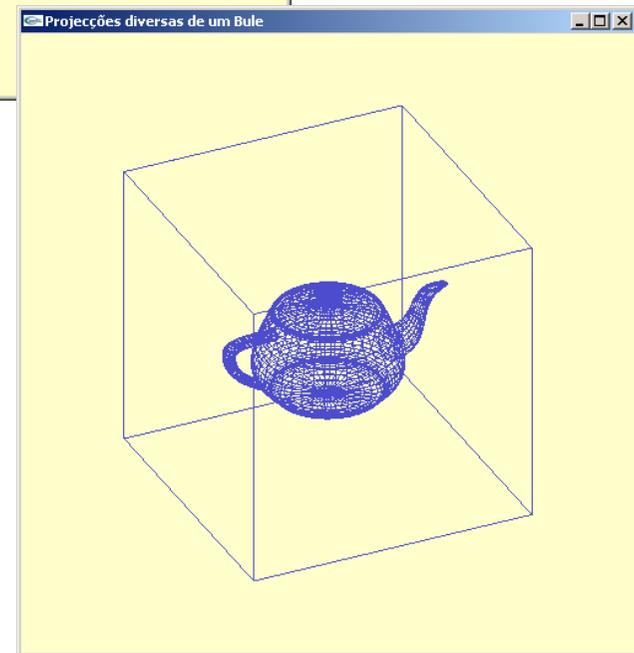
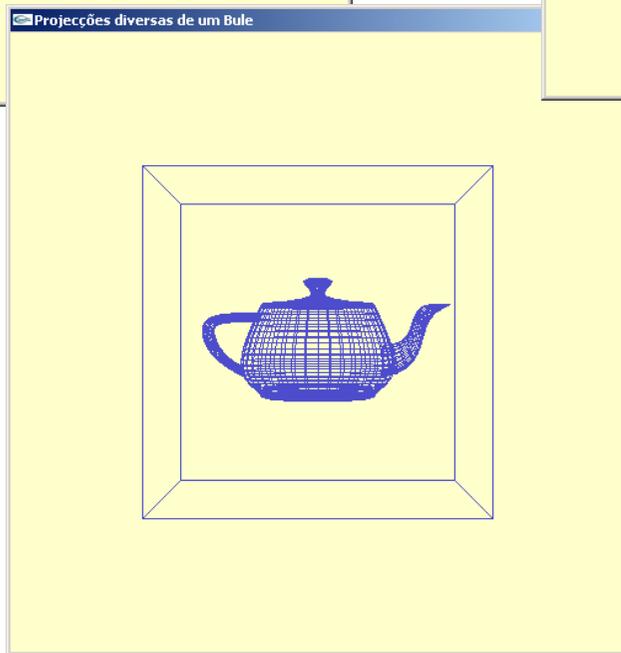
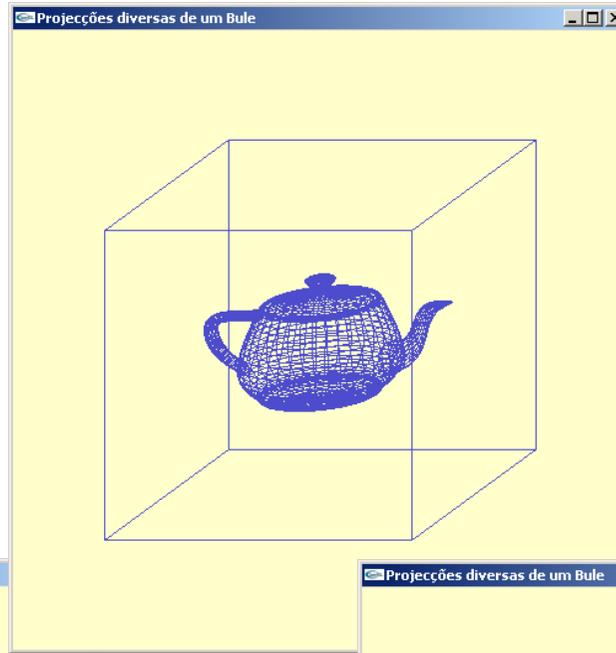


Projeções Geométricas planas

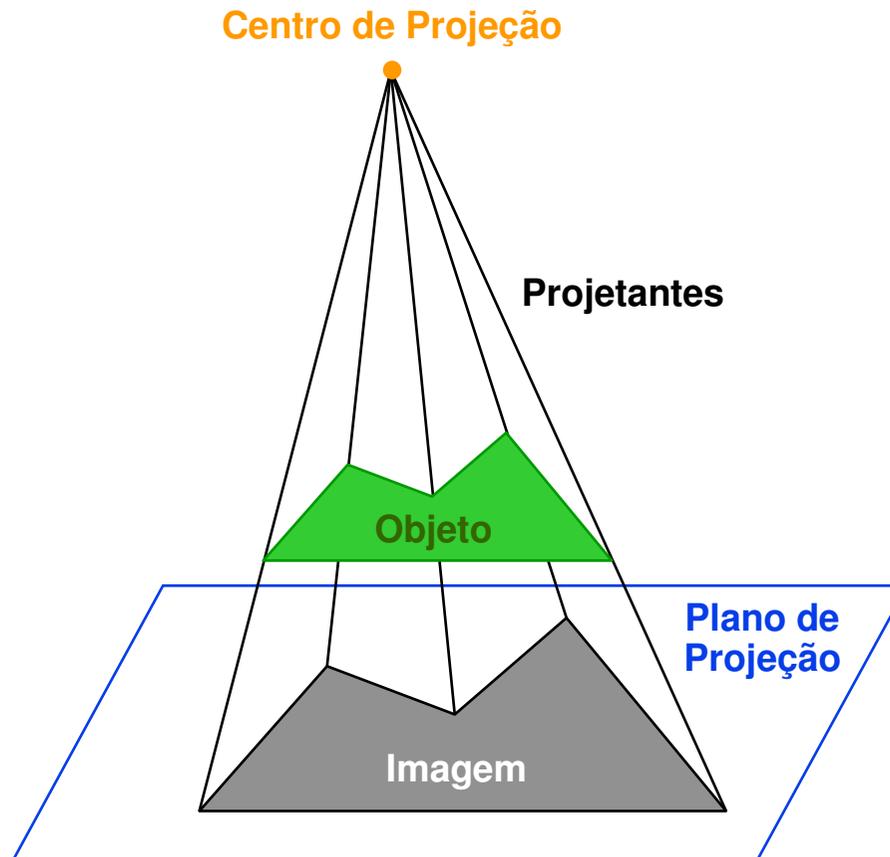
A superfície de projeção é um plano.

As projetantes são linhas retas.

A (imagem da) projeção de um ponto é a intersecção da projetante com o plano.

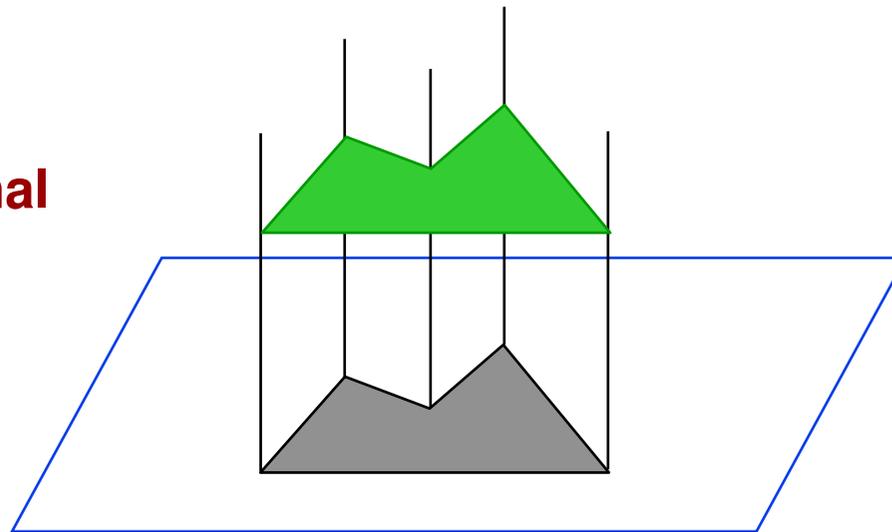


Projeção Perspectiva

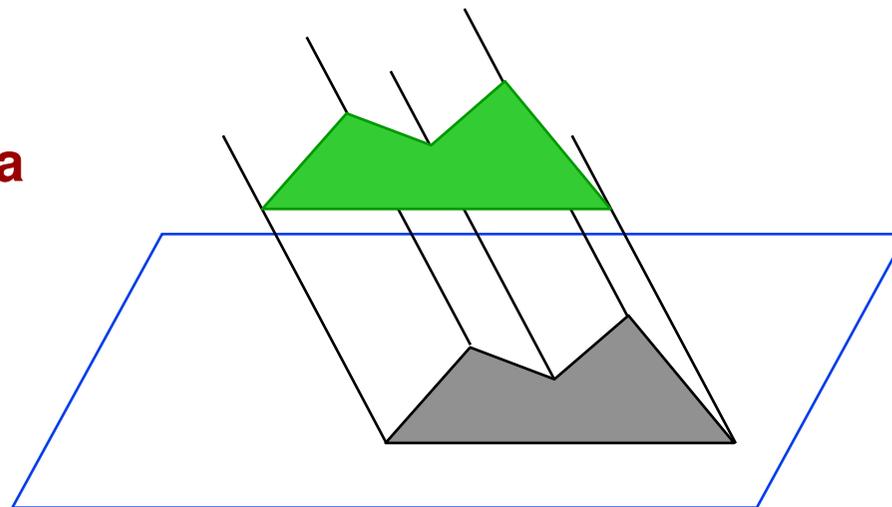


Projeção Paralela

Ortogonal

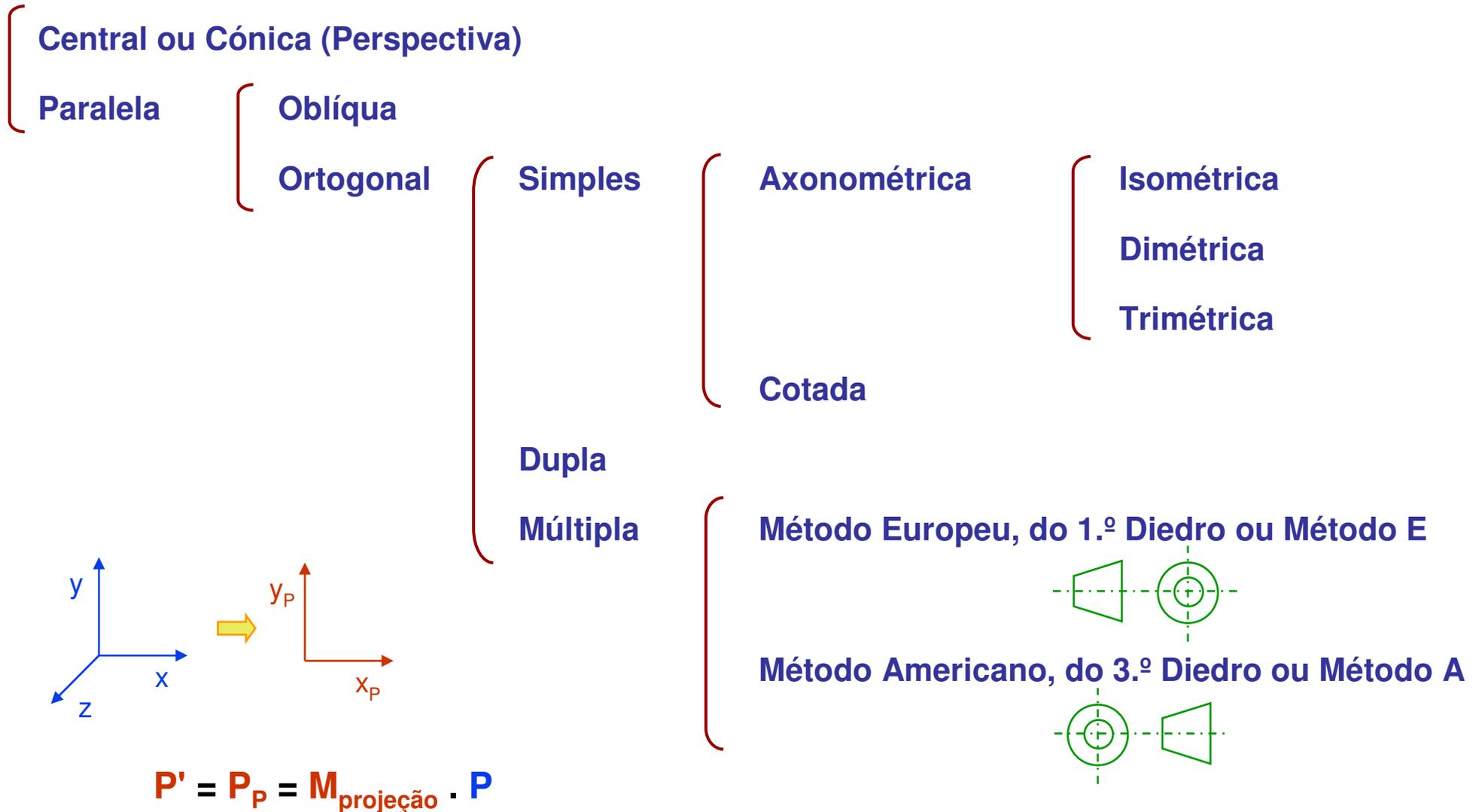


Oblíqua



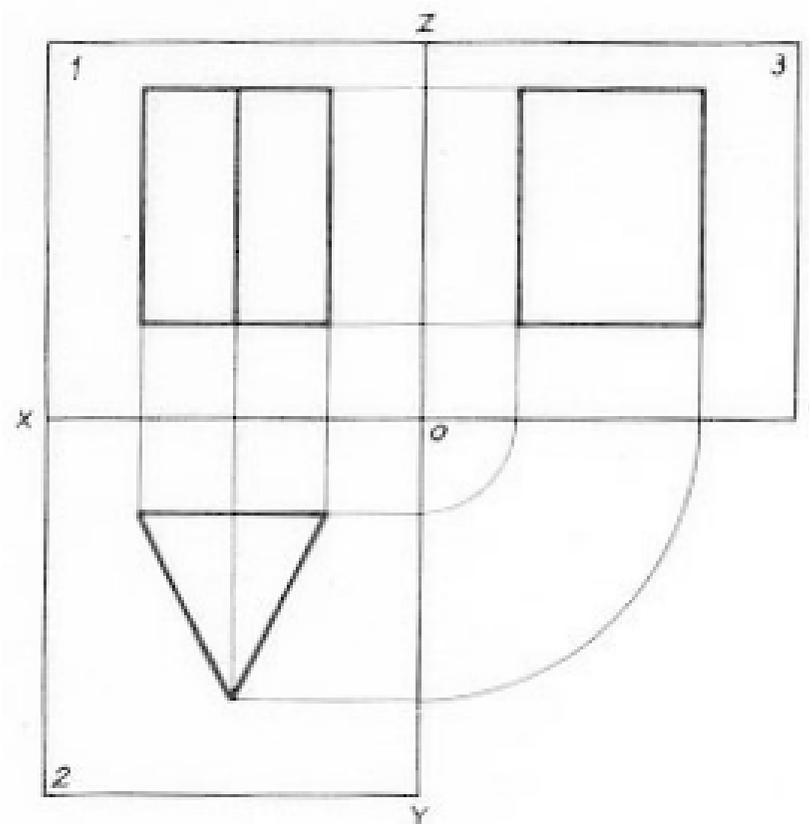
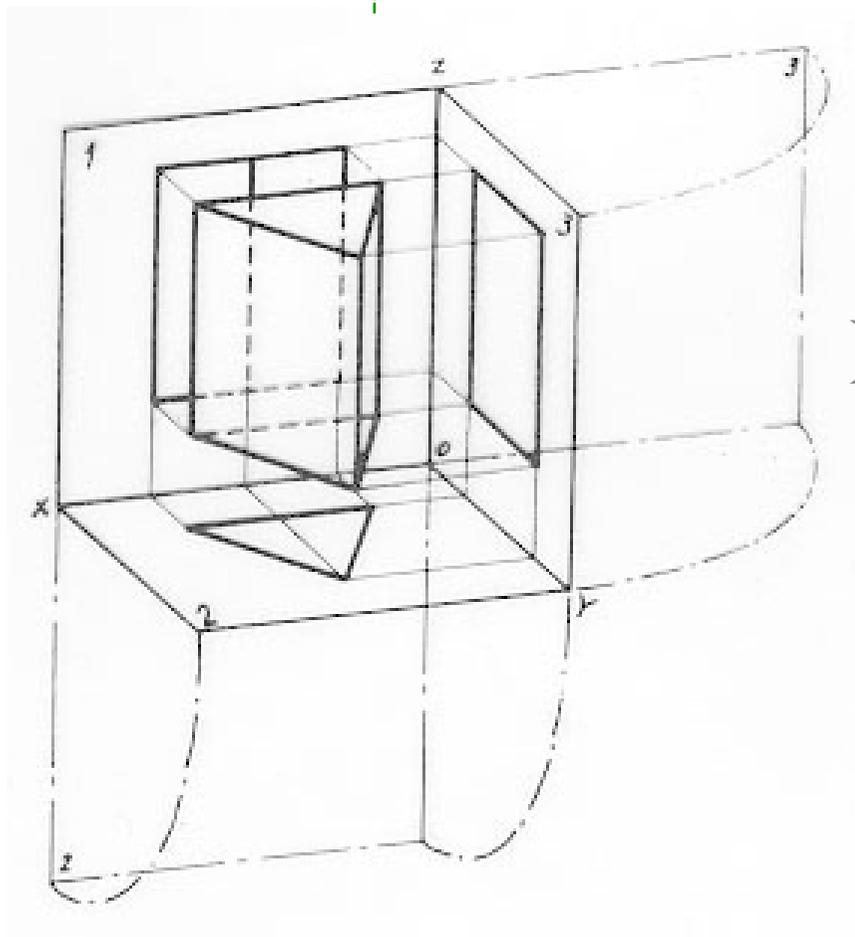
Nota: É um caso particular da Projeção Perspectiva

UMA CLASSIFICAÇÃO DAS PROJEÇÕES NO DESENHO TÉCNICO



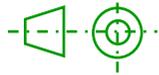
PROJEÇÕES ORTOGONAIS MÚLTIPLAS

(Método Europeu)



PROJEÇÕES ORTOGONAIS MÚLTIPLAS

(Método Europeu)



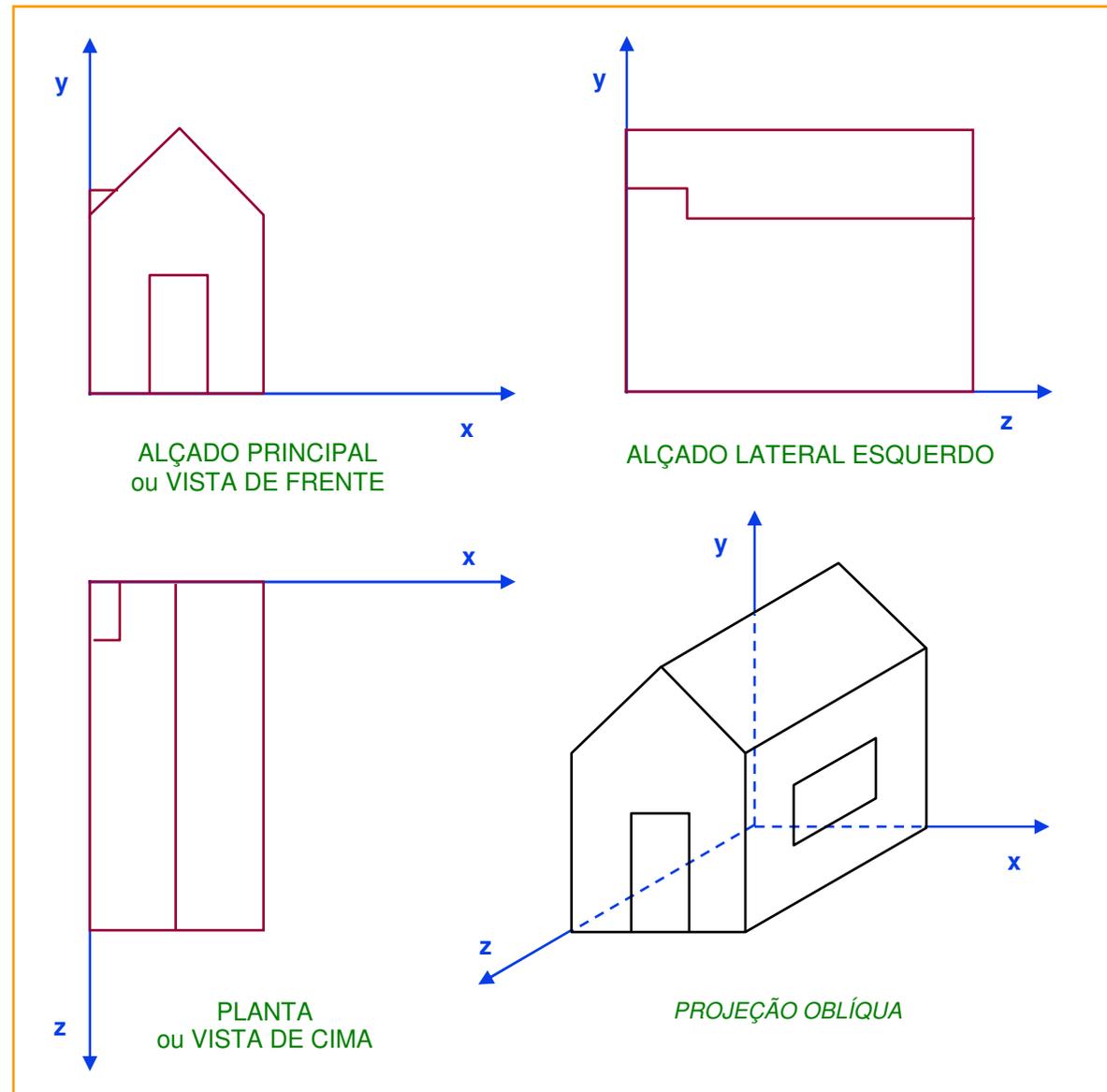
As diferenças entre os métodos A e E baseiam-se nas relações entre:

- (1) Observador
- (2) Objeto
- (3) Plano de projeção.

Método A: (3) entre (1) e (2)

Método E: (2) entre (1) e (3)

É usual aproveitar-se o quadrante livre para uma representação do objeto noutra tipo de projeção (oblíqua, no exemplo ao lado).



Matemática da PROJEÇÃO ORTOGONAL

$$P' = M_{\text{ORT}} \cdot P$$

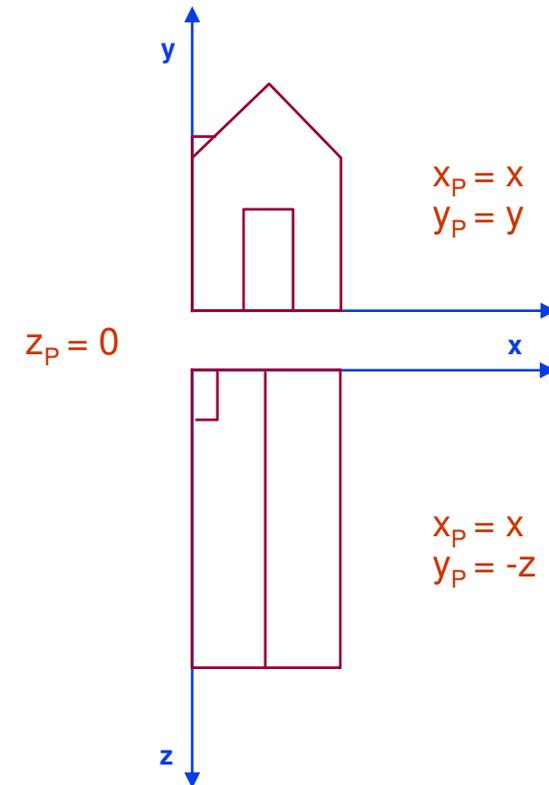
Alçado Principal:

$$M_{\text{ORT}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Planta:

$$M_{\text{ORT}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

etc.



Prós e contras:

- + Mostra as dimensões exatas das faces paralelas ao plano de projeção.
- Pode ser difícil avaliar a forma tridimensional do objecto.

Composição de transformações na PROJEÇÃO ORTOGONAL

Conhecendo-se a matriz M_{ORT} do Alçado Principal e recordando que

$$R_x(\theta) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

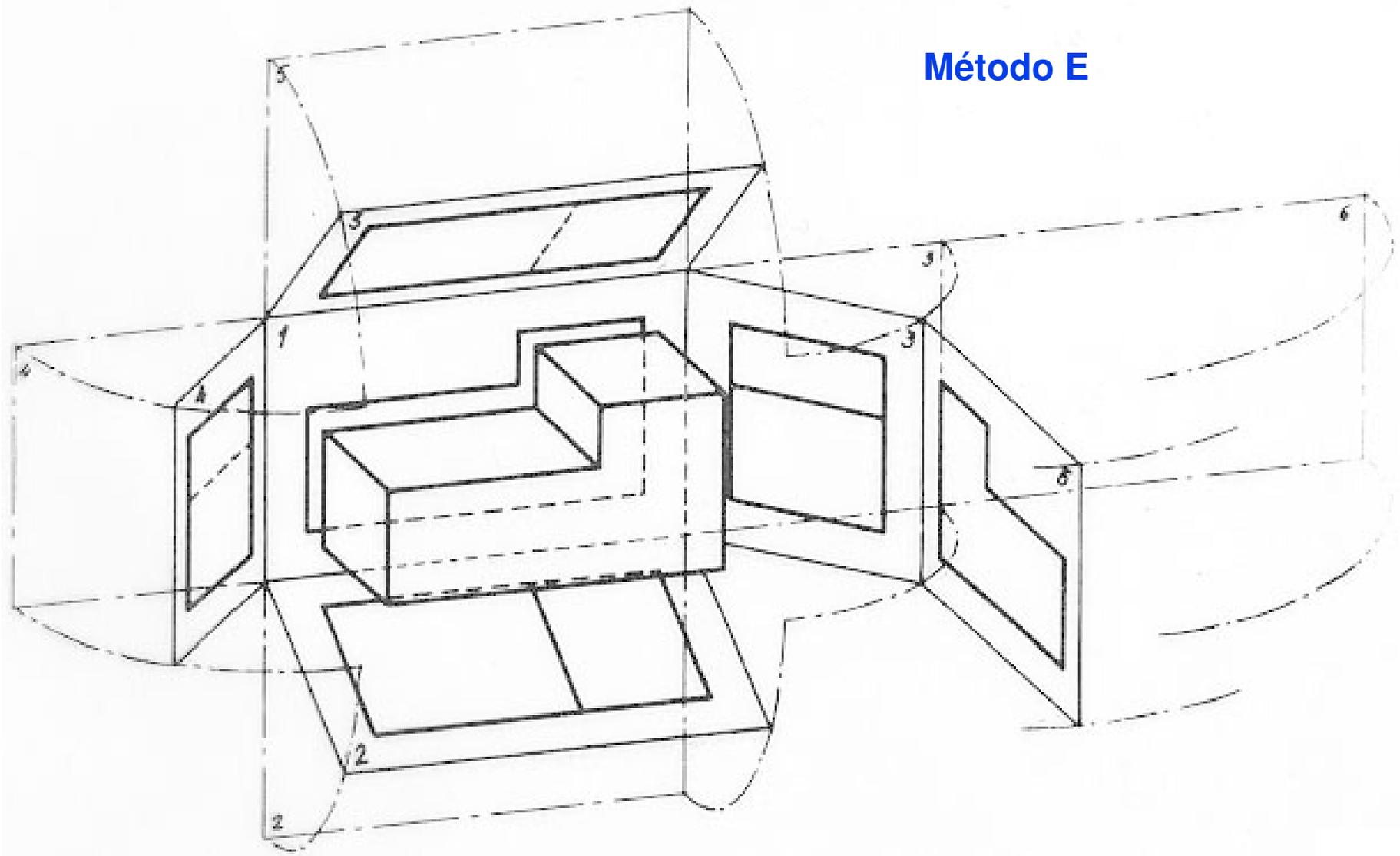
facilmente se prova que $M_{ORT} \cdot R_x(90^\circ)$ coincide com a matriz da Planta:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

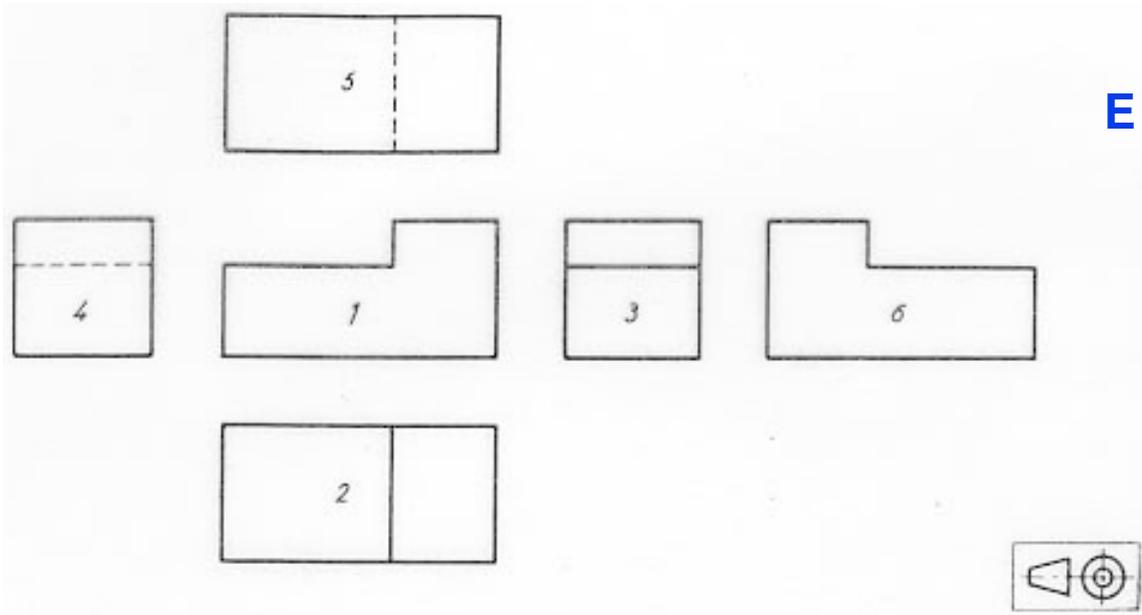
Conclusão:

A interpretação geométrica com base em rotações é uma solução alternativa mais simples à dedução matemática direta de cada matriz de projeção, bastando ter-se a matriz do alçado principal e rodar-se previamente o objeto em torno do eixo adequado.

Método E



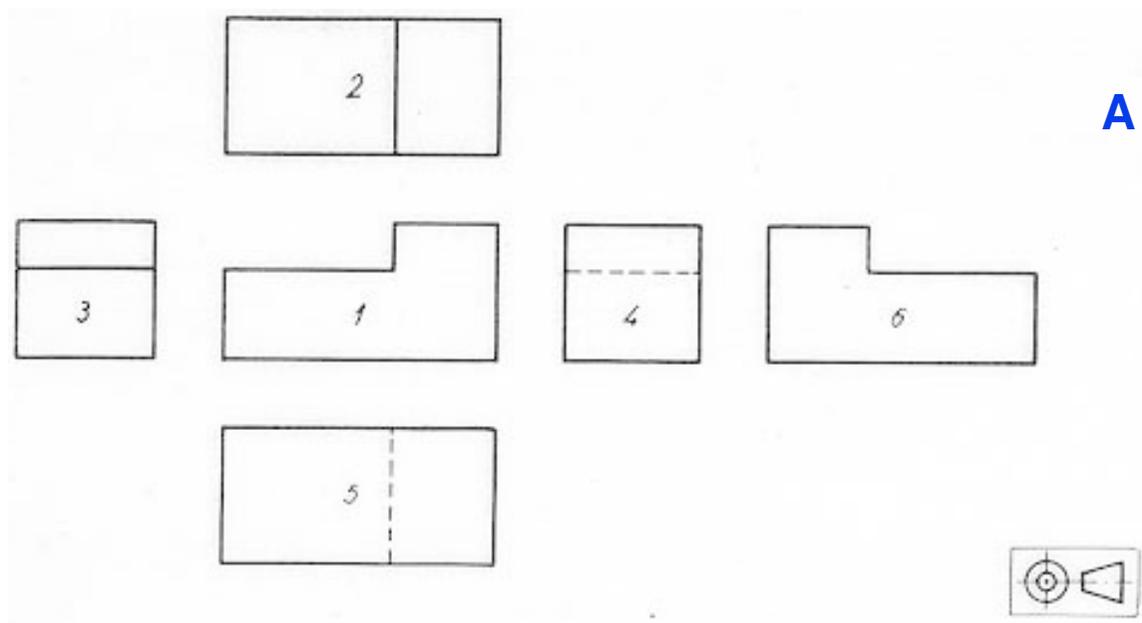
E



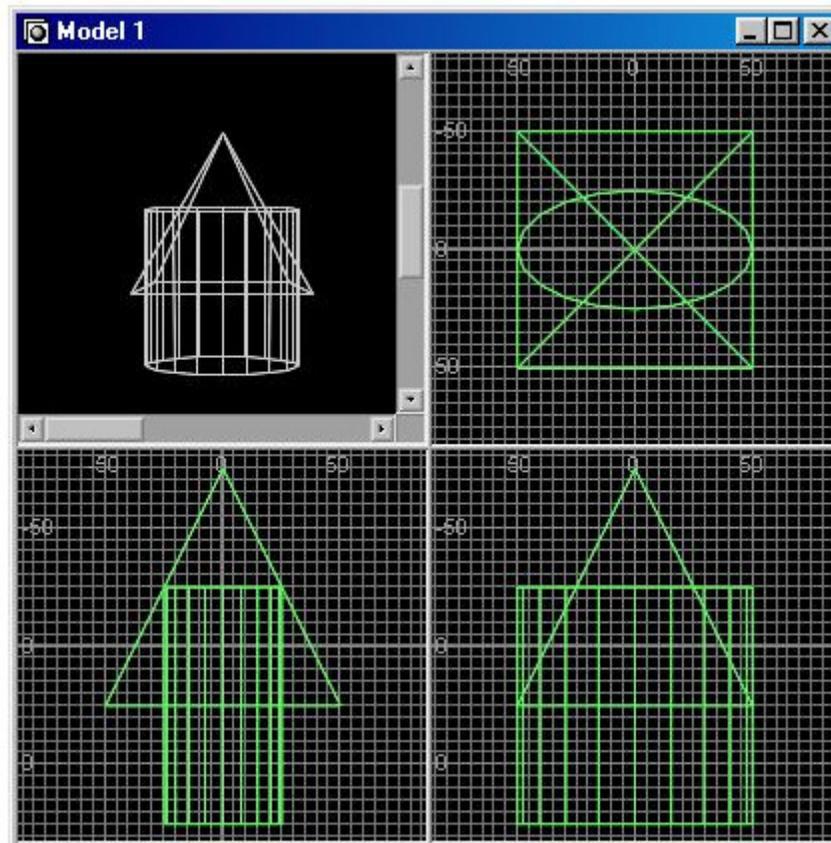
- 1. Alçado principal
- 2. Planta
- 3. Alçado lateral esquerdo
- 4. Alçado lateral direito
- 5. Vista de baixo
- 6. Alçado de tardez *

* Indiferente ficar à esquerda ou à direita

A

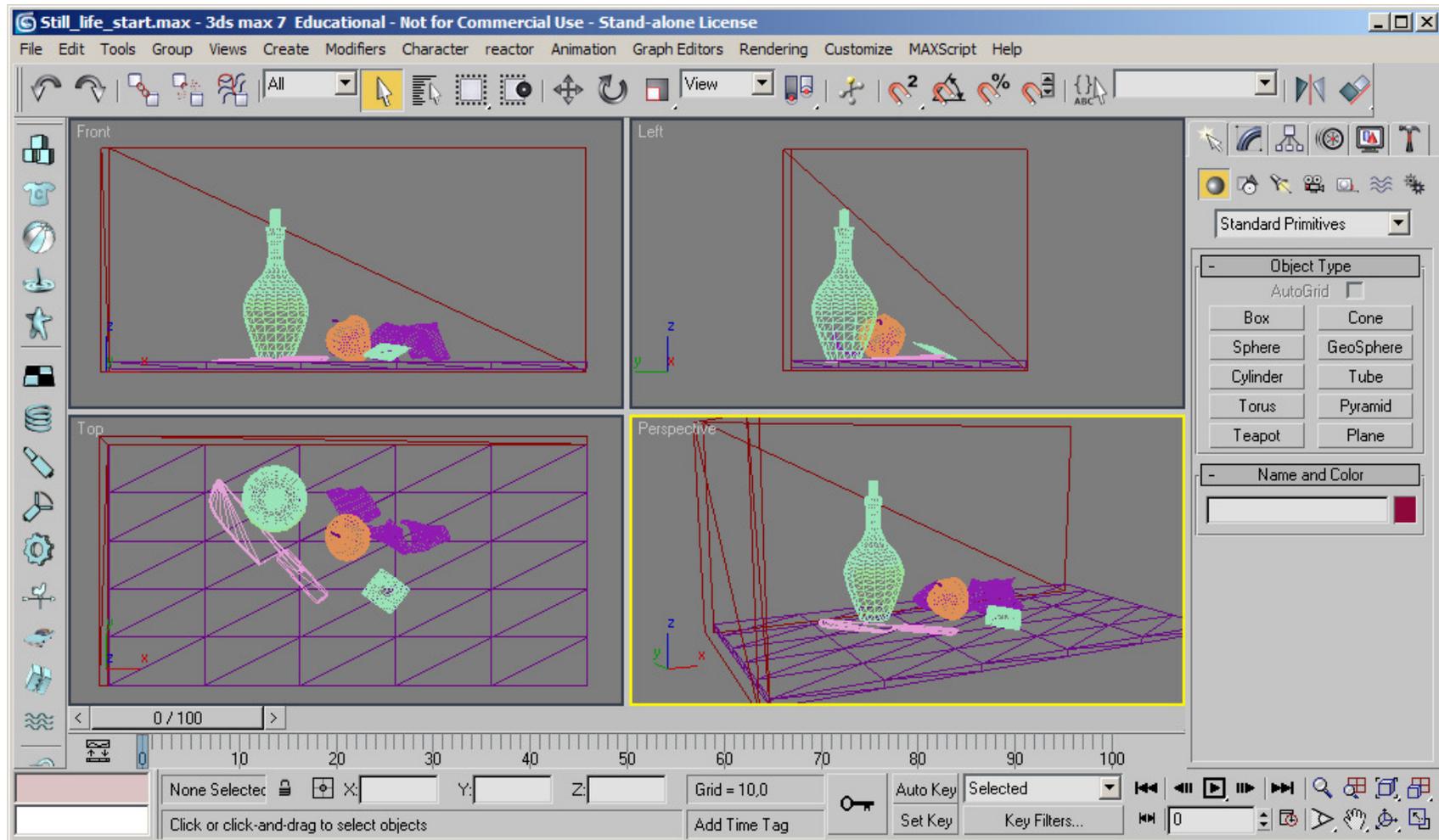


Método A



3D Flash Animator

Método E



3D Studio Max

OpenGL pipeline

Vertex Transformation

Vertex $\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \\ W \end{bmatrix}$

$R_Y(45^\circ) \cdot S(2,1,2)$

Exemplos em C

```
glMatrixMode(GL_MODELVIEW);  
glLoadIdentity();  
glRotated(45, 0.0, 1.0, 0.0);  
glScaled(2.0, 1.0, 2.0);
```

```
glMatrixMode(GL_PROJECTION);  
glLoadIdentity();  
glOrtho(x1, x2, y1, y2, z1, z2);  
glMultMatrixd(matrixProj);
```

Multiplicação à direita c/ a matriz corrente

Matriz 4x4 armazenada, por colunas, num vector

Necessário para definir o enquadramento

A ordem de escrita das matrizes MODELVIEW e PROJECTION num programa não altera a ordem de execução no *pipeline* de OpenGL

Modelview Matrix

Eye Coordinates

Projection Matrix

Clip Coordinates

Perspective Division

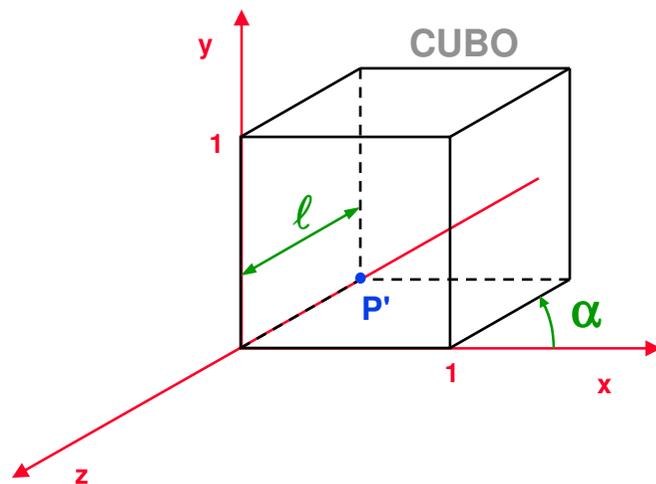
Normalized Device Coordinates

Viewport Transformation

Window Coordinates

DC

PROJEÇÃO OBLÍQUA



l – fator de redução ou de encurtamento (*Foreshortening Ratio*)

α – ângulo de fuga

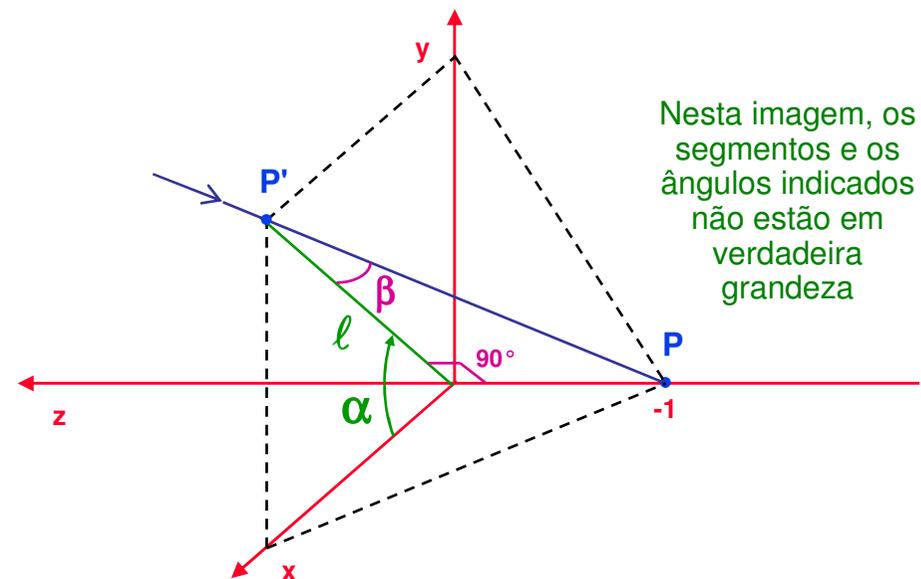
(valores medidos no espaço da imagem)

Plano de projeção: xy

$$P(0, 0, -1) \rightarrow P'(l \cos \alpha, l \sin \alpha, 0)$$

Direção de projeção:

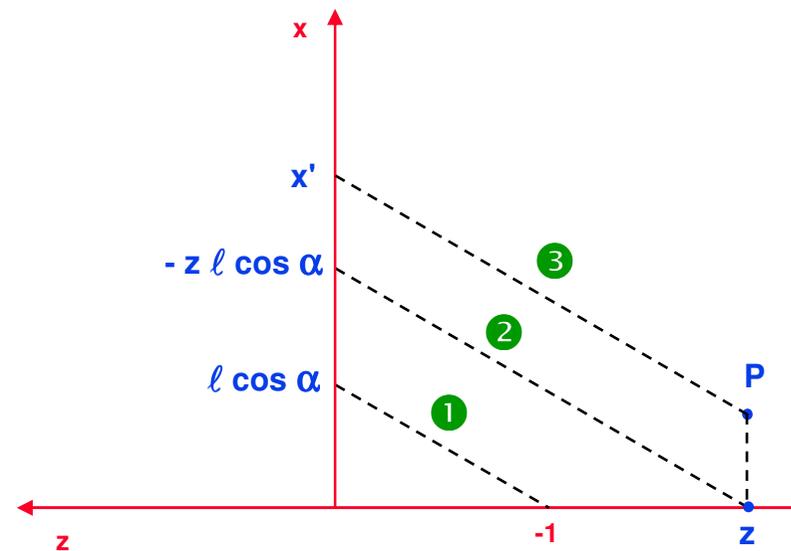
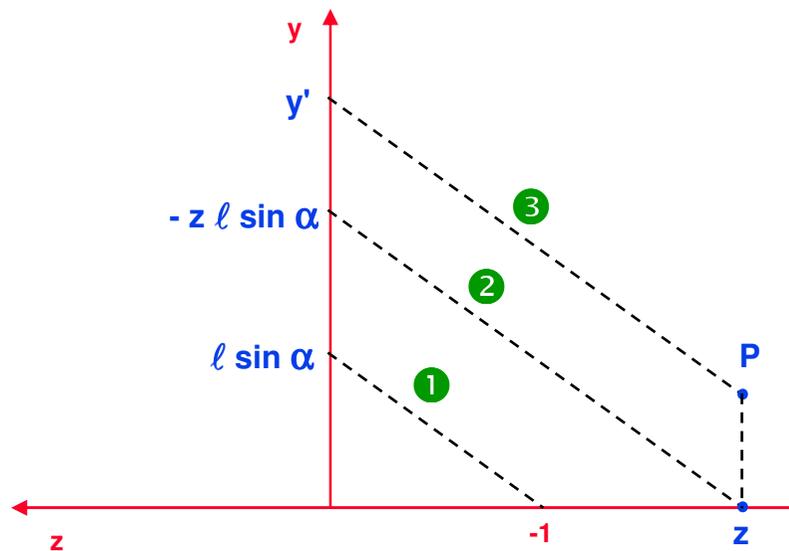
$$DOP = P - P' = \begin{bmatrix} -l \cos \alpha \\ -l \sin \alpha \\ -1 \end{bmatrix}$$



Nesta imagem, os segmentos e os ângulos indicados não estão em verdadeira grandeza

$$\textcircled{1} \quad P(0, 0, -1) \rightarrow P'(l \cos \alpha, l \sin \alpha, 0)$$

$$\textcircled{2} \quad P(0, 0, z) \rightarrow P'(-z l \cos \alpha, -z l \sin \alpha, 0)$$



Ponto genérico:

$$\textcircled{3} \quad P(x, y, z) \rightarrow P'(x - z l \cos \alpha, y - z l \sin \alpha, 0)$$



$$M_{\text{OBL}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -l \cos \alpha & 0 \\ 0 & 1 & -l \sin \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

As projeções oblíquas são determinadas/caracterizadas

- Pelo ângulo β que as projetantes fazem com o plano de projecção ($z=0$) (ℓ é função de β)
- Pela orientação das projetantes, independentemente do ângulo com o plano de projecção (embora a amplitude de α possa ser qualquer, habitualmente usam-se valores de 45° ou 30°).

Projeção CAVALEIRA:

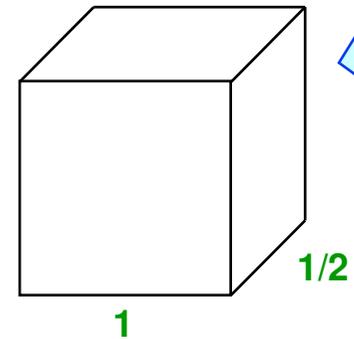
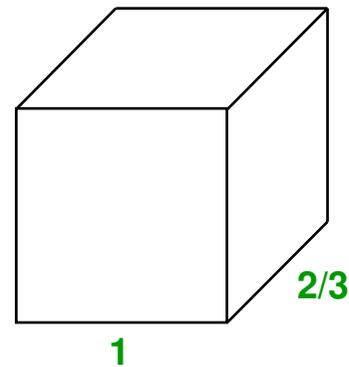
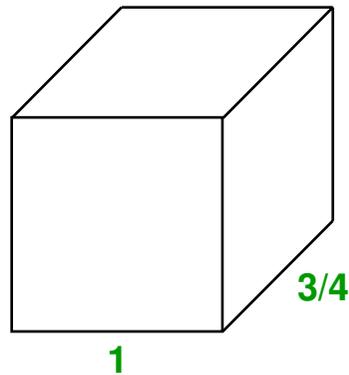
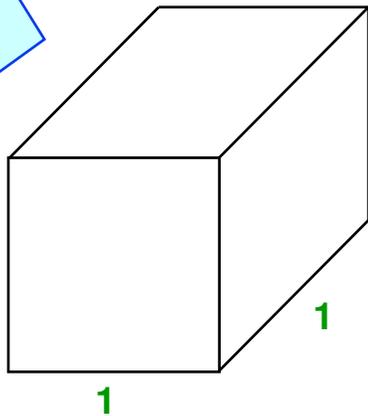
$$\ell = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \beta = 45^\circ$$

Projeção de GABINETE:

$$\ell = 0.5 \quad \Leftrightarrow \quad \beta = 63.4^\circ$$

Projeção ORTOGONAL:

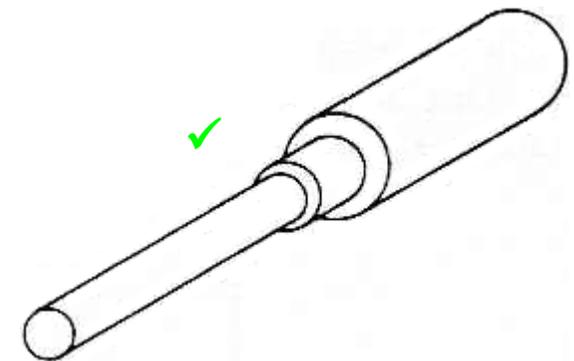
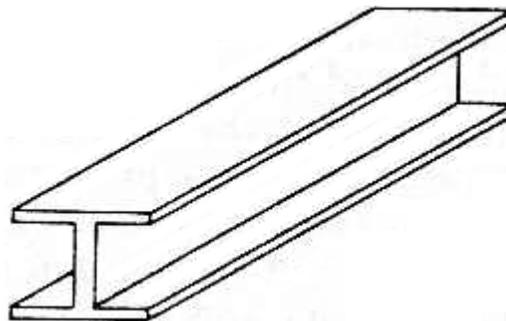
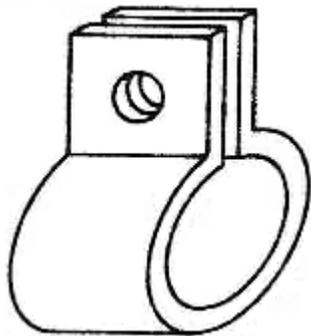
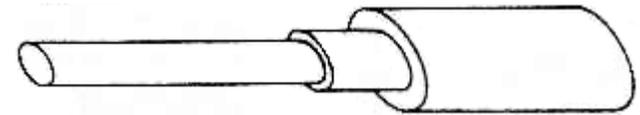
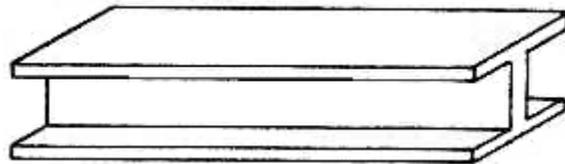
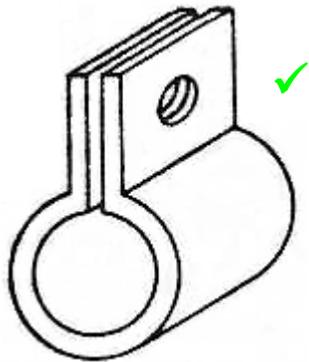
$$\ell = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \beta = 90^\circ$$



(Na prática não se usam valores $\ell > 1$; nestes exemplos fez-se $\alpha = 45^\circ$)

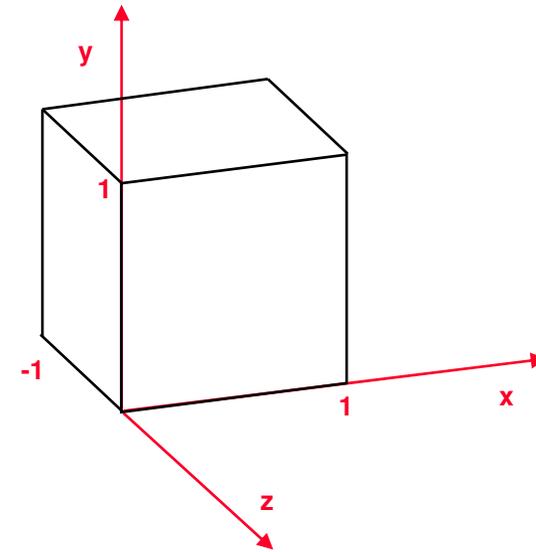
REGRAS DA PROJEÇÃO OBLÍQUA:

- R1)** O plano de projeção deverá ser paralelo às faces mais irregulares do objeto ou às que contêm formas curvas.
- R2)** O plano de projeção deverá ser paralelo à face de maior comprimento do objeto.
- R3)** A regra **R1** tem preferência sobre **R2**.

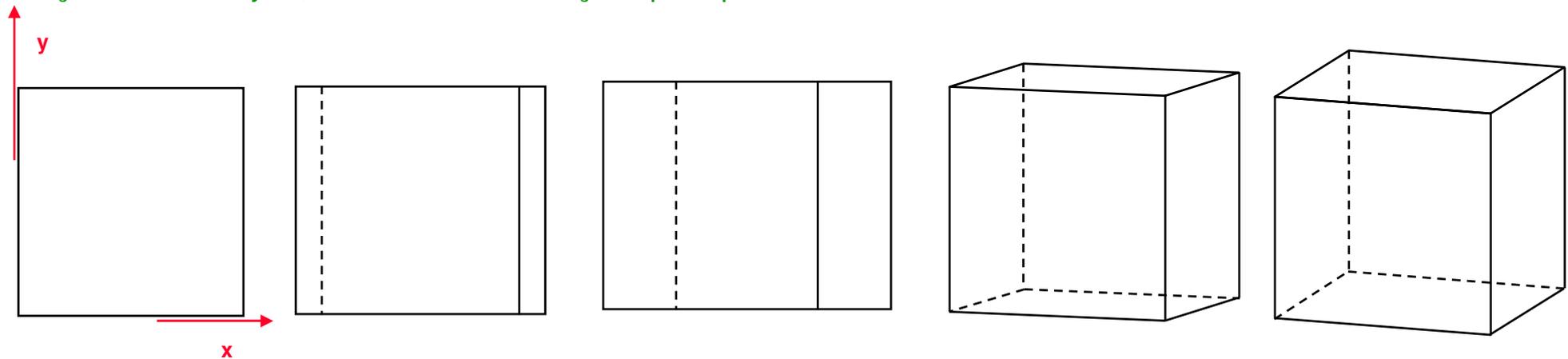


PROJEÇÃO AXONOMÉTRICA

Objeto e seu Sistema de Coordenadas (SC):



Ação sobre o objeto, visualizando-se o alçado principal:



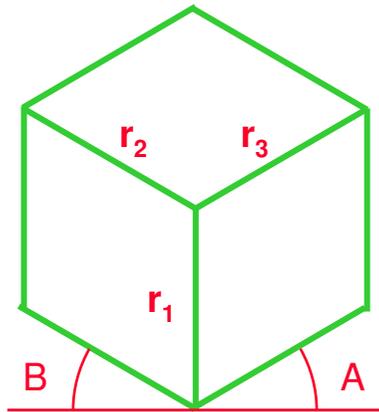
Tratamento matemático, para o caso geral:

$$M_{AX} = M_{ORT} \cdot R_X(\gamma) \cdot R_Y(\theta)$$

↙ (em $z=0$)

DESENHO AXONOMÉTRICO

ISOMETRIA

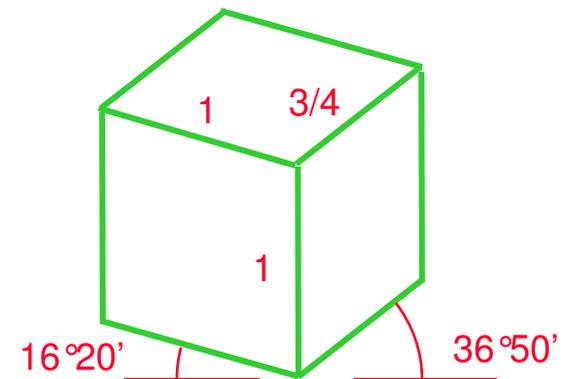
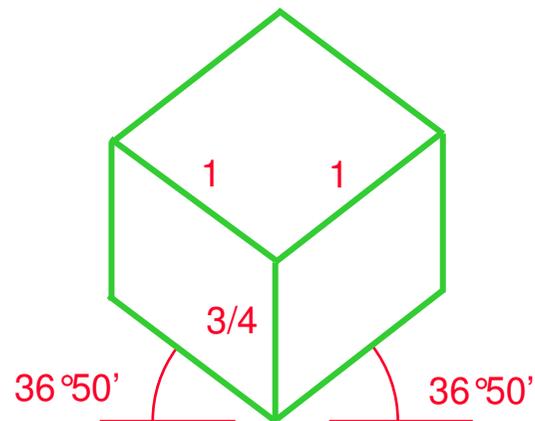


$$A = B = 30^\circ$$

Scale ratios (fatores de escala) do desenho:

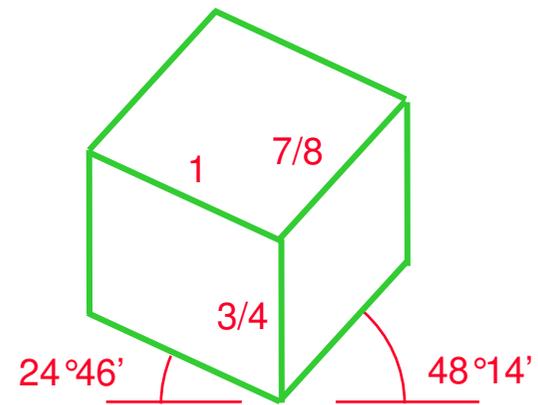
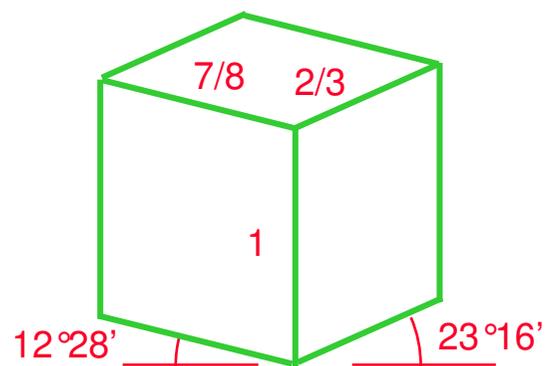
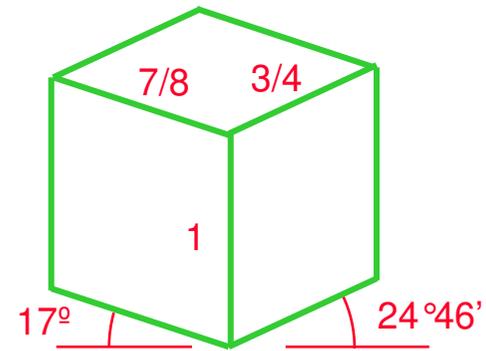
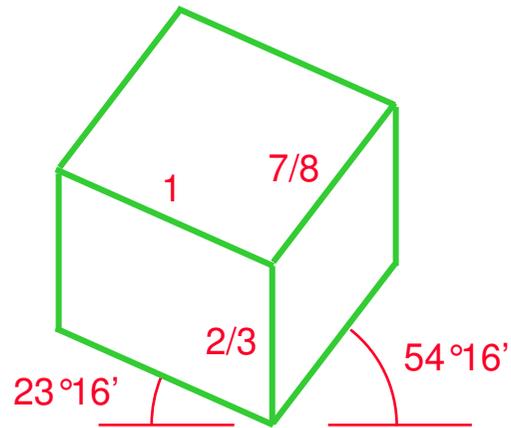
$$r_1 = r_2 = r_3 = 1 \quad (\text{ou } \underline{\text{relação das dimensões } 1:1:1})$$

DIMETRIA

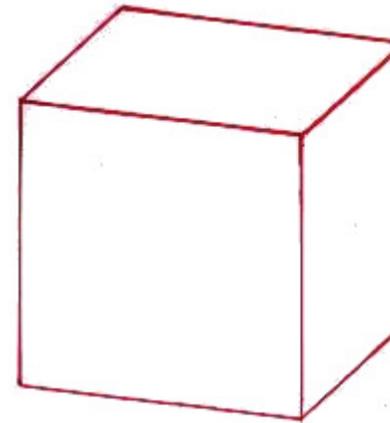


DESENHO AXONOMÉTRICO

TRIMETRIA



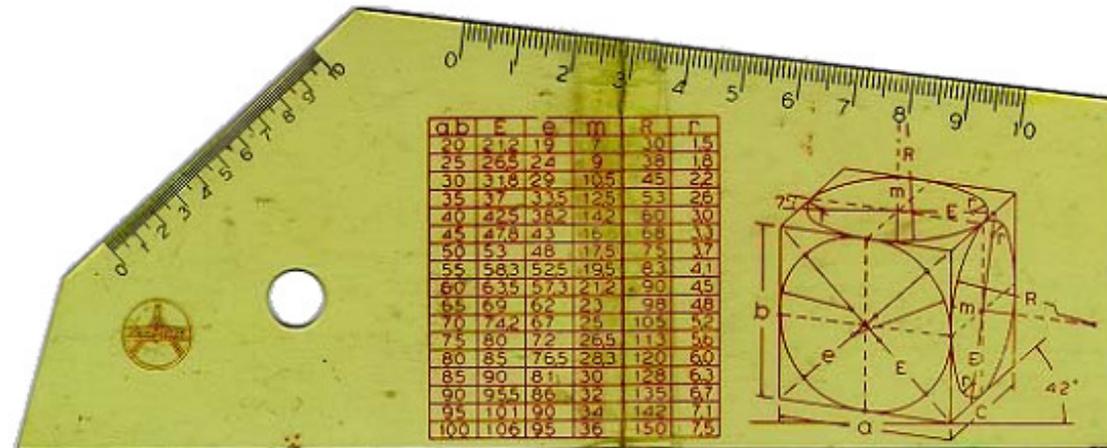
Cubo de aresta = 5 cm



A=42° B=7°

Desenho dimétrico de relação 1:1:0.5

feito à mão com o auxílio de esquadro próprio:



PROJEÇÃO AXONOMÉTRICA

$$\theta = \arctg \sqrt{\frac{\text{tg } A}{\text{tg } B}} - \pi/2$$

$$\gamma = \arcsin \sqrt{\text{tg } A \cdot \text{tg } B}$$

$$r_1 = \cos \gamma$$

$$r_2 = \cos \theta / \cos B$$

$$r_3 = -\sin \theta / \cos A$$

Aplicação – Cálculo de alguns fatores de escala (ou de redução) de uma projeção:

i. $A = B = 30^\circ$

$$r_1 = r_2 = r_3 \approx 0.81650$$

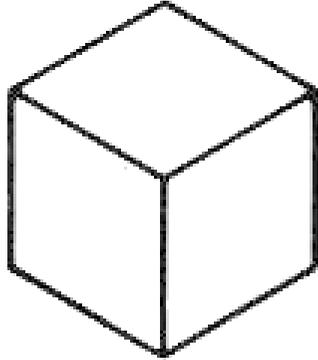
ii. $A = 36^\circ 50'$ $B = 16^\circ 20'$

$$r_1 = r_2 \approx 0.88346 \quad r_3 \approx 0.66257$$

iii. $A = 54^\circ 16'$ $B = 23^\circ 16'$

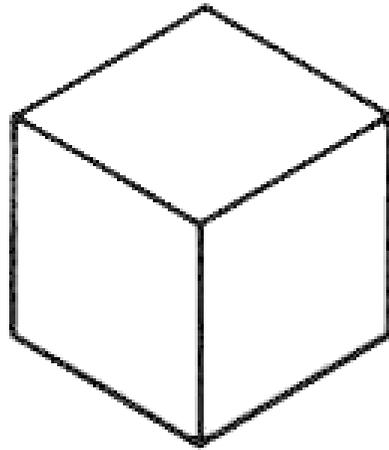
$$r_1 \approx 0.63432 \quad r_2 \approx 0.95128 \quad r_3 \approx 0.83229$$

NOTA: Todos os fatores de escala da Projeção (em itálico, para distinção) são inferiores aos respectivos fatores de escala no Desenho Axonométrico. Neste, o maior desses valores, em cada um dos casos, seria sempre igual a 1 (o que se justifica pela comodidade do desenho manual e da leitura de comprimentos).



81,65:100

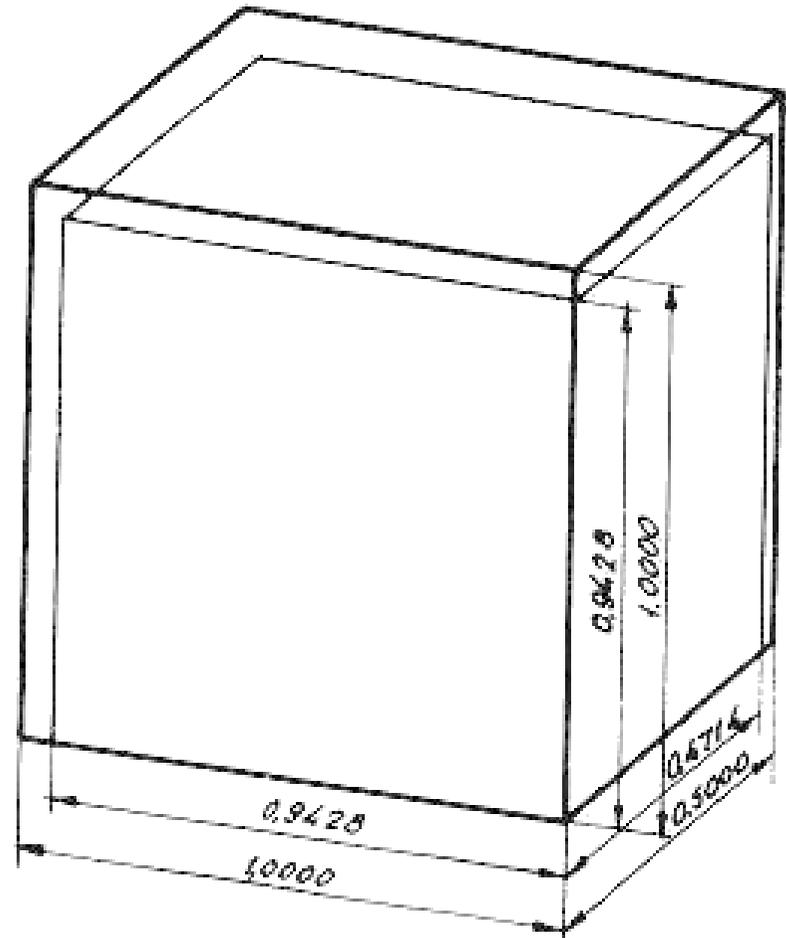
projecção isométrico



100:100

desenho isométrico

Dimetria A=42° B=7°



Exemplos de aplicação em jogos de estratégia

No Man's Land



Northland



Uma projeção axonométrica é determinada/caracterizada

- Pelos ângulos que os eixos coordenados locais ao objeto fazem com o plano de projeção

ou

- Pelos três fatores de escala

ou

- Pelos ângulos entre os eixos coordenados depois de projetados (na prática: pelos ângulos A e B).

CONCLUSÕES sobre a AXONOMETRIA:

- ✓ **O paralelismo de linhas é preservado...**
- ✓ **... mas os ângulos não o são;**
- ✓ **Os comprimentos são medidos usando-se fatores de escala correspondentes às 3 direções axiais*.**

* Justificação do nome AXONOMETRIA (i.e., medida segundo os eixos).

Cuidado com as justificações !!! 😊



Coordenadas homogéneas de P' :

$$P' = \begin{bmatrix} X=x \\ Y=y \\ Z=z \\ W=z/d \end{bmatrix}$$

Estas coordenadas podem obter-se das de P pela aplicação da matriz M_{PER} :

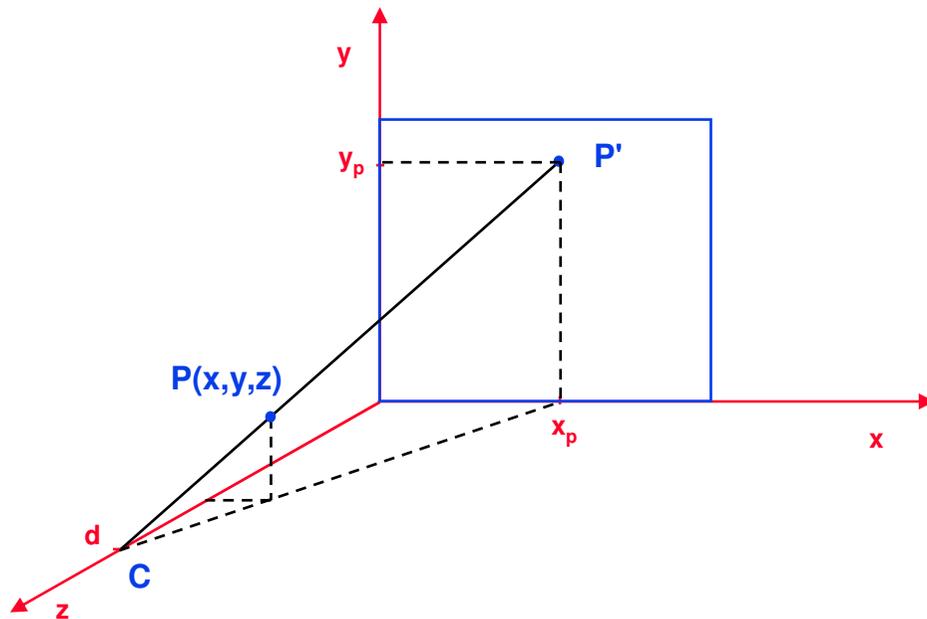
$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ z/d \end{bmatrix} = M_{PER} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$$

em que

$$M_{PER} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/d & 0 \end{bmatrix}$$

PROJEÇÃO PERSPECTIVA (2)

Plano de projeção em $z=0$ e centro de projeção C em $(0,0,d)$ com $d \neq 0$:



$$\frac{x_p}{d} = \frac{x}{d-z} \quad \longrightarrow \quad x_p = \frac{x}{1 - z/d}$$

$$\frac{y_p}{d} = \frac{y}{d-z} \quad \longrightarrow \quad y_p = \frac{y}{1 - z/d}$$

$$z_p = 0 \quad \longrightarrow \quad z_p = \frac{0}{1 - z/d}$$

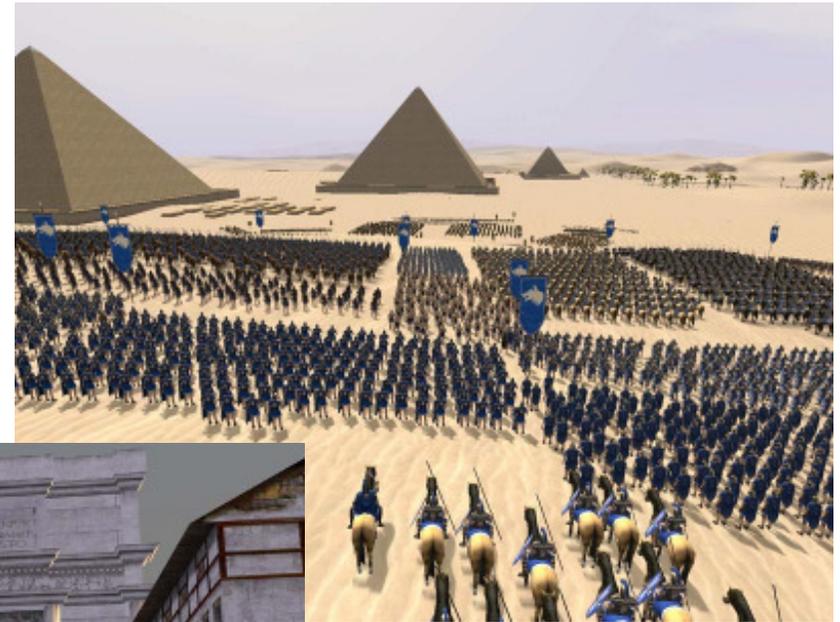
$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ 0 \\ 1-z/d \end{bmatrix} = M'_{PER} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\longrightarrow M'_{PER} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1/d & 1 \end{bmatrix}$$

$$d \rightarrow \infty \Rightarrow M'_{PER} \rightarrow M_{ORT}$$

M'_{PER} aplica-se ao plano de projeção $z=0$,
como nas outras projeções anteriores

Exemplo em jogo de estratégia com maior realismo



Rome Total War

"The first thing noticeable about the game is its graphical beauty"

Wargamer

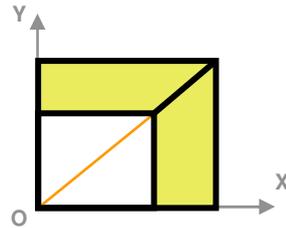
GameSpot: 91% "...realistic, cinematic-style battles."

M.Próspero

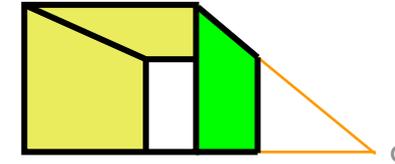
Implicações do paralelismo das direções principais do objeto com as direções axiais

1 ponto de fuga

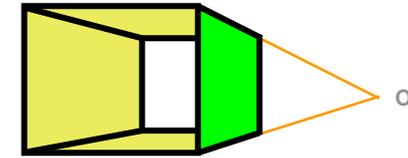
Duas famílias de arestas paralelas a XY



Modelo: Paralelepípedo alinhado com XYZ...
(caixa sem tampa nem fundo)



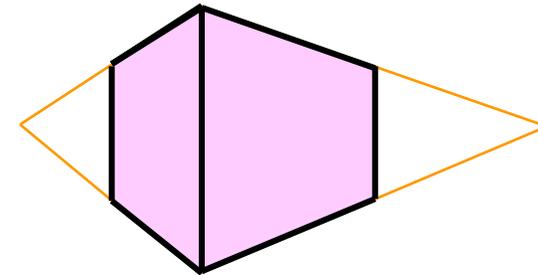
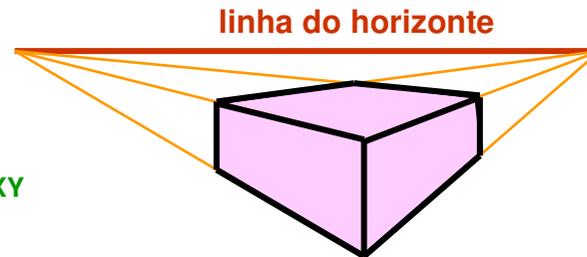
deslocado para a esquerda...



e também para baixo.

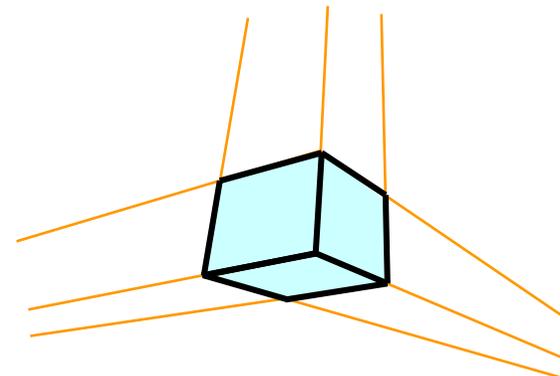
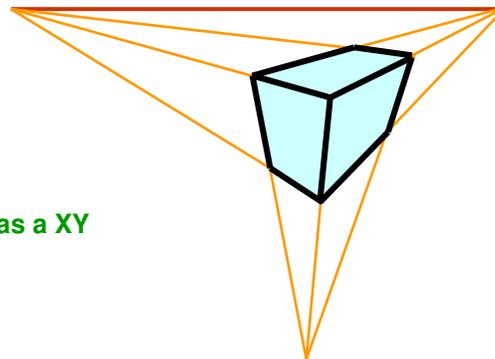
2 pontos de fuga

Uma família de arestas paralelas a XY



3 pontos de fuga

Nenhuma família de arestas paralelas a XY



Identifique e localize os pontos de fuga:

