TRANSFORMAÇÕES GEOMÉTRICAS

Computação Gráfica e Interfaces

FCT UNIVERSIDADE NOVA DE LISBOA

Sumário

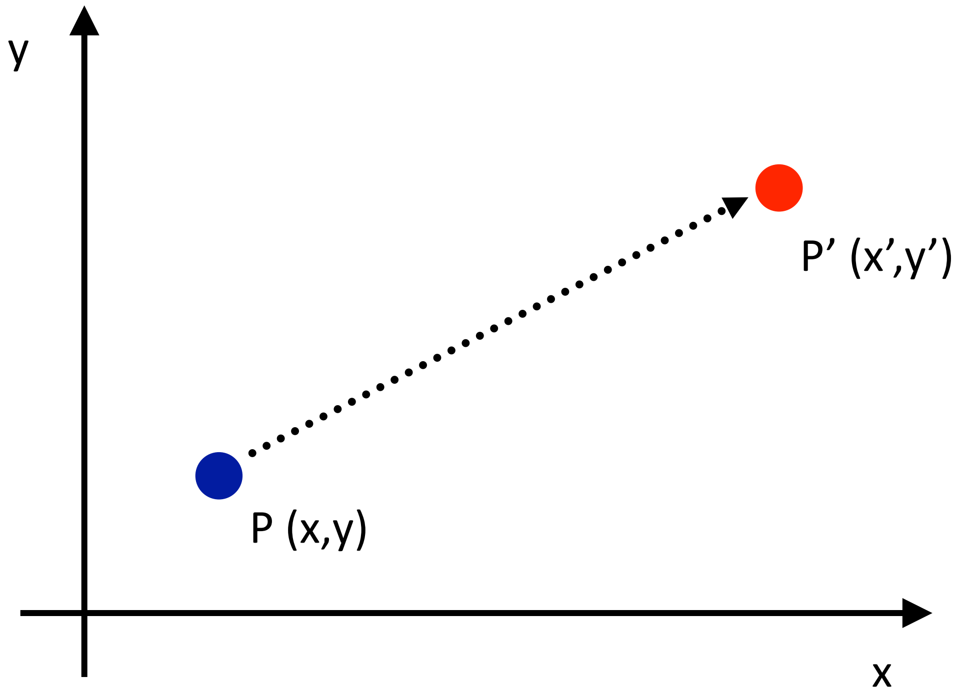
Transformações geométricas em 2D

- Translação, Rotação e Mudança de escala
- Coordenadas homogéneas
- Composição de transformações

Transformações geométricas em 3D

- Extensão de 2D para 3D

Translação

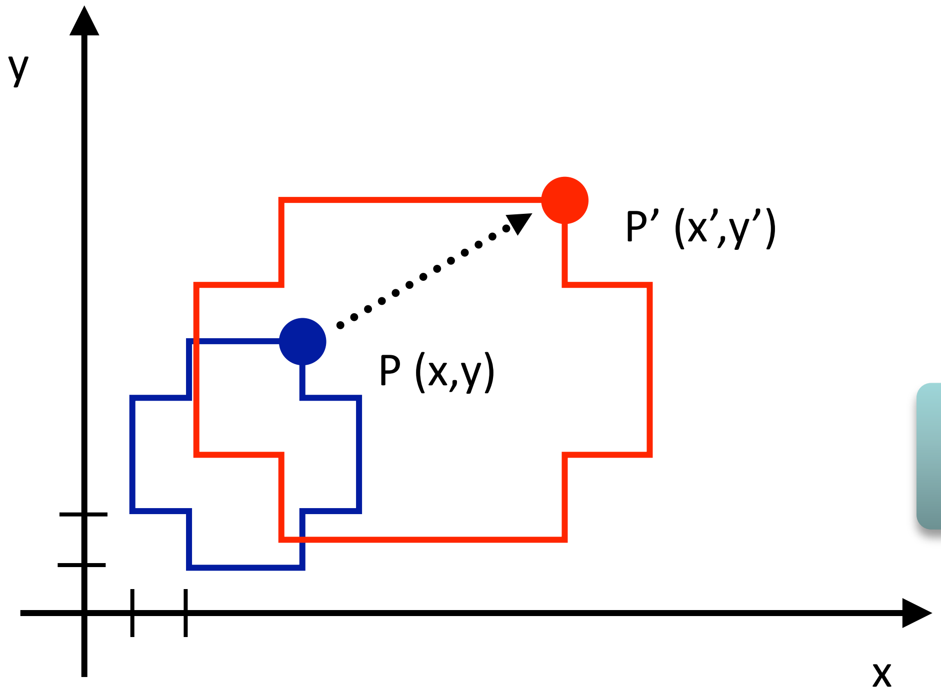


$$\begin{cases} x' = x + t_x \\ y' = y + t_y \end{cases}$$

Matricialmente

$$P' = M + P \quad \Leftrightarrow \quad \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t_x \\ t_y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Mudança de escala relativamente à origem (*scaling*)



$$\begin{cases} x' = x * s_x \\ y' = y * s_y \end{cases}$$

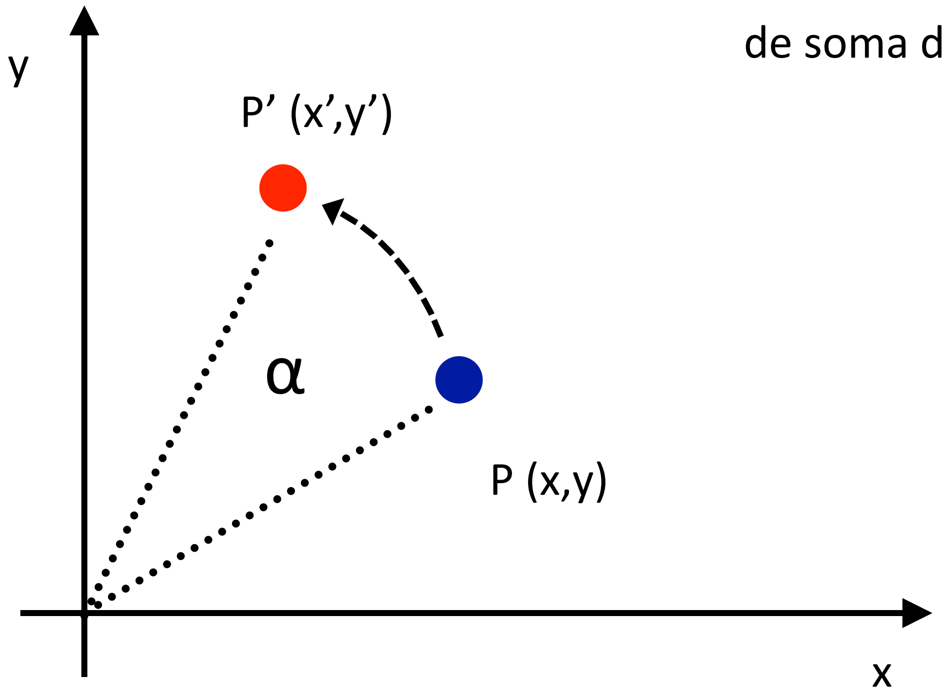
Mudança uniforme de escala — Quando os factores s_x e s_y são iguais

Valor do factor de escala
- Se s > 1, amplia
- Se 0 < s < 1, reduz
- Se < 0, implica uma reflexão

Matricialmente

$$P' = M \cdot P \quad \Leftrightarrow \quad \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_x & 0 \\ 0 & s_y \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Rotação relativamente à origem



Com base nas fórmulas trigonométricas de soma de ângulos obtém-se:

$$\begin{cases} x' = x * \cos\alpha - y * \sin\alpha \\ y' = x * \sin\alpha + y * \cos\alpha \end{cases}$$

Matricialmente

$$P' = M \cdot P \quad \Leftrightarrow \quad \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Obs.: Ângulos positivos são medidos no sentido contrário ao dos ponteiros do relógio, e.g. de x para y

Transformação geométrica de uma figura

Transformação dos pontos

- Todos os pontos/vértices que são parte integrante de uma figura são sujeitos à transformação geométrica pretendida
- A aplicação de várias transformações geométricas elementares implica que elas sejam sucessivamente aplicadas a todos os pontos
- No entanto, as operações sucessivas podem ser concatenadas de modo a que a transformação resultante global só seja aplicada uma única vez a todos os pontos

Programa de demonstração

Exemplo

Rodar uma figura complexa definida por 10 000 pontos, seguindo-se uma mudança de escala. Se se pretende visualizar apenas o resultado final, em vez de calcular a localização intermédia dos pontos

1. $P_1 = R * P$
2. $P_2 = S * P_1$

tem-se, multiplicando uma única vez a matriz global pelo conjunto de pontos

$$P_2 = S * P_1 = S * (R * P) = M_t * P, \quad \text{com } M_t = S * R$$

Duas alterações hipotéticas a analisar:

1. Inclusão da transformação de translação
2. Número de operações elementares ser ainda maior

Recapitulando, para um ponto P = $[x\ y]^T$, as três transformações elementares resumem-se a

$$P' = T + P$$
$$P' = S \cdot P$$
$$P' = R \cdot P$$

Se for utilizado o processo de concatenação de matrizes (quanto maior for o número de operações, maior será a eficiência computacional), então todas as operações devem ser caracterizadas apenas por multiplicação de matrizes.

No caso da translação, tal será possível se um ponto for definido através de um vector coluna com 3 elementos – ponto com coordenadas homogéneas – e a matriz for de dimensão 3x3

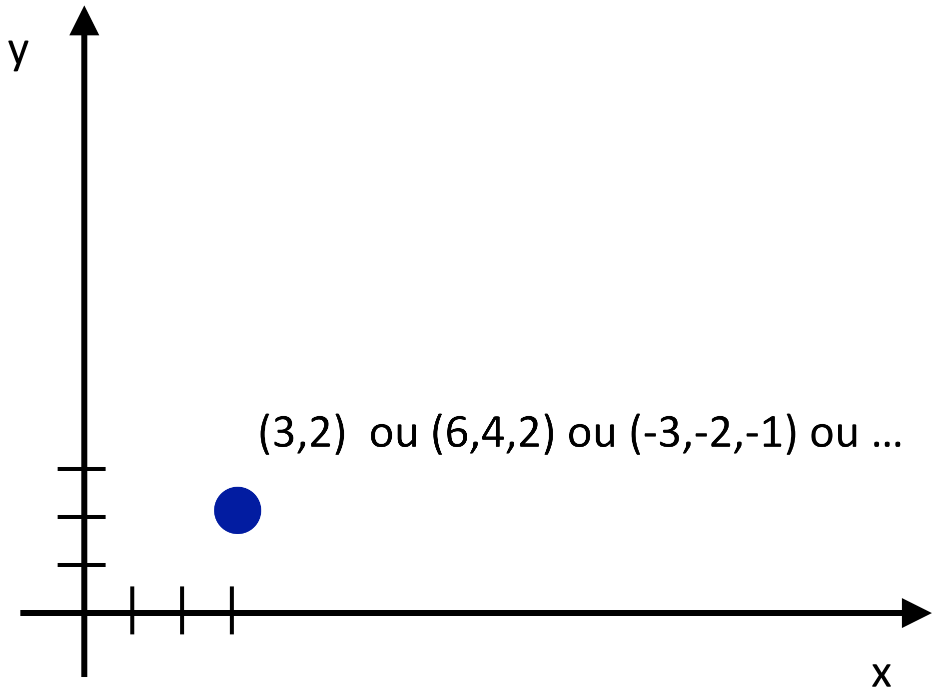
Coordenadas homogéneas

Um ponto 2D em coordenadas homogéneas pode ser interpretado como um ponto localizado num plano *z = w* , *w* ≠ 0, no espaço 3D

$$P_c = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{em coordenadas homogéneas}} P_h = \begin{bmatrix} x_h \\ y_h \\ w_h \end{bmatrix}$$

É um conceito eventualmente pouco intuitivo mas computacionalmente bastante útil

Obs.: (x,y,0) representaria um ponto no infinito, mas (0,0,0) não é aceitável



Se dividirmos o ponto com coordenadas homogéneas P_h (x,y,w) por w, $w \neq 0$, obtemos o ponto cartesiano P_c $(x/w, y/w)$

Por exemplo, (6,4,2) e (-3,-2,-1) referenciam o mesmo lugar geométrico: o ponto cartesiano (3,2)

Matriz de transformação composta

$$P' = M \cdot P \quad \Leftrightarrow \quad \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ w' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ w \end{bmatrix}$$

$$T(t_x, t_y) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & t_x \\ 0 & 1 & t_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Composição de transformações elementares

$$R(\alpha) = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$S(s_x, s_y) = \begin{bmatrix} s_x & 0 & 0 \\ 0 & s_y & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

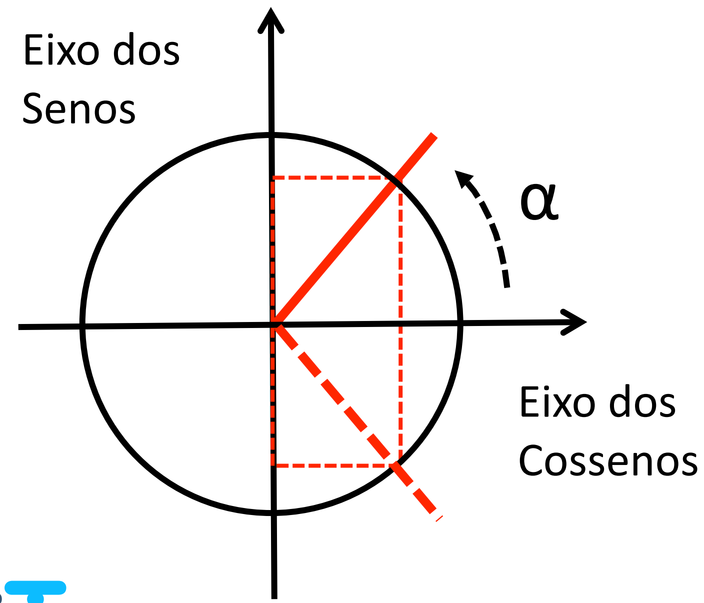
Transformações inversas em 2D

$$T\left(t_x, t_y\right) \xrightarrow{inversa} T\left(-t_x, -t_y\right)$$

$$S\left(s_x, s_y\right) \xrightarrow{inversa} S\left(1/s_x, 1/s_y\right)$$

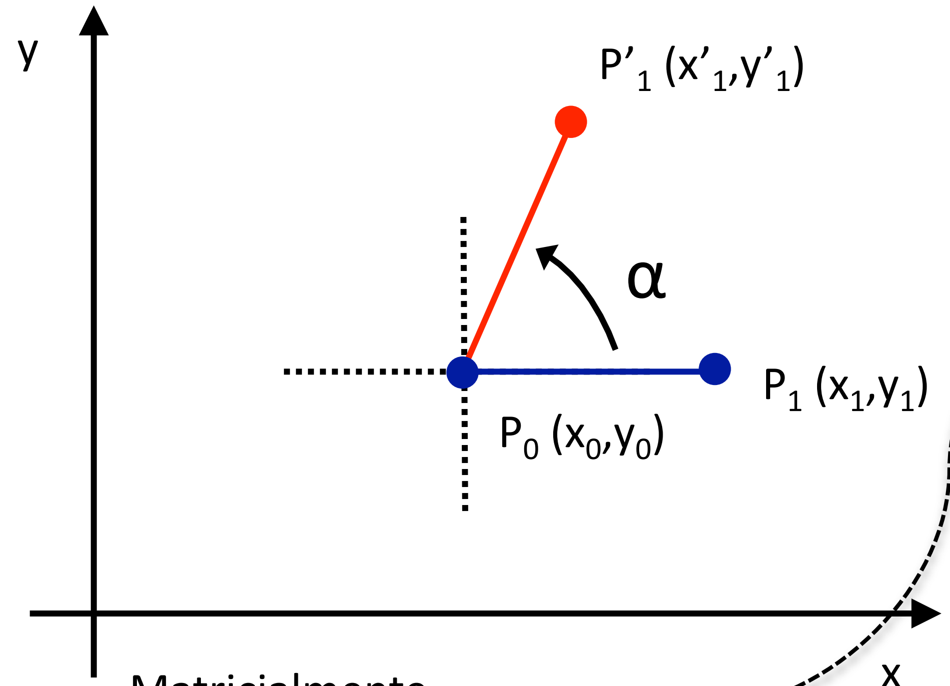
$$R\left(\alpha\right) \xrightarrow{inversa} R\left(-\alpha\right)$$

Obs.:



$$\begin{cases} \cos(\alpha) = \cos(-\alpha) \\ \sin(\alpha) = -\sin(-\alpha) \end{cases}$$

Exemplo: Rodar um segmento de recta de um ângulo alfa relativamente a um das suas extremidades P_0



Sequência de operações:

1. Translação de modo a posicionar P_0 na origem
2. Rotação do ângulo alfa
3. Translação de modo a colocar P_0 na posição inicial

Matricialmente

$$P' = M \cdot P = T(x_0, y_0) \cdot R(\alpha) \cdot T(-x_0, -y_0) \cdot P \quad \Leftrightarrow$$

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ w' \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & x_0 \\ 0 & 1 & y_0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & -x_0 \\ 0 & 1 & -y_0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\text{Matriz de transformação } M} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ w \end{bmatrix}$$

Sequência de transformações

As matrizes são formas convenientes e eficientes de representar uma sequência de transformações geométricas, pois:

a) É uma representação geral
b) A operação de multiplicação de matrizes pode ser feita ao nível de hardware

A ordem das operações é relevante. Por exemplo, qual seria o resultado final no exemplo anterior se fosse invertida a ordem das duas operações iniciais?

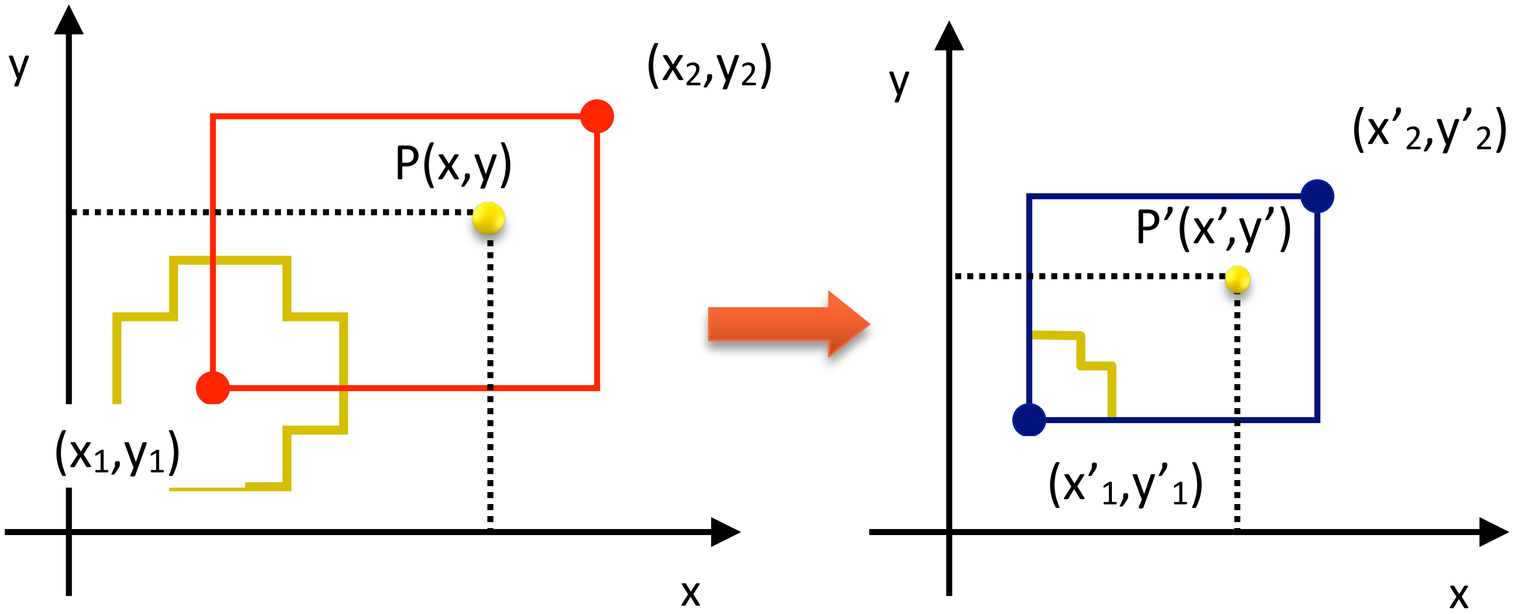
- Multiplicação de matrizes
  - Associativa
  - Em geral, não é comutativa

É comutativa se *M* for composta por (4 casos independentes)

1. Duas rotações
2. Duas mudanças de escala
3. Duas translações
4. Rotação e mudança de escala uniforme

Relembrando a transformação de enquadramento Janela-Visor

Janela, em coordenadas (x,y) do utilizador   Visor, em coordenadas (x', y') do dispositivo



$$\begin{cases} \dfrac{x_2 - x_1}{x - x_1} = \dfrac{x_2' - x_1'}{x' - x_1'} \\[2ex] \dfrac{y_2 - y_1}{y - y_1} = \dfrac{y_2' - y_1'}{y' - y_1'} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x' = x_1' + \dfrac{(x - x_1)(x_2' - x_1')}{(x_2 - x_1)} \\[2ex] y' = y_1' + \dfrac{(y - y_1)(y_2' - y_1')}{(y_2 - y_1)} \end{cases}$$

1

1

$$\begin{cases} \dfrac{x_2 - x_1}{x - x_1} = \dfrac{x'_2 - x'_1}{x' - x'_1} \\ \dfrac{y_2 - y_1}{y - y_1} = \dfrac{y'_2 - y'_1}{y' - y'_1} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x' = x'_1 + (x - x_1)\dfrac{(x'_2 - x'_1)}{(x_2 - x_1)} \\ y' = y'_1 + (y - y_1)\dfrac{(y'_2 - y'_1)}{(y_2 - y_1)} \end{cases}$$

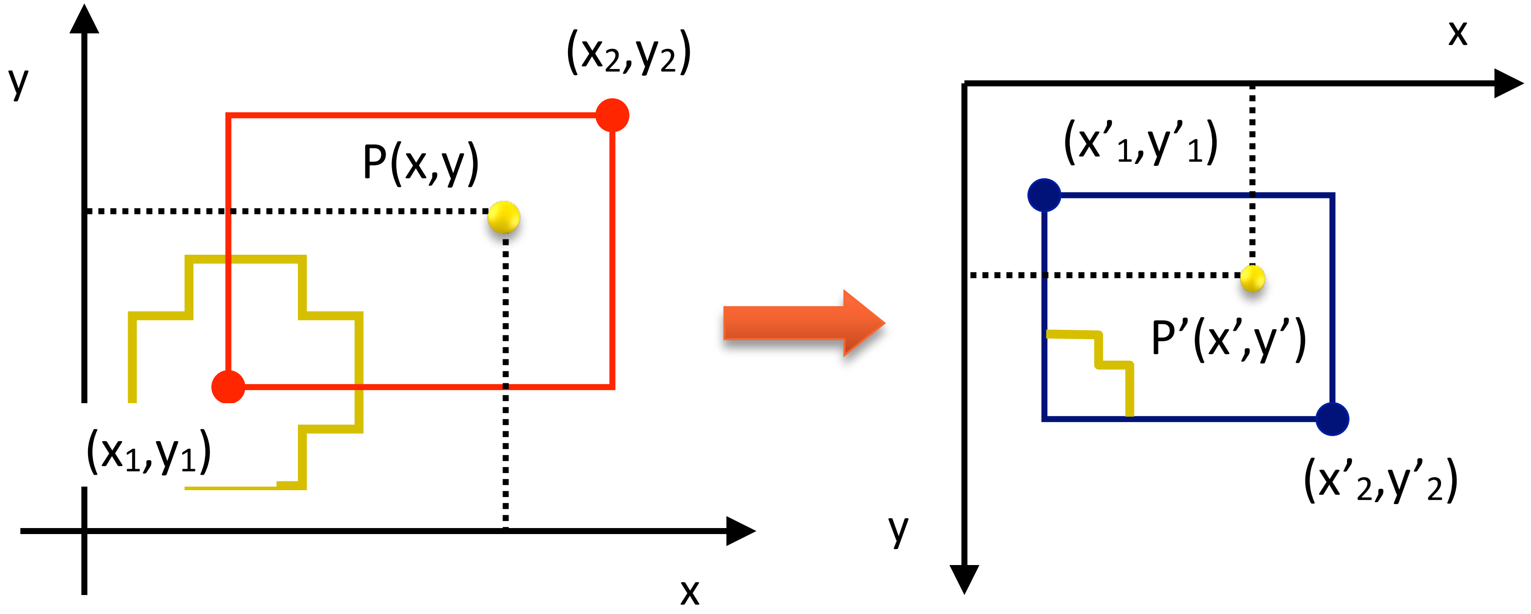
Matricialmente, com coordenadas homogéneas

$$P' = M \cdot P \Leftrightarrow$$

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & x'_1 \\ 0 & 1 & y'_1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \dfrac{x'_2 - x'_1}{x_2 - x_1} & 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{y'_2 - y'_1}{y_2 - y_1} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & -x_1 \\ 0 & 1 & -y_1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} \Leftrightarrow$$

$$P' = T(x'_1, y'_1) \cdot S\left(\frac{x'_2 - x'_1}{x_2 - x_1}, \frac{y'_2 - y'_1}{y_2 - y_1}\right) \cdot T(-x_1, -y_1) \cdot P$$

Caso do enquadramento para o ecrã (origem no canto superior esquerdo)



$$\begin{cases} \dfrac{x_2 - x_1}{x - x_1} = \dfrac{x'_2 - x'_1}{x' - x'_1} \\[2ex] \dfrac{y_2 - y_1}{y - y_1} = \dfrac{y'_2 - y'_1}{y'_2 - y'} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x' = x'_1 + \dfrac{(x - x_1)(x'_2 - x'_1)}{(x_2 - x_1)} \\[2ex] y' = y'_2 - \dfrac{(y - y_1)(y'_2 - y'_1)}{(y_2 - y_1)} \end{cases}$$

2

$$\begin{cases} \dfrac{x_2 - x_1}{x - x_1} = \dfrac{x_2' - x_1'}{x' - x_1'} \\[2ex] \dfrac{y_2 - y_1}{y - y_1} = \dfrac{y_2' - y_1'}{y_2' - y'} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x' = x_1' + (x - x_1)\dfrac{(x_2' - x_1')}{(x_2 - x_1)} \\[2ex] y' = y_2' - (y - y_1)\dfrac{(y_2' - y_1')}{(y_2 - y_1)} \end{cases}$$

Matricialmente, com coordenadas homogéneas

$$P' = M \cdot P \Leftrightarrow$$

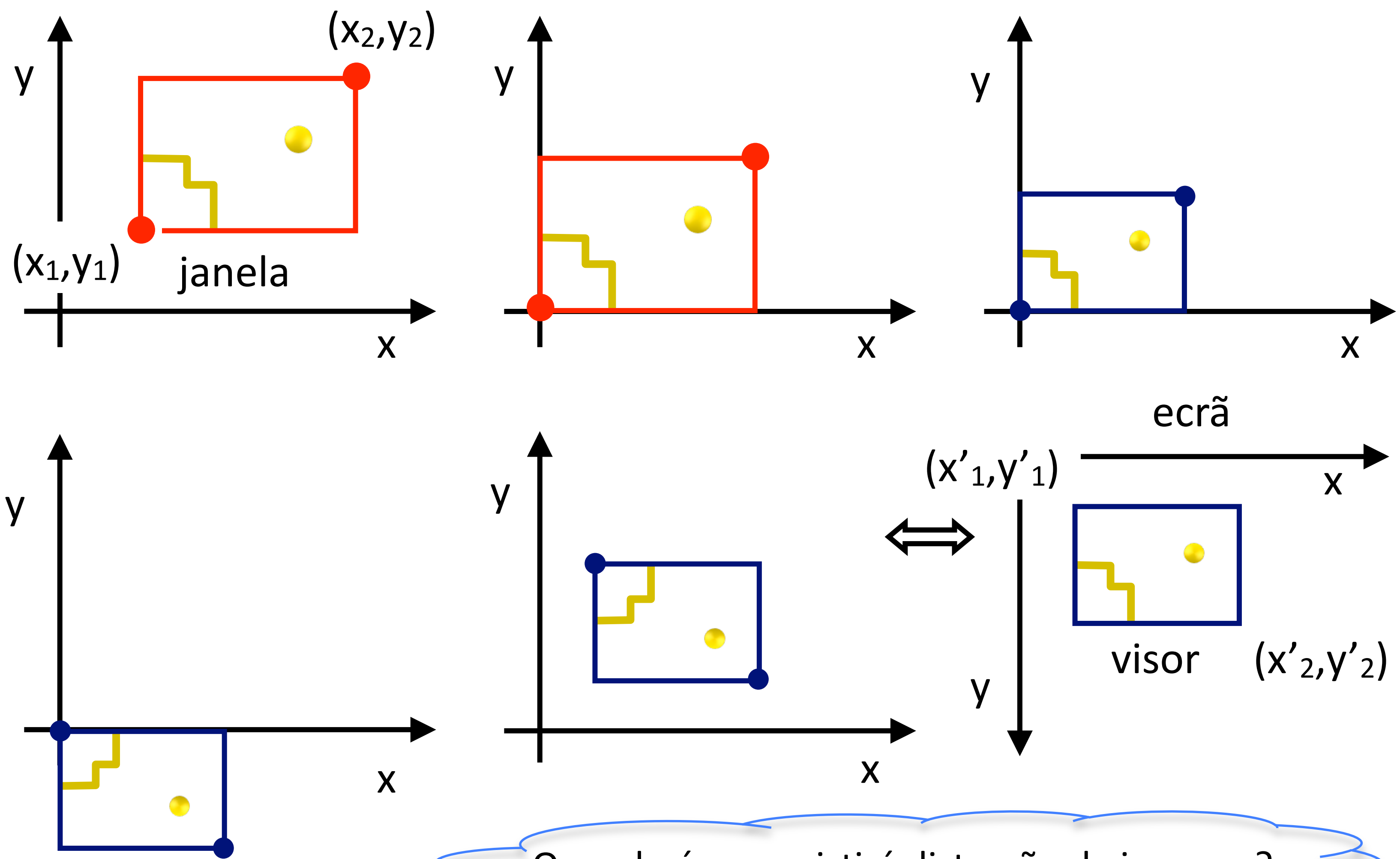
$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & x'_1 \\ 0 & 1 & y'_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \dfrac{x_2' - x_1'}{x_2 - x_1} & 0 & 0 \\ 0 & -\dfrac{y_2' - y_1'}{y_2 - y_1} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & -x_1 \\ 0 & 1 & -y_1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} \Leftrightarrow$$

$$P' = T(x'_1, y'_2) \cdot S\left(\frac{x_2' - x_1'}{x_2 - x_1}, -\frac{y_2' - y_1'}{y_2 - y_1}\right) \cdot T(-x_1, -y_1) \cdot P$$

Confirmação da sequência de operações geométricas no enquadramento para o ecrã

2

$$P' = M \cdot P = \quad T\left(x'_1, y'_2\right) \cdot S\left(\frac{x'_2 - x'_1}{x_2 - x_1}, \; -\frac{y'_2 - y'_1}{y_2 - y_1}\right) \cdot T\left(-x_1, \; -y_1\right) \; \cdot \; P$$



Quando é que existirá distorção da imagem?

Propriedades das transformações

Transformação linear

- Qualquer sequência de operações de rotação e mudança de escala é uma transformação linear
- A origem continua a ser origem
- As linhas continuam a ser linhas
- O paralelismo entre linhas mantém-se
- A proporcionalidade mantém-se

Transformação afim

- Uma combinação entre transformações lineares e operações de translação
- A única alteração de propriedade comparativamente a uma transformação linear reside na origem, que deixa de o ser

Sumário

Transformações geométricas em 2D

- Translação, Rotação e Mudança de escala
- Coordenadas homogéneas
- Composição de transformações

Transformações geométricas em 3D

- Extensão de 2D para 3D

Extensão de 2D para 3D

Todos os conceitos estudados para 2D são directamente ajustáveis para 3D. Por exemplo, um ponto agora é definido por um vector coluna de 4 elementos x, y, z e w, e as matrizes de transformação são de dimensão 4x4

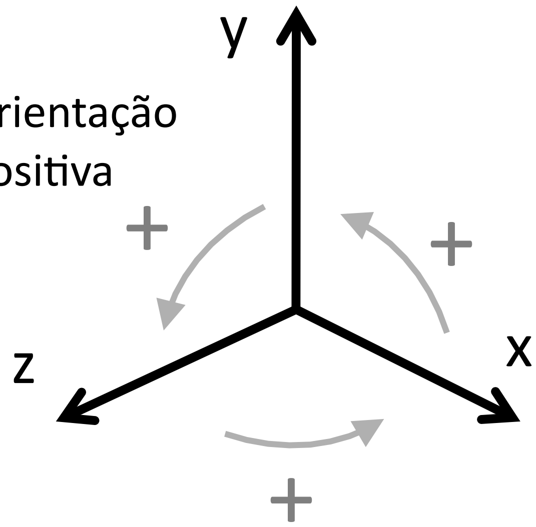
Em 3D

$$P' = M \cdot P \quad \Leftrightarrow \quad \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ w' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \quad & \quad & \quad & \quad \\ & & & \\ & & & \\ & & & \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix}$$

Matriz de transformação *M* de dimensão 4x4, a qual pode ser obtida por composição de transformações elementares

Transformações geométricas elementares em 3D

Orientação positiva



Translação

$$T\left(t_x,t_y,t_z\right)=\begin{bmatrix}1&0&0&t_x\\0&1&0&t_y\\0&0&1&t_z\\0&0&0&1\end{bmatrix}$$

Mudança de escala

$$S\left(s_x,s_y,s_z\right)=\begin{bmatrix}s_x&0&0&0\\0&s_y&0&0\\0&0&s_z&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}$$

Rotação relativamente aos eixos coordenados

$$R_x\left(\alpha\right)=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&\cos\alpha&-\sin\alpha&0\\0&\sin\alpha&\cos\alpha&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}\quad R_y\left(\beta\right)=\begin{bmatrix}\cos\beta&0&\sin\beta&0\\0&1&0&0\\-\sin\beta&0&\cos\beta&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}\quad R_z\left(\gamma\right)=\begin{bmatrix}\cos\gamma&-\sin\gamma&0&0\\\sin\gamma&\cos\gamma&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}$$

Transformações inversas em 3D

$$T\left(t_x, t_y, t_z\right) \xrightarrow{inversa} T\left(-t_x, -t_y, -t_z\right)$$

$$S\left(s_x, s_y, s_z\right) \xrightarrow{inversa} S\left(1/s_x, 1/s_y, 1/s_z\right)$$

$$R\left(\alpha\right) \xrightarrow{inversa} R\left(-\alpha\right)$$