto de modo que o ponto *pivot* volte à posição inicial (inversa da primeira)



Transformações relativas a um ponto arbitrário (pivot)

Matriz de transformação

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & d_x \\ 0 & 1 & d_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} \cos(a) & -sen(a) & 0 \\ sen(a) & \cos(a) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 1 & 0 & -d_x \\ 0 & 1 & -d_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(a) & -sen(a) & d_x(1-\cos(a)) + d_y sen(a)) \\ sen(a) & \cos(a) & d_y(1-\cos(a)) - d_x sen(a)) \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$T(d_x, d_y).R(a).T(-d_x, -d_y)$$

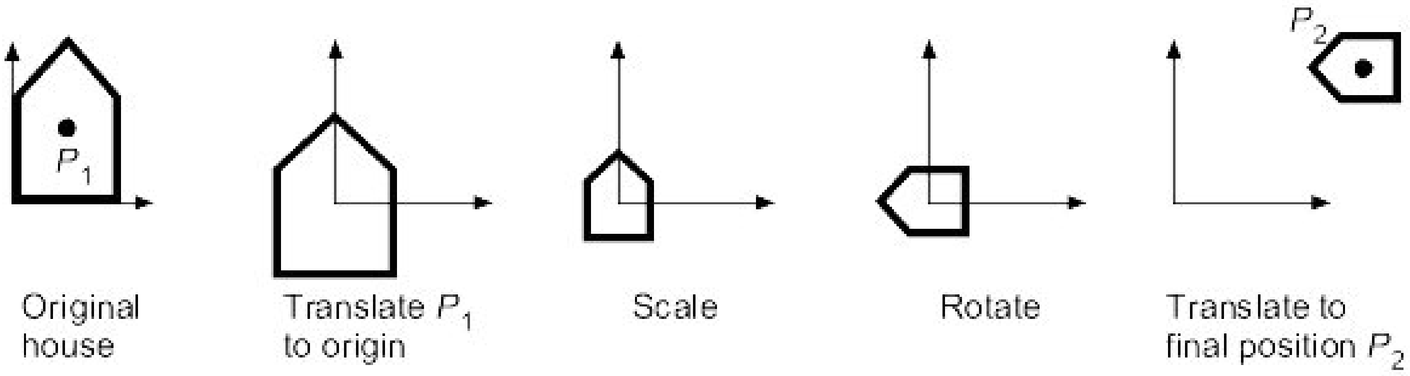
Escalamento

- Fazer a translação do objecto de modo que o ponto *pivot* coincida com a origem
- Escalar o objecto
- Fazer a translação o objecto de modo que o ponto *pivot* volte à posição inicial (inversa da primeira)

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & d_x \\ 0 & 1 & d_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} s_x & 0 & 0 \\ 0 & s_y & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 1 & 0 & -d_x \\ 0 & 1 & -d_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_x & 0 & d_x(1-s_x) \\ 0 & s_y & d_y(1-s_y) \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = T(d_x, d_y).S(s_x, s_y).T(-d_x, -d_y)$$

Exercício

Determinar a matriz de transformação para:



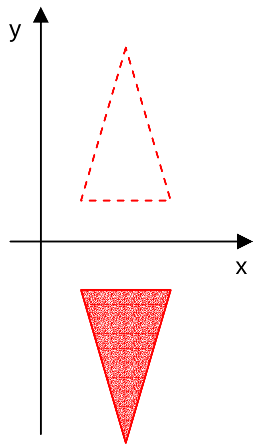
T(-x1,-y1) S(0.5,0.5) R(90) T(x2,y2)

Se P_1=(1,2) e P_2=(3,3) determine a matriz de transformação equivalente.

Outras transformações

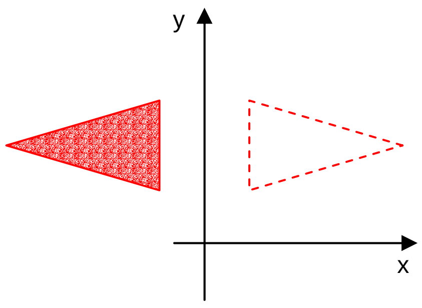
Reflexão

Em relação ao **eixo *x*** corresponde a uma rotação de 180º no espaço 3D em torno do eixo de reflexão, o que se traduz num escalamento S(1,-1):



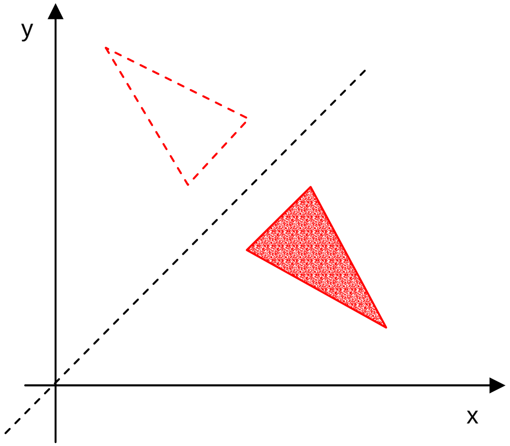
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Em relação ao **eixo *y*:** $\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$



Outras transformações

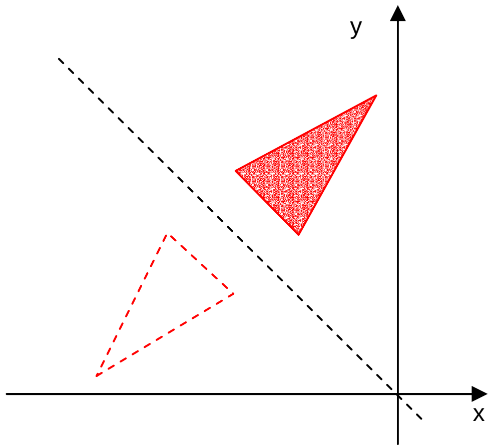
Reflexão em relação à linha y=x



$$R(45).S(1,-1).R(-45) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Reflexão em relação à linha y=-x

$$R(45).S(-1,1).R(-45) = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



Transformações Inversas

Se uma transformação, possivelmente composta, é dada por uma matriz *M* de dimensões 3x3, então a transformação inversa que coloca o objecto na sua posição inicial (ou seja sem transformação) é dada por M^{-1}.

Uma vez que *M* representa uma ou mais transformações, a matriz inversa deverá existir.

$$M.M^{-1} = I$$

Para algumas transformações é fácil encontrar a matriz inversa:

Translação:

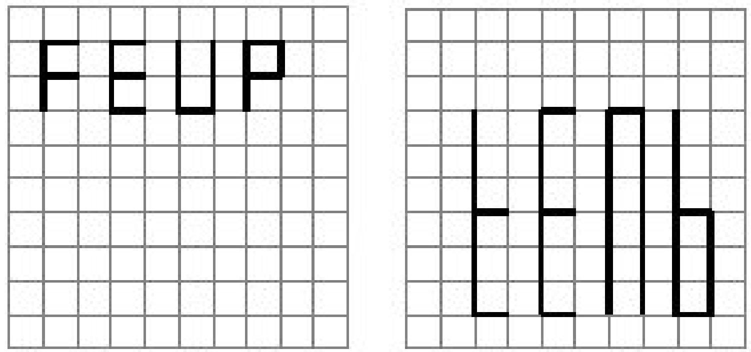
$$T^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -t_x \\ 0 & 1 & -t_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Escalamento:

$$S^{-1} = \begin{bmatrix} 1/s_x & 0 & 0 \\ 0 & 1/s_y & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Exercício

2. Da figura seguinte,



a)- Determine a matriz de transformação **2D** necessária para passar a letra *F* da situação da esquerda para a da direita.

b)- Comente a afirmação "A matriz encontrada na alínea anterior é aplicável às restantes três letras".

(Pergunta do teste de 23 Maio 2002)