PROJECCÇÕES GEOMÉTRICAS PLANAS

Computação Gráfica e Interfaces

UNIVERSIDADE NOVA DE LISBOA

Sumário

Projecção perspectiva

- 1, 2 e 3 pontos de fuga

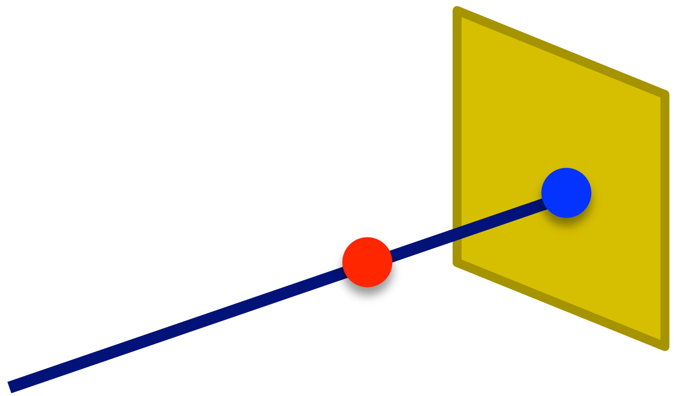
Projecção paralela

- Multi-vistas
- Oblíqua
- Axonométrica

Projecção

Uma projecção é definida através dos raios de projecção, com origem no centro de projecção, direccionados para o plano de projecção e passando pelo objecto

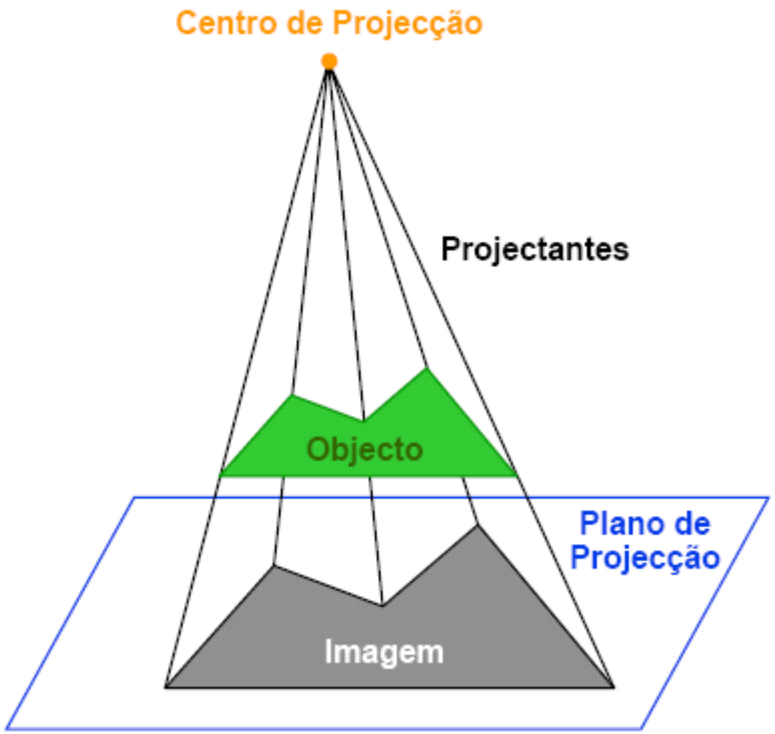
- A superfície de projecção é um plano
- As projectantes são linhas rectas
- A imagem da projecção de um ponto é a intersecção da projectante com o plano

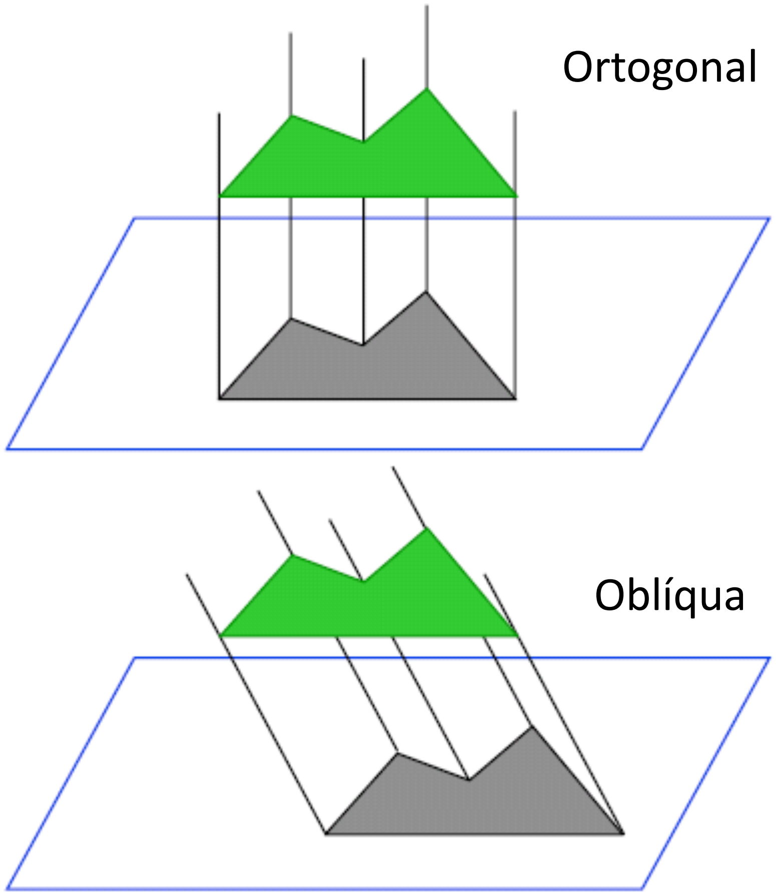


Tipos de projecção

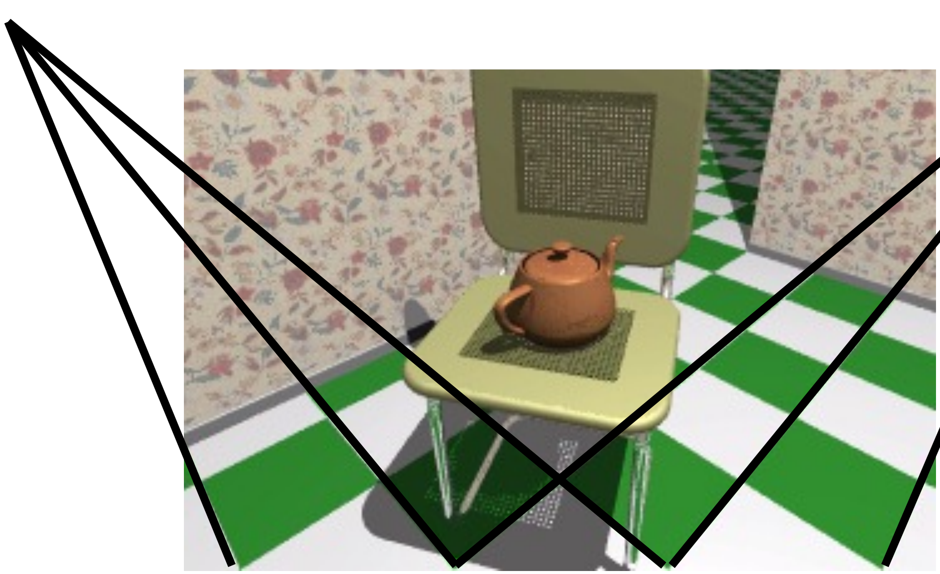
Perspectiva

Paralela: distância infinita entre o cp e o pp (convergem no infinito)





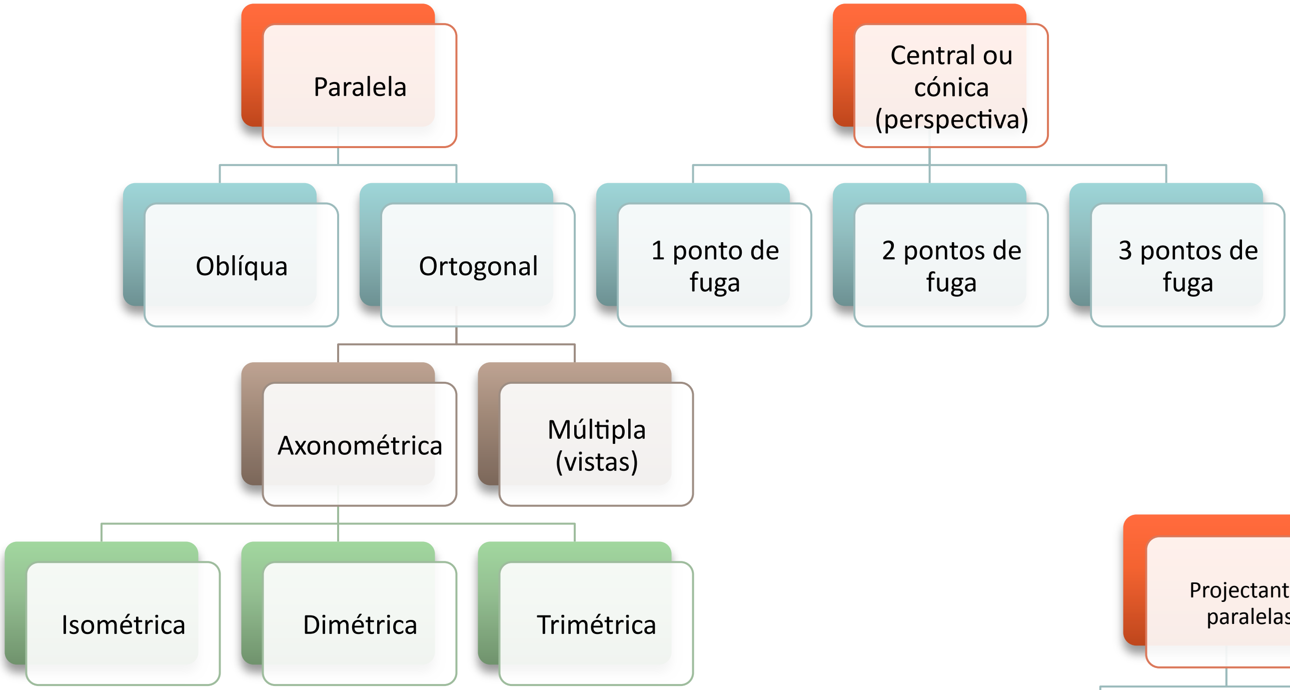
Imagens: M. Próspero Santos



Perspectiva

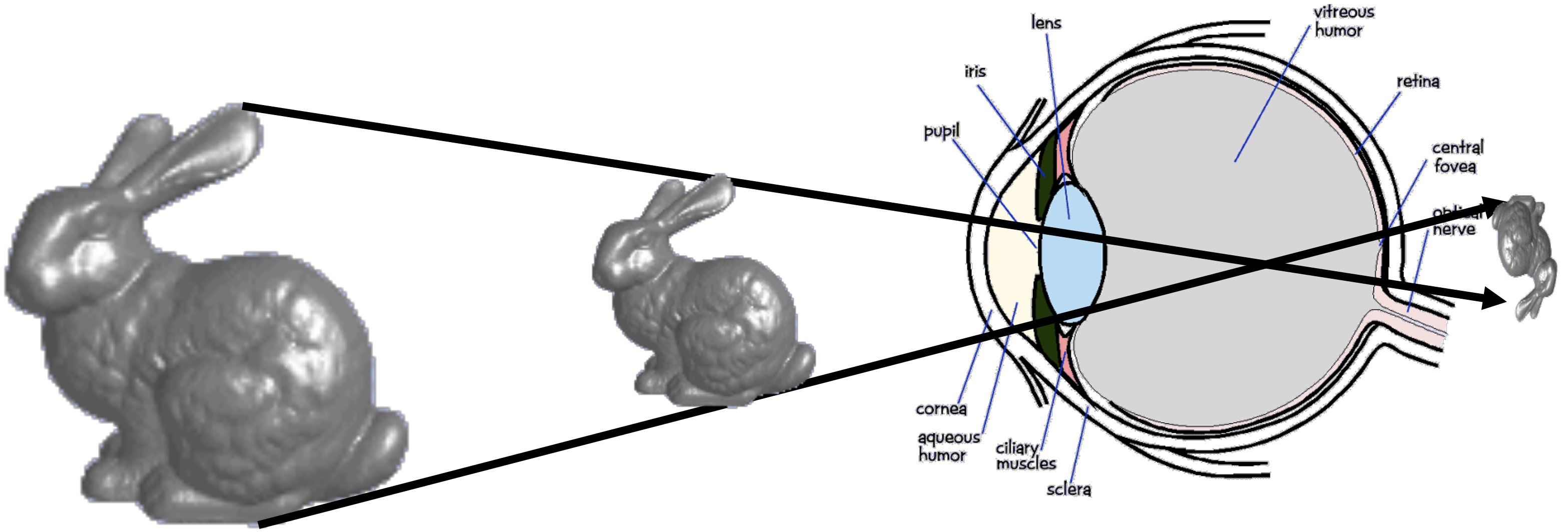
Paralela

Classificação das projecções geométricas planas

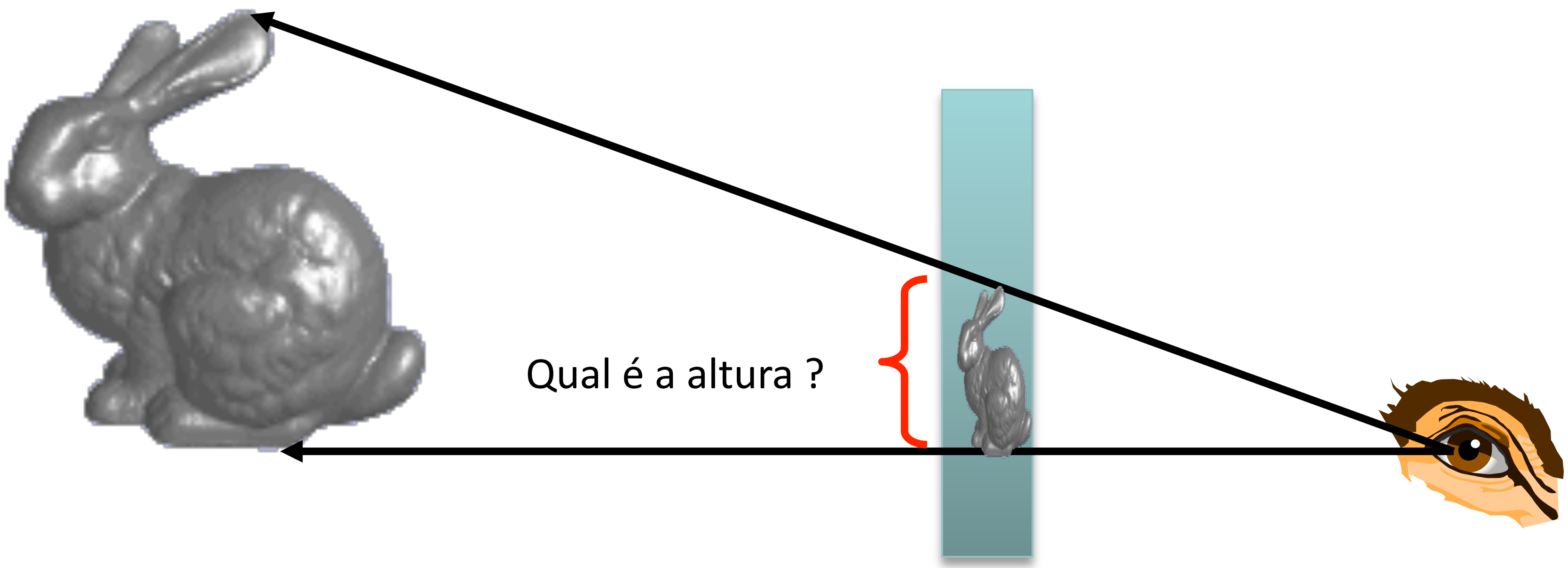


Projecção real

No mundo real, os objectos exibem a seguinte propriedade: quanto mais distantes estão do observador, mais pequenos aparentam ser



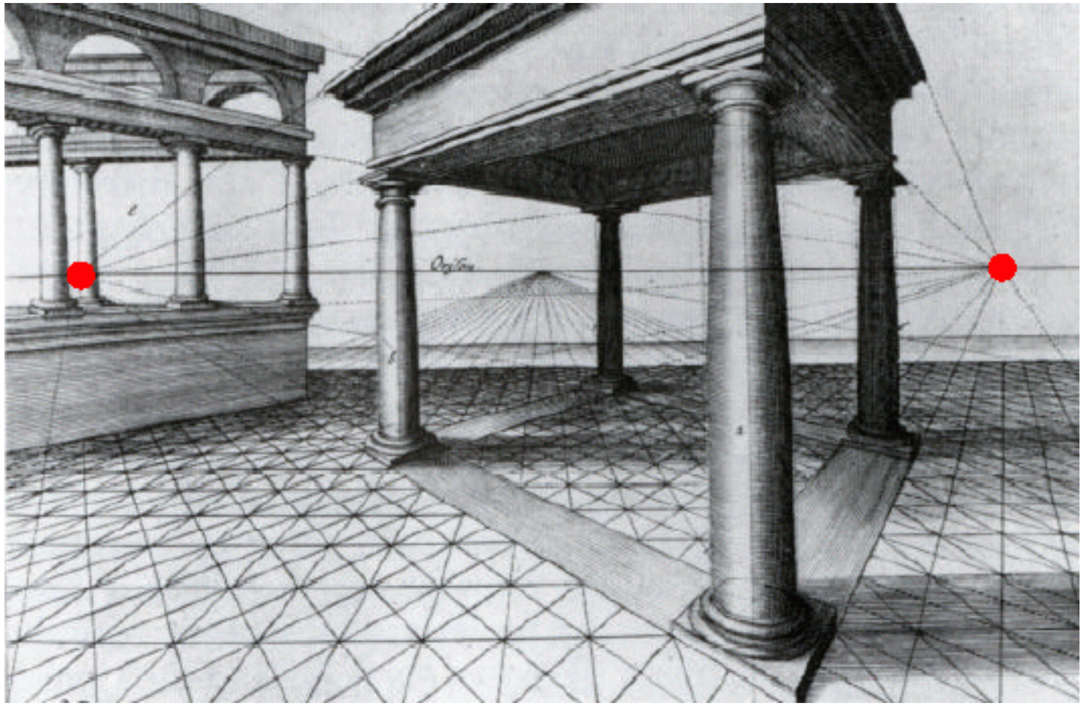
Por analogia, podemos admitir que o ecrã é uma janela 2D para o mundo real 3D



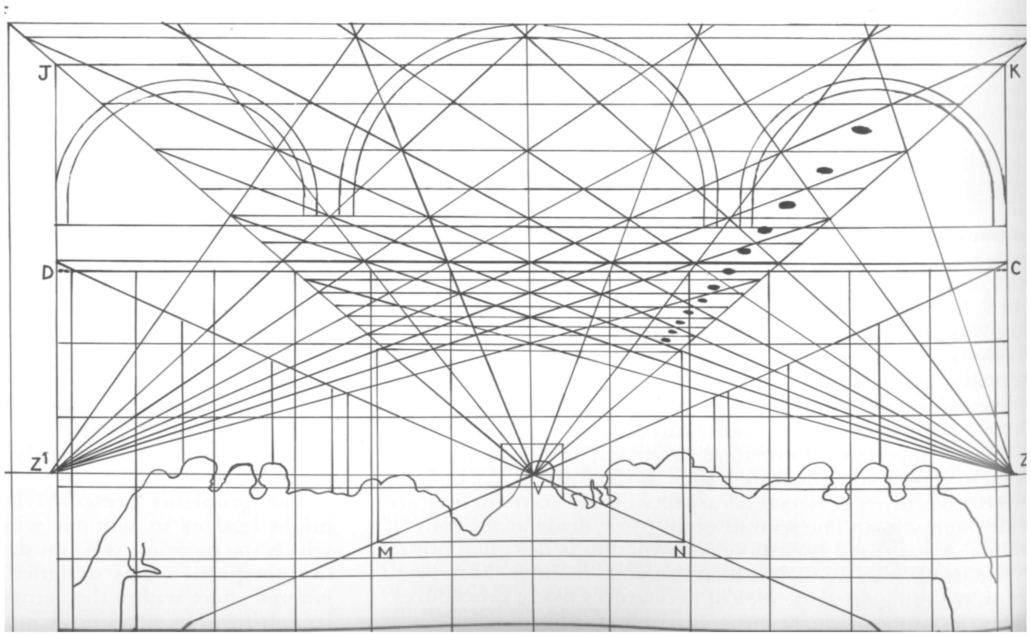
Projecção perspectiva

Desenho em projecção perspectiva

- Donatello, Brunellesci e Leonardo da Vinci (época do Renascimento) foram os pioneiros do desenho em projecção perspectiva
- Objectos na proximidade do observador parecem maiores
- Linhas paralelas parecem convergir para um único ponto



Leonardo da Vinci,
A Última Ceia, 1498



Trinity with the Virgin, St John and Donors, Mastaccio, 1427

(primeira pintura em perspectiva !)

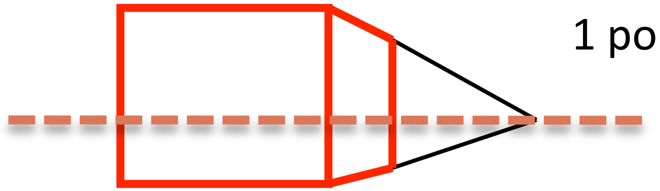
Tipos de projecção perspectiva

linhas paralelas do objecto, não paralelas ao plano de projecção, convergem para o ponto de fuga

Duas famílias de arestas paralelas ao plano XY

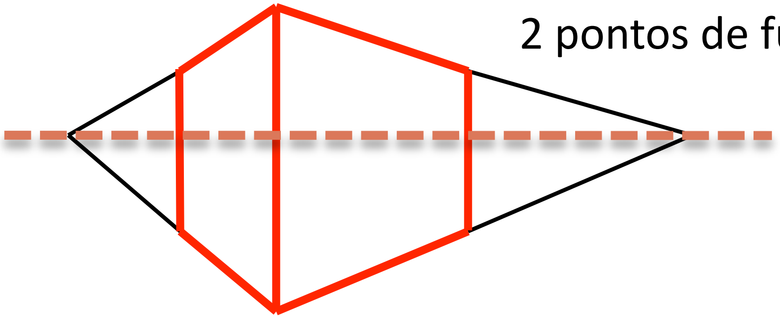
1 ponto de fuga

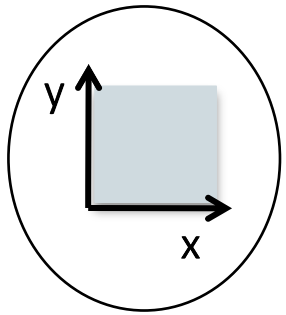
Linha do horizonte
(posição variável)



Uma família de arestas paralelas ao plano XY

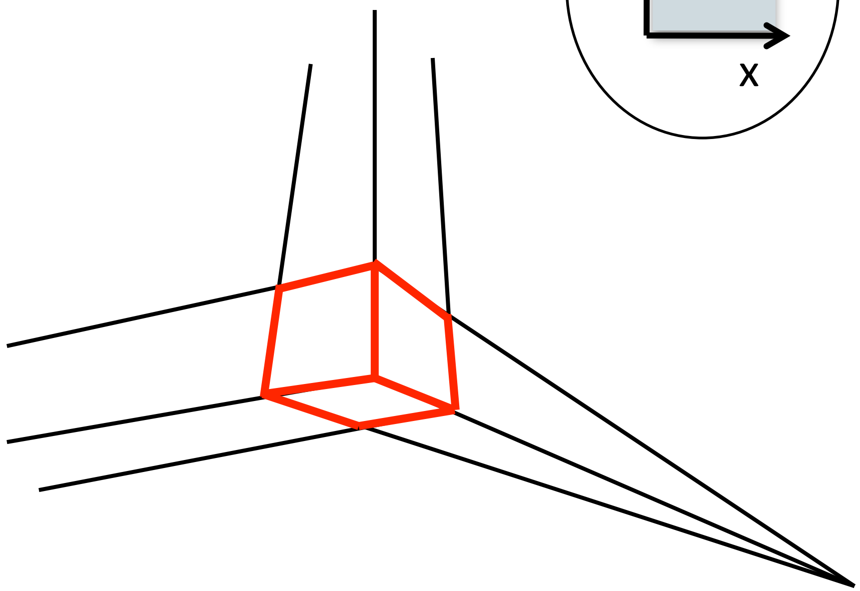
2 pontos de fuga

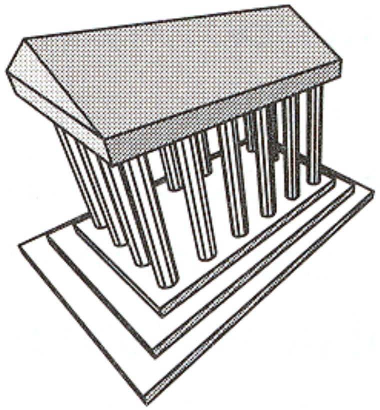




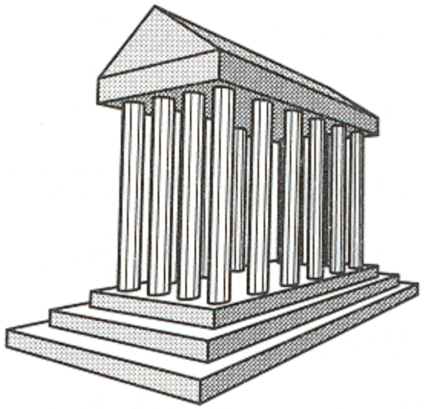
Nenhuma família de arestas paralelas ao plano XY

3 pontos de fuga

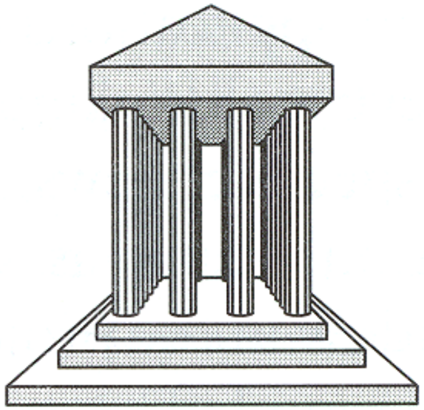




3 pontos de fuga

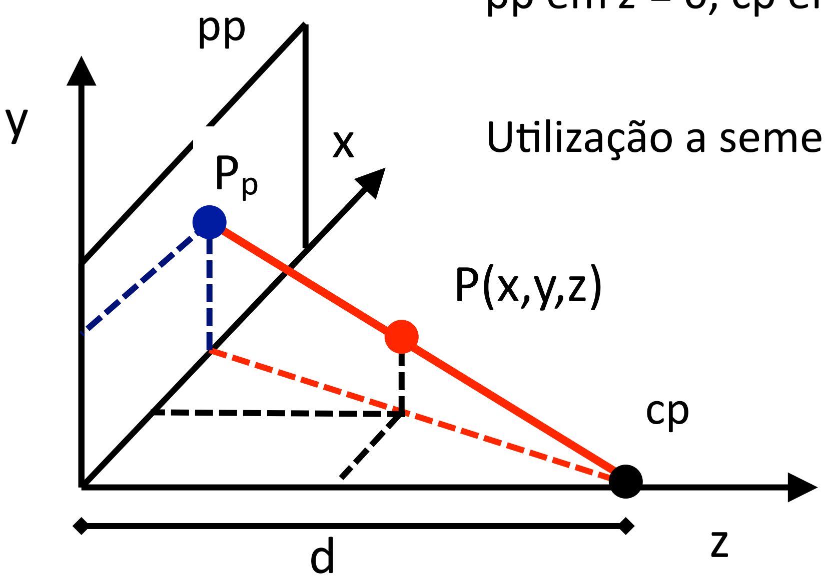


2 pontos de fuga



1 ponto de fuga

Tratamento matemático da projecção perspectiva



pp em $z = 0$, cp em (0,0,d), d≠0

Utilização a semelhança de triângulos nos planos XZ e YZ:

$$\begin{cases} \dfrac{x_p}{d} = \dfrac{x}{d-z} \\ \dfrac{y_p}{d} = \dfrac{y}{d-z} \\ z_p = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_p = \dfrac{x}{1-(z/d)} \\ y_p = \dfrac{y}{1-(z/d)} \\ z_p = \dfrac{0}{1-(z/d)} \end{cases}$$

$$P = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix} \rightarrow P_P = \begin{bmatrix} x \\ y \\ 0 \\ 1-(z/d) \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} \dfrac{x}{1-(z/d)} \\ \dfrac{y}{1-(z/d)} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$M_{perspectiva} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1/d & 1 \end{bmatrix}$$

$$P_P = M_{perspectiva} \cdot P$$

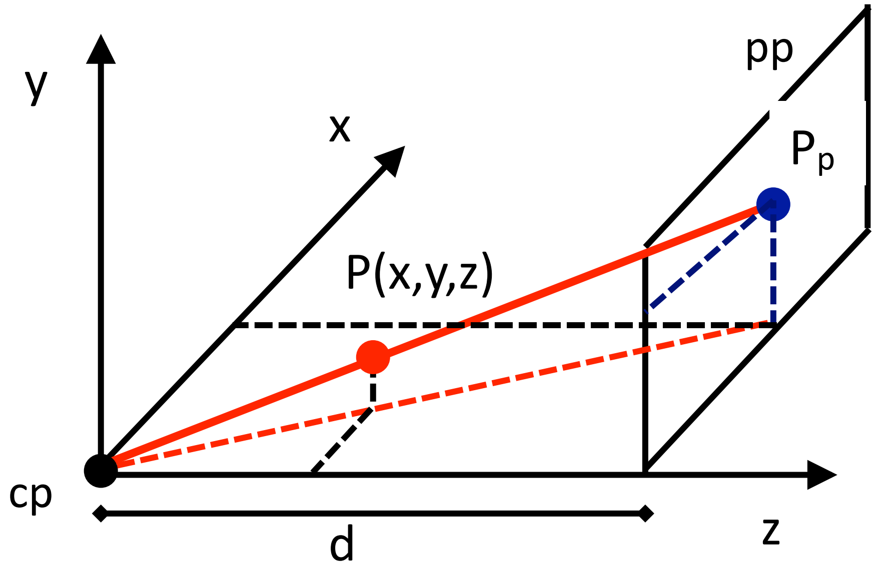
e se d → ∞ ?

Relembrando as coordenadas homogéneas:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ w' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 10\,w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x/10 \\ y/10 \\ z/10 \\ w \end{bmatrix}$$

Conceptualmente, a 4ª coordenada w funciona como um factor de mudança de escala: aumentando w, os objectos tornam-se mais pequenos.
Podemos considerar as coordenadas homogéneas como definindo um espaço projectivo: aumentar w significa "deslocar para longe"

Outra variante: pp em z = d, d≠0 e cp em (0,0,0)



Utilização a semelhança de triângulos nos planos XZ e YZ

$$\begin{cases} \frac{x_p}{d} = \frac{x}{z} \\ \frac{y_p}{d} = \frac{y}{z} \\ z_p = d \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_p = \frac{x}{z/d} \\ y_p = \frac{y}{z/d} \\ z_p = \frac{z}{z/d} \end{cases}$$

$$M_{perspectiva} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/d & 0 \end{bmatrix}$$

$$P_P = M_{perspectiva} \cdot P$$

e se d → ∞ ?

Sumário

Projecção perspectiva

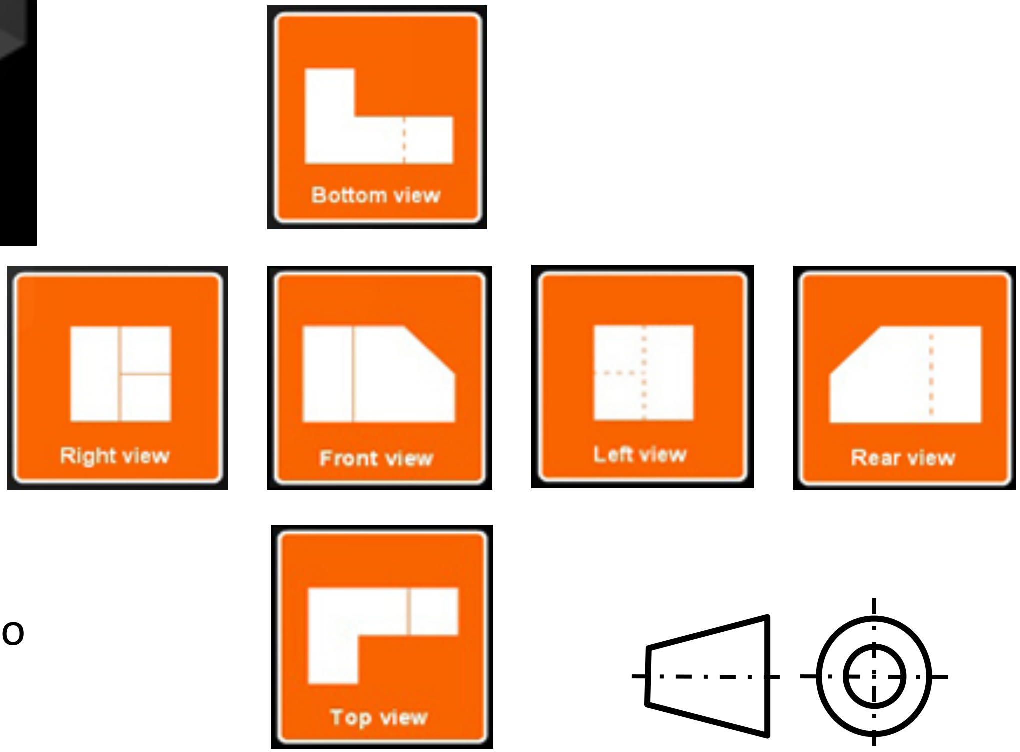
- 1, 2 e 3 pontos de fuga

Projecção paralela

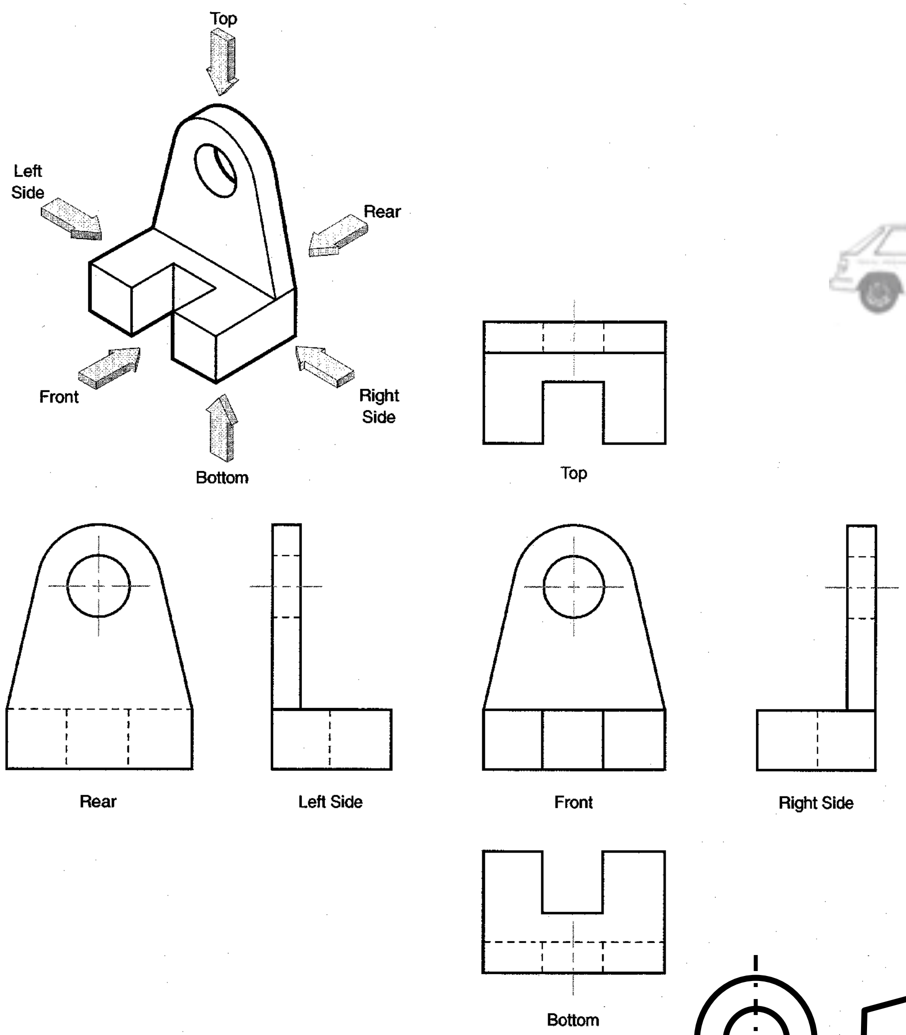
- Multi-vistas
- Oblíqua
- Axonométrica

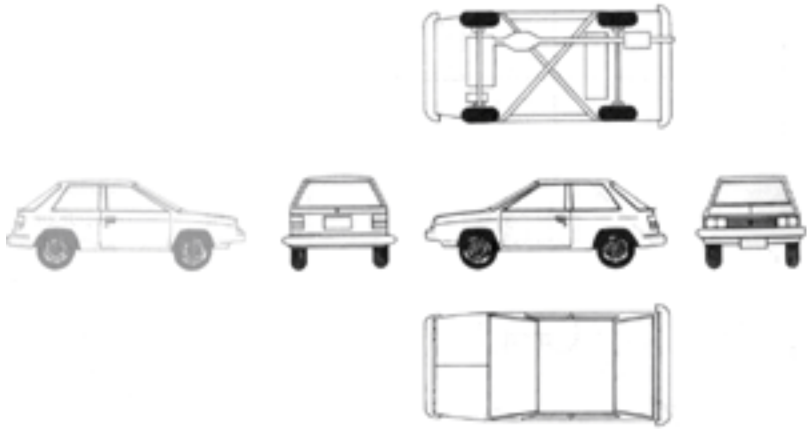
Multi-vistas

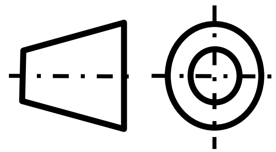
Método do 1º diedro (método **E**uropeu)

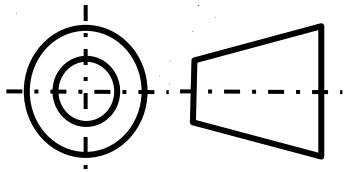


Alçado principal
Vista de cima ou planta
Alçado lateral esquerdo
Alçado lateral direito
Alçado de tardoz (com colocação à esquerda ou direita)









No método do 3º diedro (método **A**mericano), a vista de cima é colocada em cima, a de baixo em baixo, o alçado direito na direita e o alçado esquerdo na esquerda

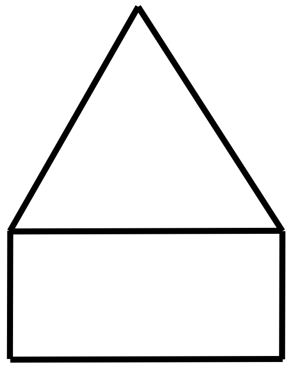
Por norma, 3 vistas são suficientes para representar o objecto sem ambiguidade

Critérios para escolha da vista frontal

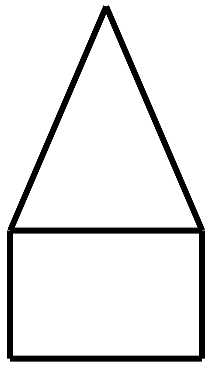
- Maior número de detalhes, ou seja, vista mais descritiva
- Posição de uso, fabricação ou montagem
- Maior área

É comum desenhar também uma representação 3D do objecto no quadrante disponível

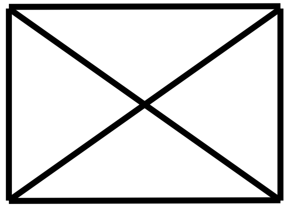
Alçado principal ou vista de frente

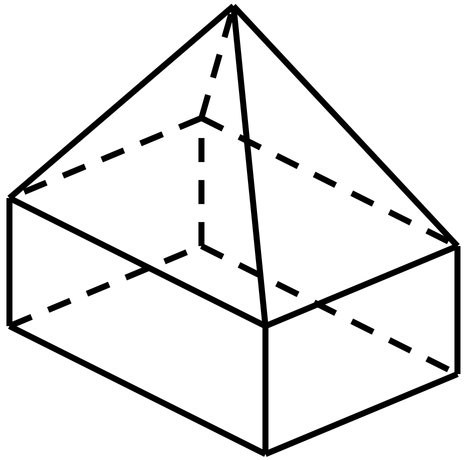


Alçado lateral esquerdo

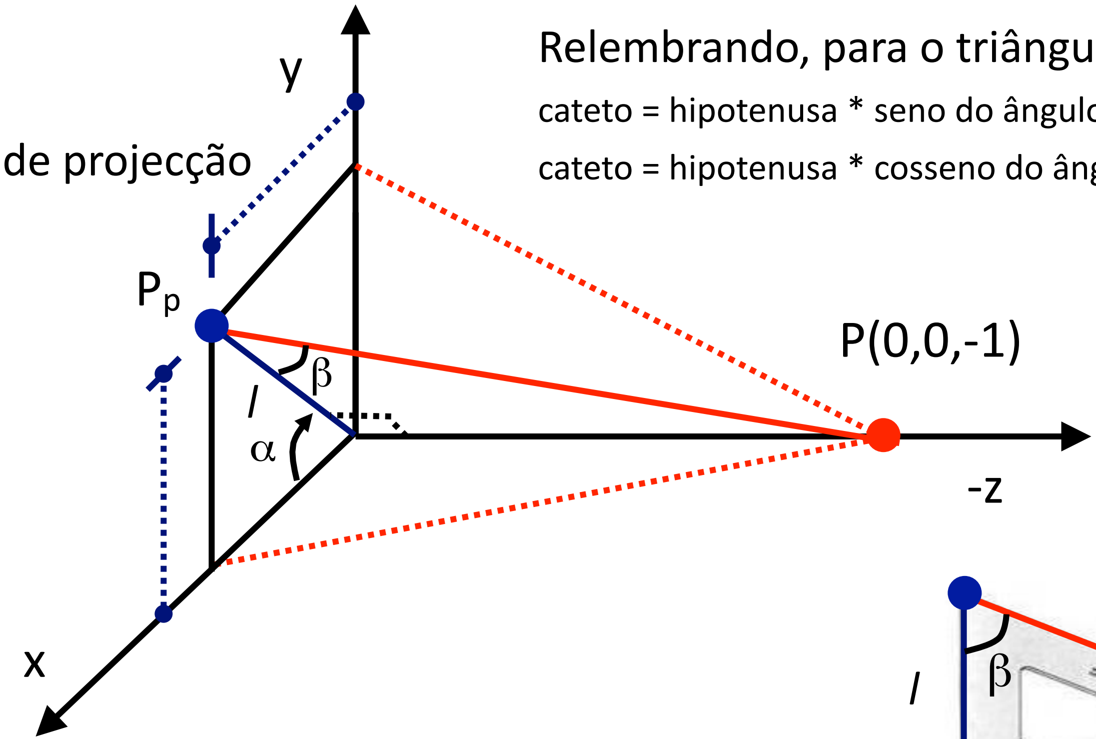


Vista de cima ou planta





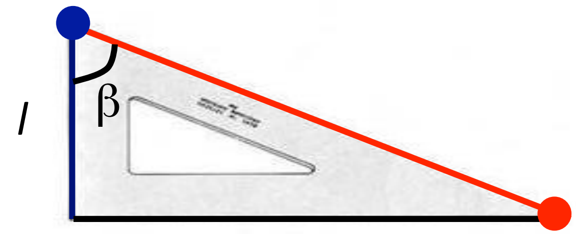
Projecção paralela oblíqua



Relembrando, para o triângulo rectângulo:

cateto = hipotenusa * seno do ângulo que lhe é oposto

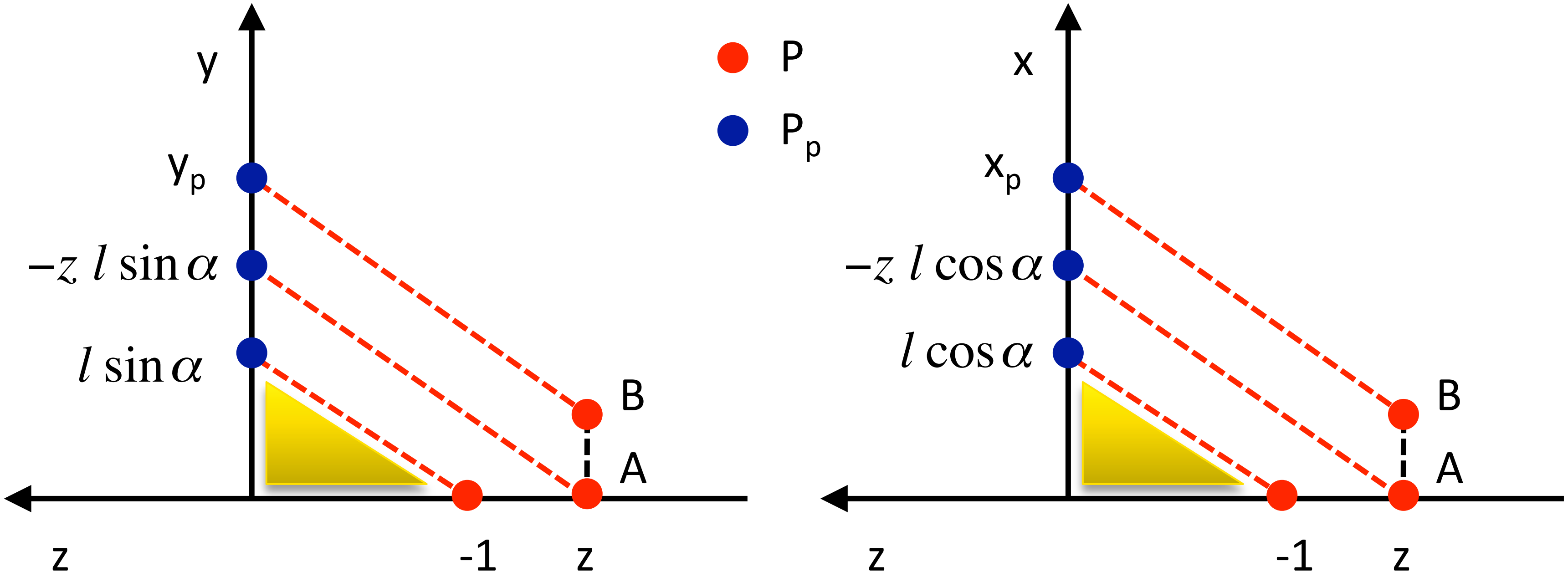
cateto = hipotenusa * cosseno do ângulo que lhe é adjacente



A direcção das projectantes (DP) não é perpendicular ao plano de projecção

$$DP = P - P_p = \begin{bmatrix} -l\cos\alpha \\ -l\sin\alpha \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$P(0,0,-1) \rightarrow P_p(l\cos\alpha, l\sin\alpha, 0)$$



$$P(0,0,-1) \rightarrow P_p(l\cos\alpha, l\sin\alpha, 0)$$

$$P_P = M_{oblíqua} . P$$

Considerando a semelhança de triângulos

A: $P(0,0,z) \rightarrow P_p(-z\ l\cos\alpha, -z\ l\sin\alpha, 0)$

B: $P(x,y,z) \rightarrow P_p(x - z\ l\cos\alpha, y - z\ l\sin\alpha, 0)$

$$M_{oblíqua} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -l\cos\alpha & 0 \\ 0 & 1 & -l\sin\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

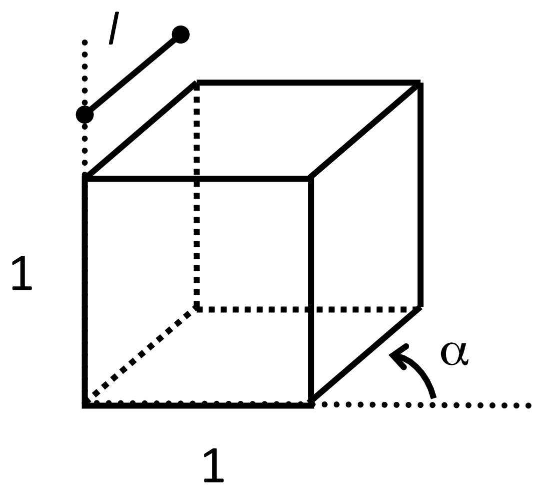
Caracterização/determinação das projecções oblíquas

- Pelo ângulo β que as projectantes fazem com o plano de projecção (z=0)
- Pela orientação das projectantes, independentemente do ângulo com o plano de projecção (ex: com 30 ou 45 graus para α)

Alguns tipos

- Projecção cavaleira: l = 1, o que é equivalente a β = 45°
- Projecção de gabinete: l = 0.5, o que é equivalente a β = 63.4°
- Projecção ortogonal: l = 0, o que é equivalente a β = 90°

$\tan(\beta) = 1/l$



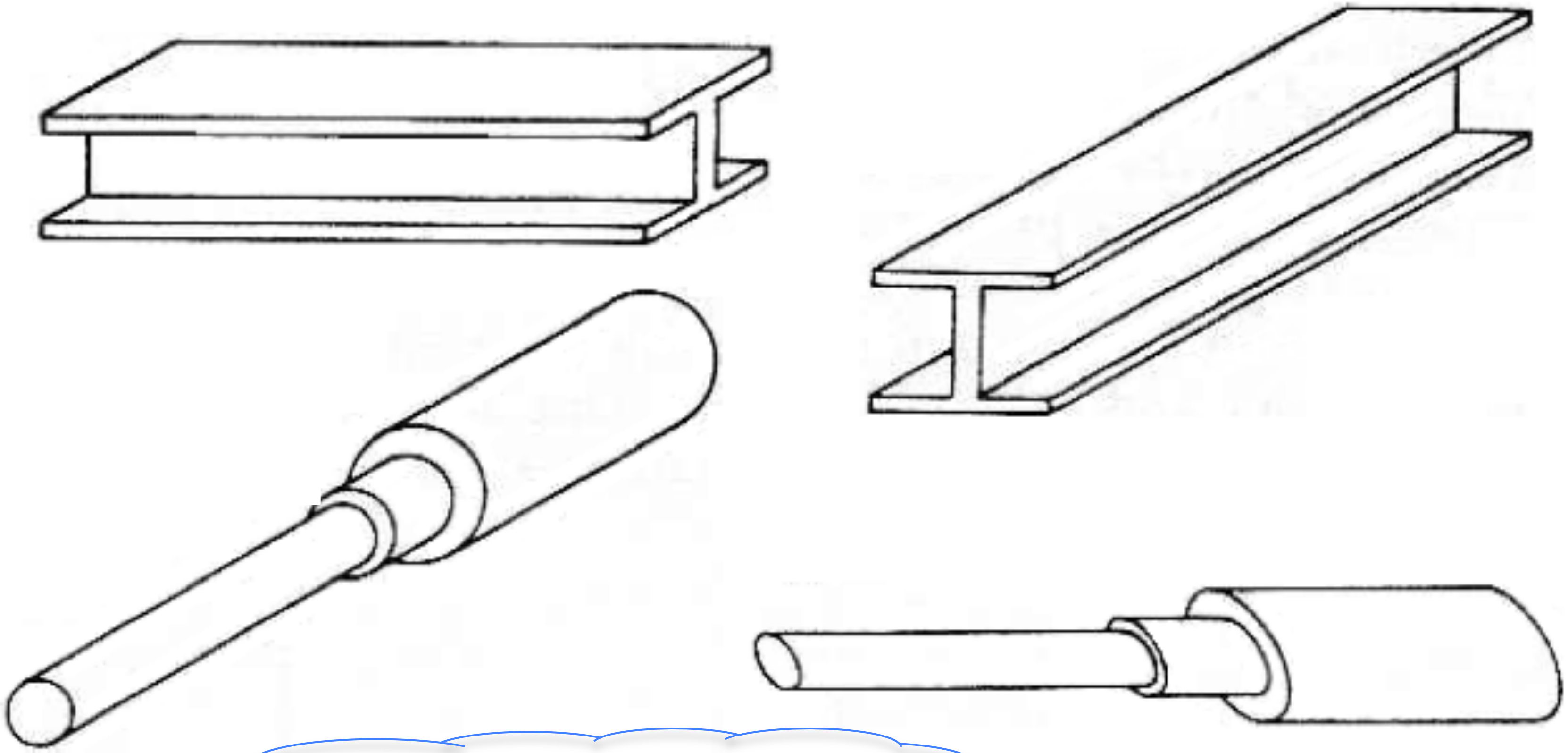
l : factor de redução ou de encurtamento

α : ângulo de fuga

Obs.: Valores no desenho

Regras a seguir na projecção oblíqua, por ordem de preferência

- O plano de projecção deve ser paralelo às faces mais irregulares do objecto ou que contêm formas curvas
- O plano de projecção deve ser paralelo à face de maior comprimento

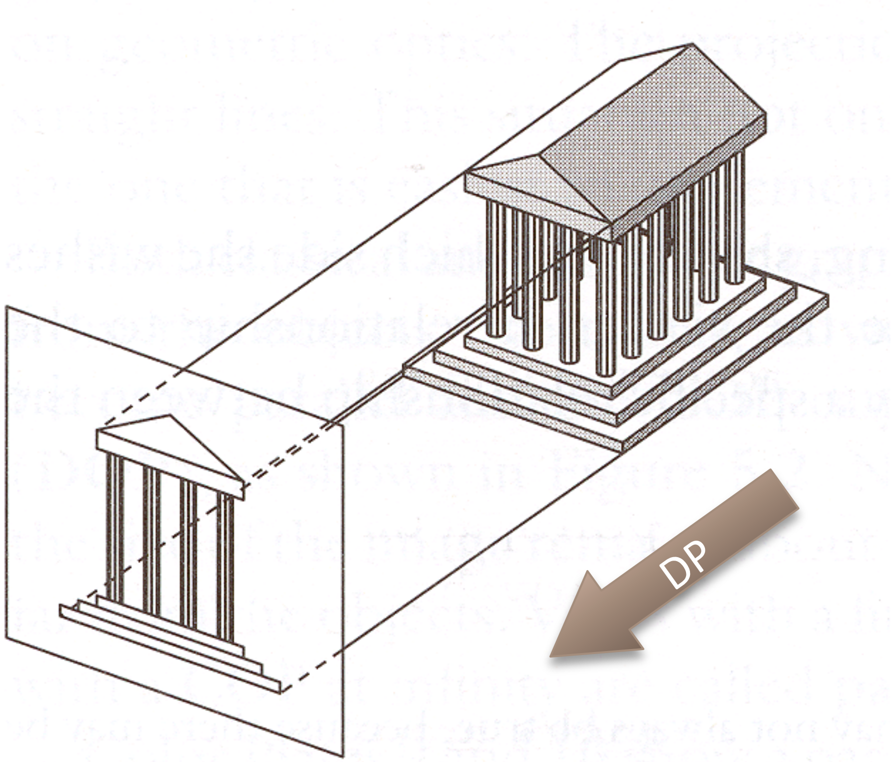


Quais são as hipóteses correctas?

Projecção paralela ortogonal

Centro de projecção no infinito, logo a direcção das projectantes é a mesma para todos os pontos

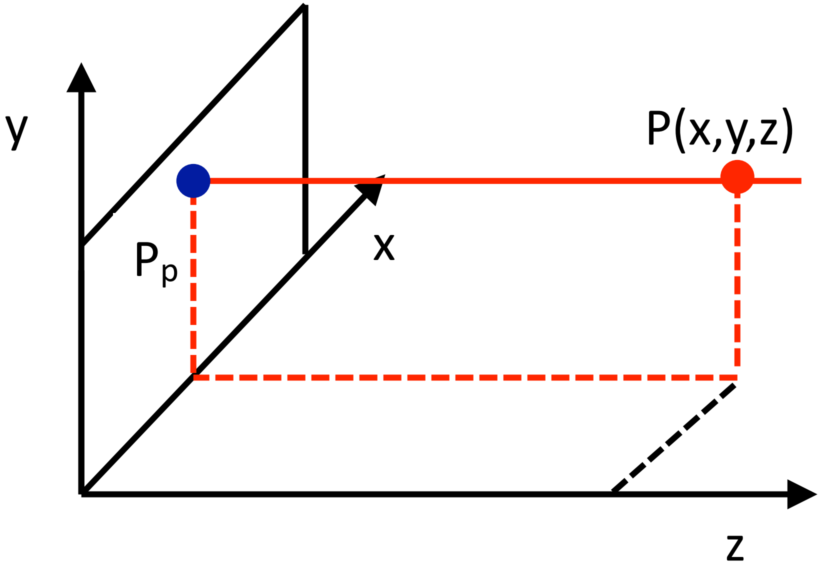
Plano de projecção



Fonte: figura do livro de Angel

Tratamento matemático da projecção paralela ortogonal

mostra as dimensões exactas das faces paralelas ao plano de projecção



plano de projecção z = 0

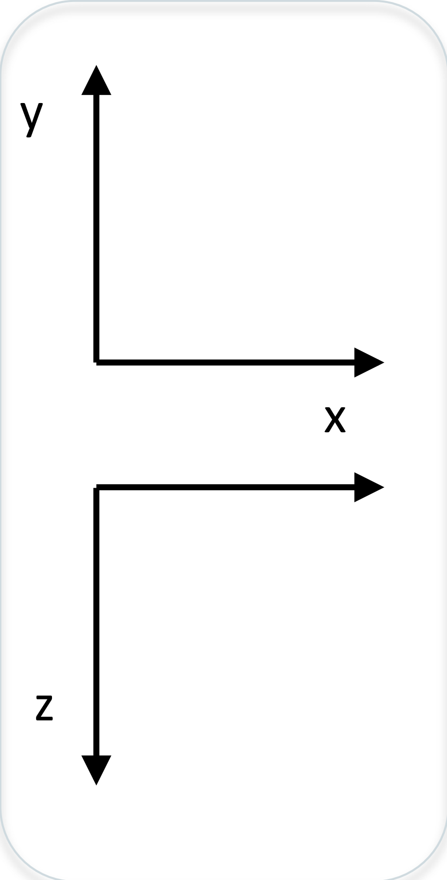
cp no infinito ou seja $d = \infty$

$$\begin{cases} x_p = x \\ y_p = y \\ z_p = 0 \end{cases}$$

$$P' = M_{ortogonal} \cdot P \qquad M_{ortogonal} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Vistas múltiplas

$$P_p = M_{ortogonal\_vista} . P$$



Alçado principal (com z=0)

$$\begin{cases} x_p = x \\ y_p = y \end{cases} \qquad M_{ortogonal\_principal} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

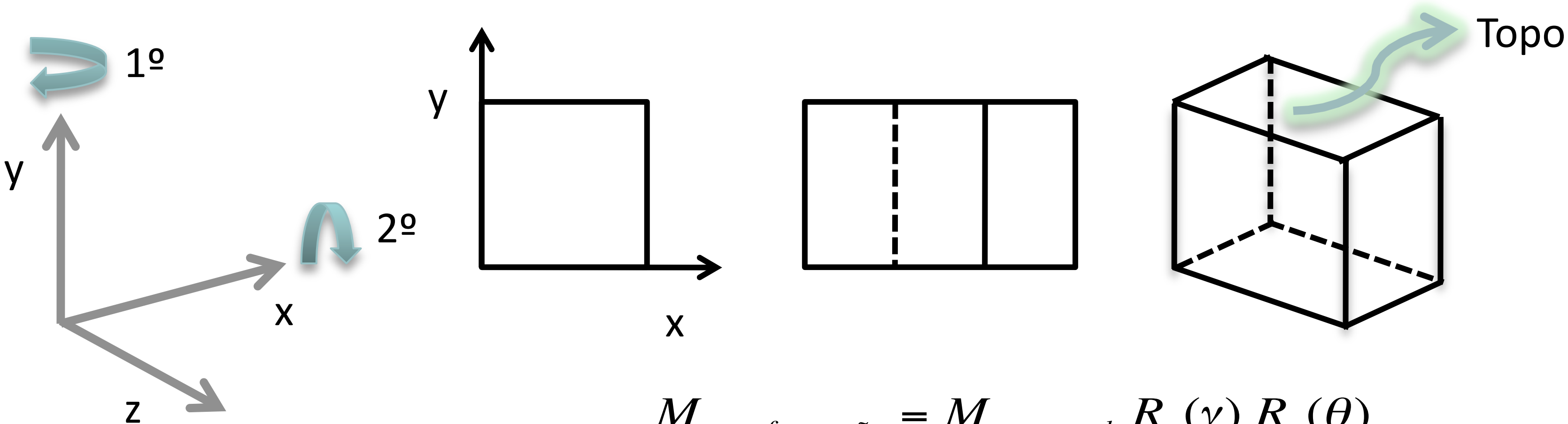
Vista de cima (com y=0)

$$\begin{cases} x_p = x \\ y_p = -z \end{cases} \qquad M_{ortogonal\_cima} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

E para as outras vistas ?

Projecção paralela axonométrica

- Característica fundamental : os ângulos que os eixos coordenados fazem com o plano de projecção
- Preserva o paralelismo das arestas mas não os ângulos
- Medições segundo os eixos axiais (o que originou o nome AXONOMETRIA – medida segundo os eixos)
- Obtida através de duas rotações seguidas da projecção ortogonal



$$M_{transformação} = M_{ortogonal}\ R_x(\gamma)\ R_y(\theta)$$

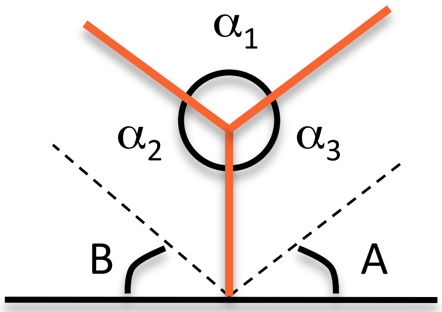
$$(projecção\ em\ z = 0)$$

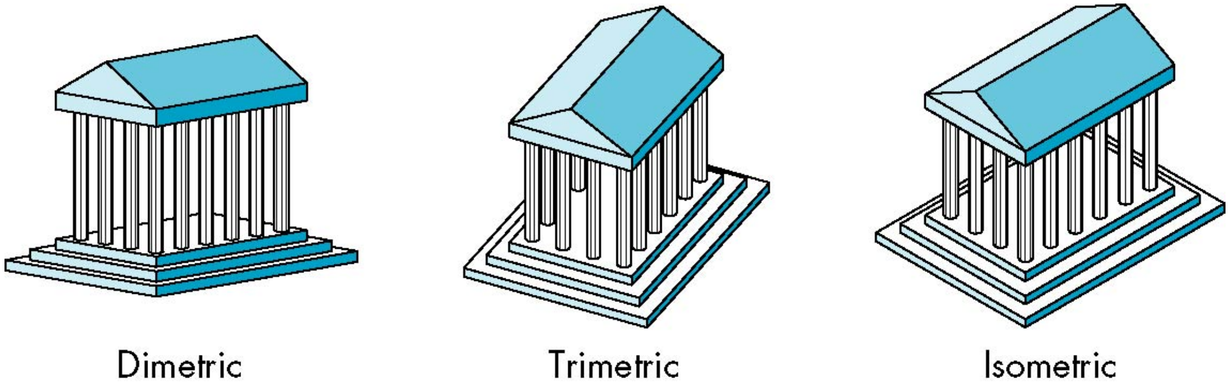
Caracterização/determinação das projecções axonométricas

- Pelos ângulos que os eixos coordenados locais fazem com o plano de projecção
  - OU
- Pelos três factores de escala
  - OU
- Pelos ângulos entre os eixos coordenados depois de projectados. Na prática, significa A e B

A projecção axonométrica é também classificada pelo número de ângulos iguais no vértice do cubo projectado

- 0: trimétrica
- 2: dimétrica
- 3: isométrica



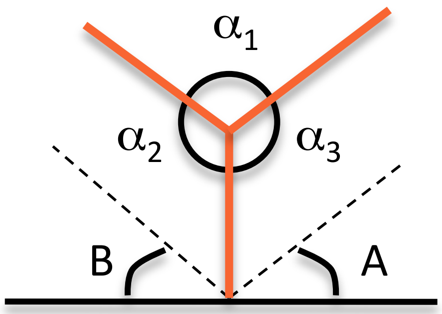


Fonte: figura do livro de Angel

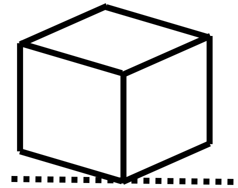
Relações matemáticas em axonometria

$$M_{transformação} = M_{ortogonal}\ R_x(\gamma)\ R_y(\theta)$$

$$(projecção\ em\ z = 0)$$



$$\begin{cases} \theta = arctg\left(\sqrt{\dfrac{tgA}{tgB}}\right) - \dfrac{\pi}{2} \\ \gamma = \arcsin\left(\sqrt{tgA \, . \, tgB}\right) \\ r_1 = \cos\gamma \\ r_2 = \dfrac{\cos\theta}{\cos B} \\ r_3 = -\dfrac{\sin\theta}{\cos A} \end{cases}$$



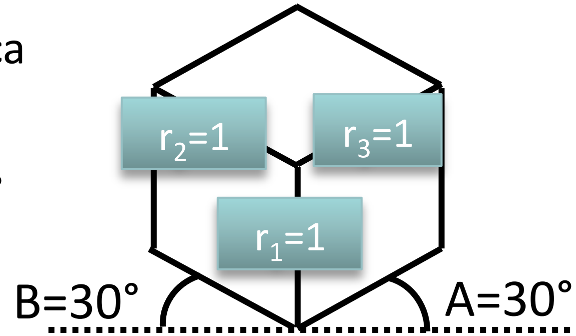
Dados A e B (ângulos com a horizontal dos 2 eixos projectados não verticais), obtêm-se os valores dos factores de escala r_i (ou redução).
No entanto, na representação do desenho axonométrico, utilizam-se sempre valores inferiores. Por comodidade de representação e leitura, é normal definir o maior deles como sendo 1

Para A = B = 30°, quais são os valores reais dos 3 factores de escala?

Desenho axonométrico

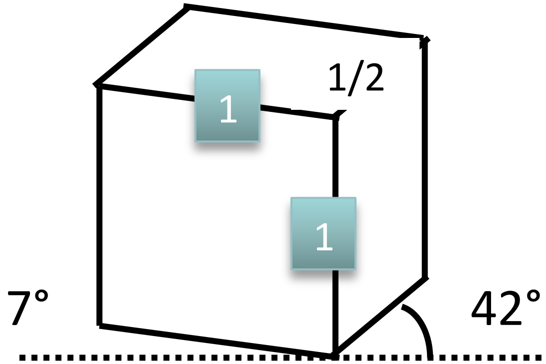
Isométrica

A=B=30°

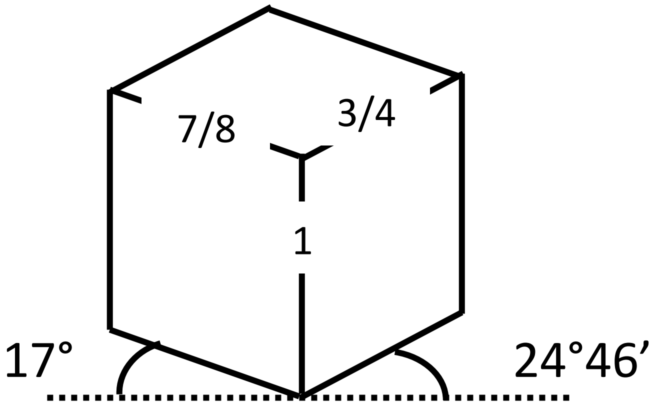


Factores de escala no desenho: $r_1 = r_2 = r_3 = 1$

Dimétrica (um exemplo)

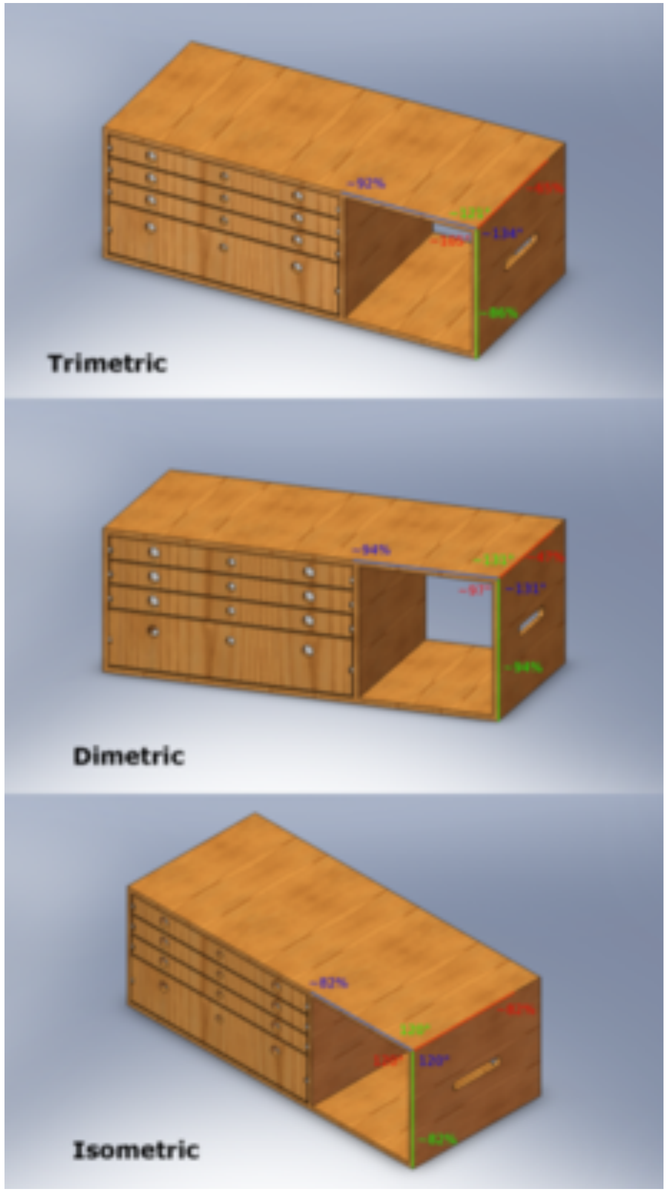


Trimétrica (um exemplo)



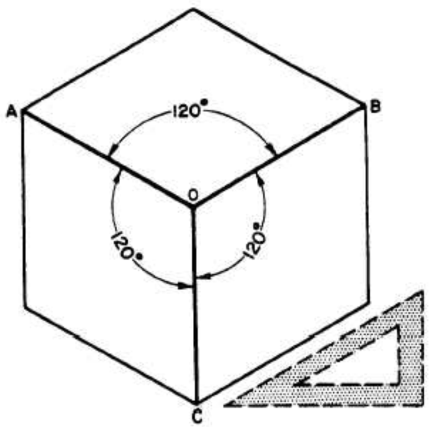
Coeficientes de redução das escalas dos eixos				
Desenho	Factores de escala no desenho	x	y	z
Isométrico	1:1:1	0.816	0.816	0.816
Dimétrico	4:3:4	0.883	0.663	0.883
	3:2:3	0.905	0.603	0.905
Trimétrico	2:1:2	0.943	0.471	0.943
	7:6:8	0.811	0.695	0.927
	5:4:6	0.806	0.645	0.967

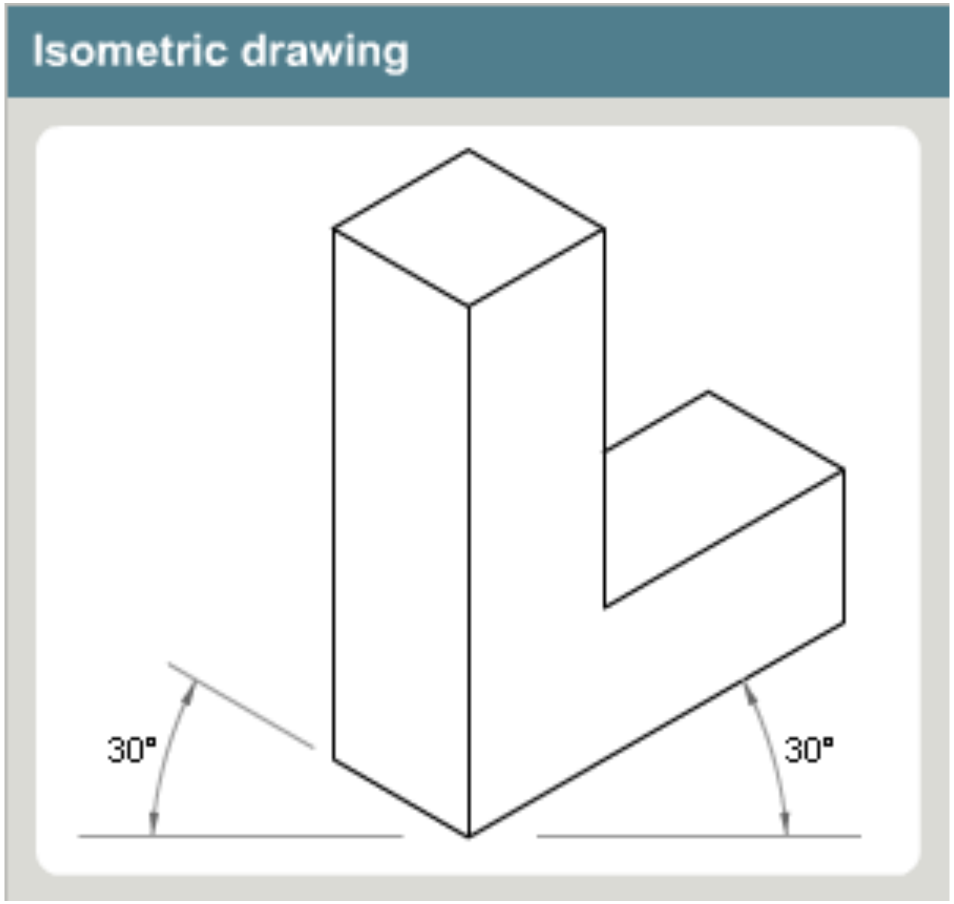
Desenho axonométrico



Desenho isométrico

O desenho isométrico distorce a realidade





Comparação entre as projecções paralela e perspectiva

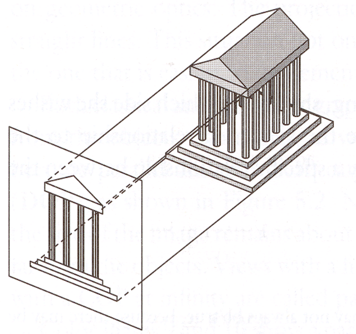
✗

Paralela

- Por norma, os ângulos não são preservados
- Aparência menos realista

Paralela

- Aconselhável para medidas exactas
- Linhas paralelas mantêm-se paralelas



✓

Perspectiva

- Por norma, distâncias e ângulos não são preservados
- Por norma, linhas paralelas não se mantêm paralelas

Perspectiva

- Tamanho varia inversamente com a distância, o que torna o desenho mais realista