

# Transformações Geométricas 3D

Sistemas Gráficos/

Computação Gráfica e Interfaces

# Transformações Geométricas 3D

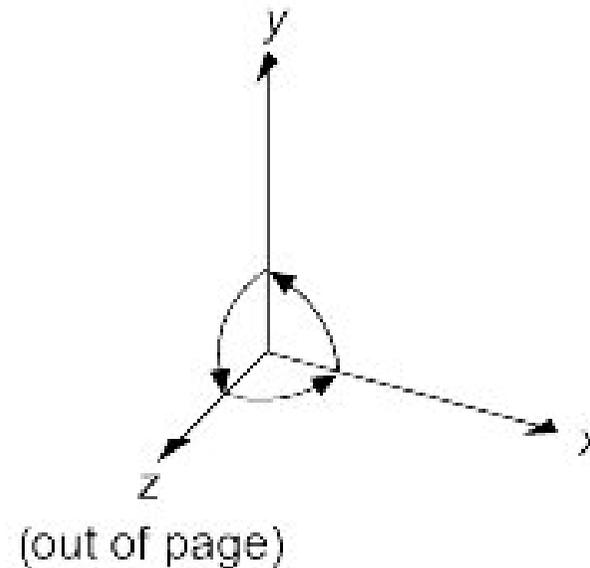
Extensão dos Métodos 2D incluindo agora a coordenada Z.

## Transformações:

- Translação
- Escalamento
- Rotação

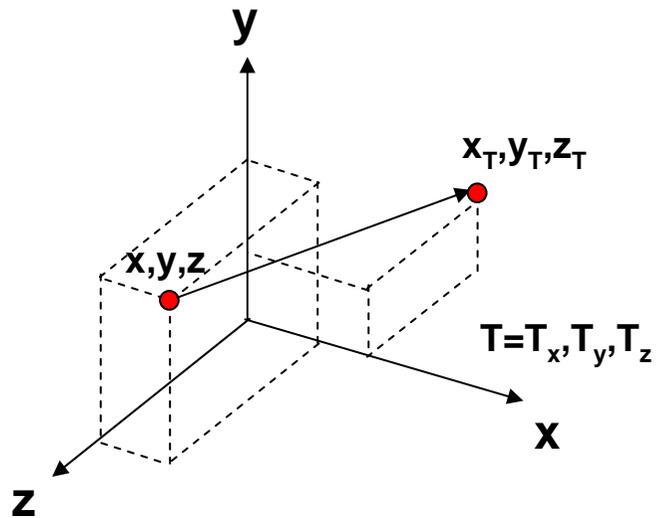
| Eixo de rotação | Direcção da rotação positiva |
|-----------------|------------------------------|
| x               | y para z                     |
| y               | z para x                     |
| Z               | x para y                     |

## Sistema de coordenadas 3D: Regra da Mão Direita



# Translação

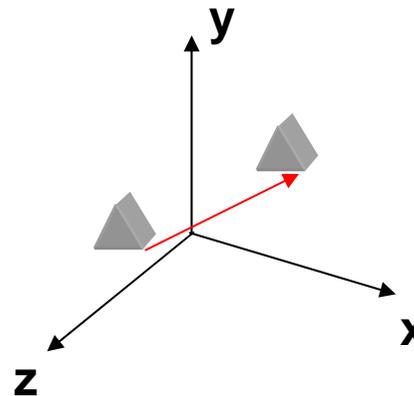
Translação de um Ponto



$$\begin{cases} x_t = x + T_x \\ y_t = y + T_y \\ z_t = z + T_z \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} x_T \\ y_T \\ z_T \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & T_x \\ 0 & 1 & 0 & T_y \\ 0 & 0 & 1 & T_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$$

A Translação de um Objecto é efectuada aplicando a operação a cada um dos seus vértices.

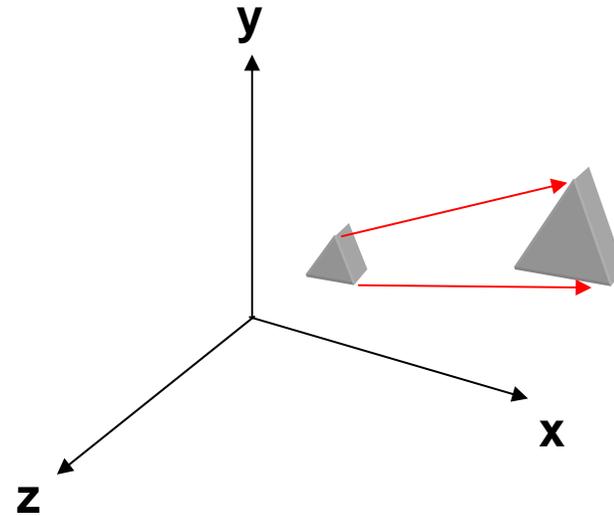


# Escalamento

Em relação à origem:

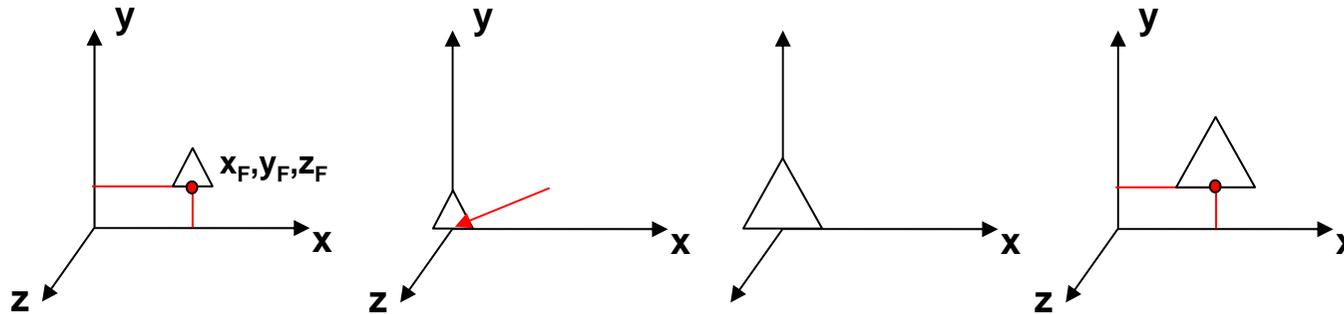
$$\begin{cases} x_s = x \cdot s_x \\ y_s = y \cdot s_y \\ z_s = z \cdot s_z \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} x_s \\ y_s \\ z_s \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & S_y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & S_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$$



# Escalamento

Em relação a um ponto arbitrário:

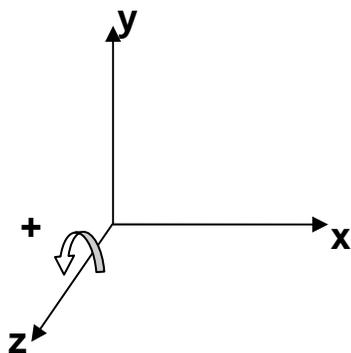


$$T(x_F, y_F, z_F) \cdot S(s_x, s_y, s_z) \cdot T(-x_F, -y_F, -z_F) = \begin{bmatrix} S_x & 0 & 0 & (1-S_x) \cdot x_F \\ 0 & S_y & 0 & (1-S_y) \cdot y_F \\ 0 & 0 & S_z & (1-S_z) \cdot z_F \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$$

# Rotação

- Em 2D o eixo de rotação é perpendicular ao plano XY
- Em 3D o eixo de rotação poderá ser
  - x, y ou z
  - Um eixo colocado arbitrariamente no espaço

Em torno do **eixo z** → z constante

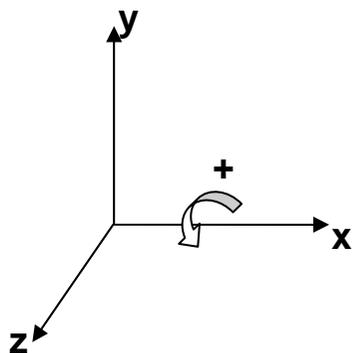


$$\begin{cases} x_{Rz} = x \cos(a) - y \sin(a) \\ y_{Rz} = x \sin(a) + y \cos(a) \\ z_{Rz} = z \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} x_{Rz} \\ y_{Rz} \\ z_{Rz} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(a) & -\sin(a) & 0 & 0 \\ \sin(a) & \cos(a) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$$

# Rotação

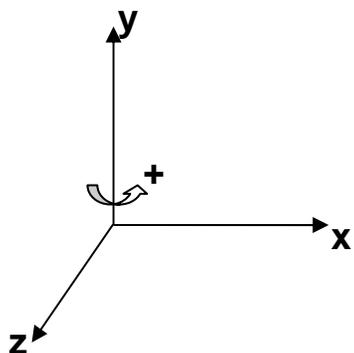
Em torno do **eixo x** → x constante



$$\begin{cases} x_{Rx} = x \\ y_{Rx} = y \cos(a) - z \sin(a) \\ z_{Rx} = y \sin(a) + z \cos(a) \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} x_{Rx} \\ y_{Rx} \\ z_{Rx} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(a) & -\sin(a) & 0 \\ 0 & \sin(a) & \cos(a) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$$

Em torno do **eixo y** → y constante

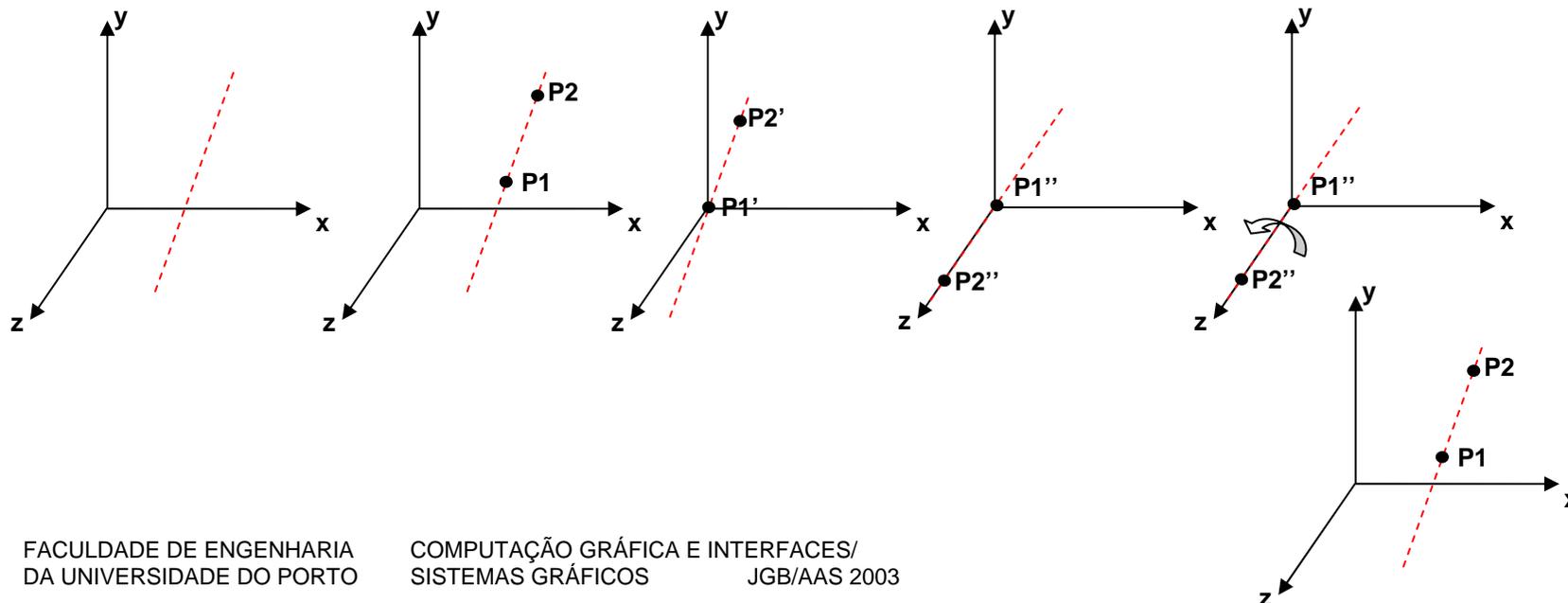


$$\begin{bmatrix} x_{Ry} \\ y_{Ry} \\ z_{Ry} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(a) & 0 & \sin(a) & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin(a) & 0 & \cos(a) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$$

# Rotação

Rotação em torno de um eixo colocado arbitrariamente no espaço 3D:

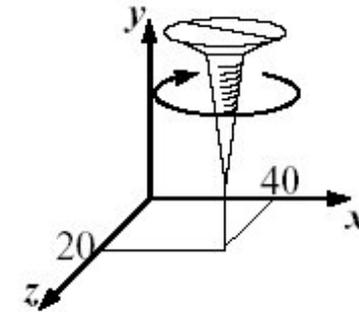
1. Aplicar a translação que coloque o eixo de rotação a passar pela origem do sistema de coordenadas.
2. Rodar o objecto de modo a que o eixo de rotação coincida com um dos eixos de coordenadas.
3. Aplicar a rotação pretendida sobre esse eixo.
4. Aplicar a rotação inversa do ponto 2.
5. Aplicar a translação inversa de 1.



# Exercícios

4. Pretende-se realizar a seguinte sequência de transformações geométricas 3D:
1. “Espelho” no plano  $y=k$ ;
  2. Ampliação de  $S$  vezes, na dimensão  $y$ .
  3. Rotação de  $|\mathbf{a}|$  no sentido dos ponteiros do relógio, para quem observa de  $y=\infty$  para  $y=0$ .
- a)- Determine a matriz de transformação equivalente.
- b)- Será possível obter o mesmo resultado, com as mesmas operações por outra ordem?

5. Um parafuso encontra-se, no espaço 3D, de tal forma que o seu eixo coincide com a recta  $x=40$ ,  $z=20$ . A rosca do parafuso é direita e faz o parafuso avançar 2 unidades por volta.



- a)- Calcule a matriz de transformação geométrica 3D que traduz o movimento do parafuso quando este roda de  $10^\circ$  no sentido indicado na figura
- b)- Diga se seriam suficientes os dados fornecidos se, além dos movimentos enunciados, o parafuso fosse também alvo de um escalamento  $S(1, 1.2, 1)$ .