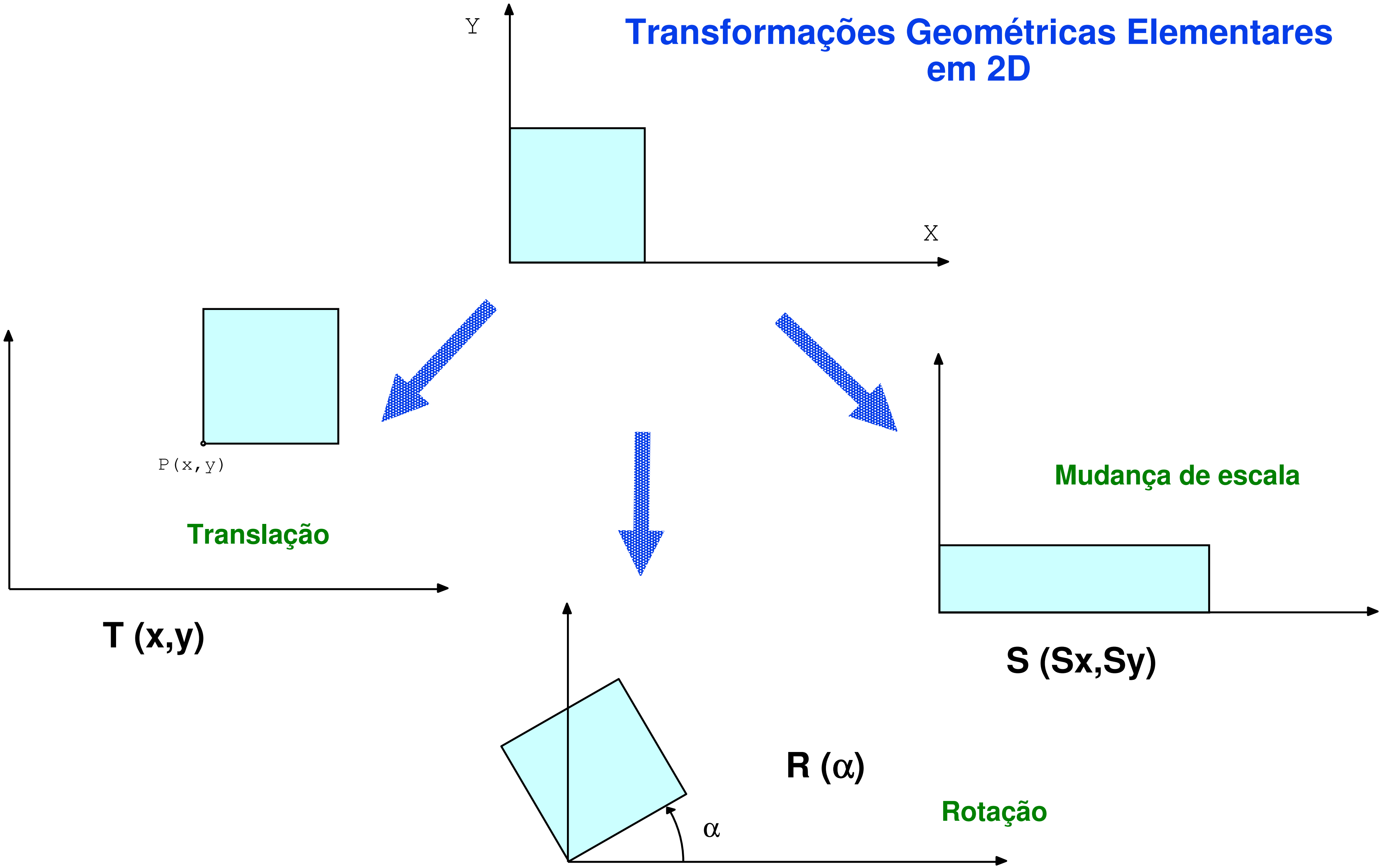
Transformações Geométricas Elementares em 2D



Translação

T (x,y)

Mudança de escala

S (Sx,Sy)

R (α)

Rotação

M.Próspero

Tratamento matemático (1)

$$P(x,y)=\begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

em Coordenadas Homogéneas 2D

$$P'(x',y') = M.P(x,y)$$

Translação

$$T(T_x,T_y)=\begin{bmatrix} 1 & 0 & T_x \\ 0 & 1 & T_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$x' = x + T_x$$
$$y' = y + T_y$$

Mudança de escala

$$S(S_x,S_y)=\begin{bmatrix} S_x & 0 & 0 \\ 0 & S_y & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

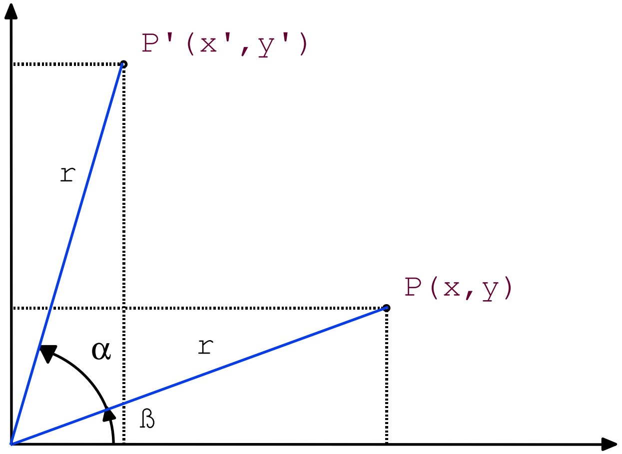
Fatores de escala

$$x' = S_x * x$$
$$y' = S_y * y$$

Tratamento matemático (2)

Rotação

$$R(\alpha) = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



$$x' = r.\cos(ß+\alpha)$$

$$= r.\cos ß.\cos\alpha - r.\sin ß.\sin\alpha$$

$$= x.\cos\alpha - y.\sin\alpha$$

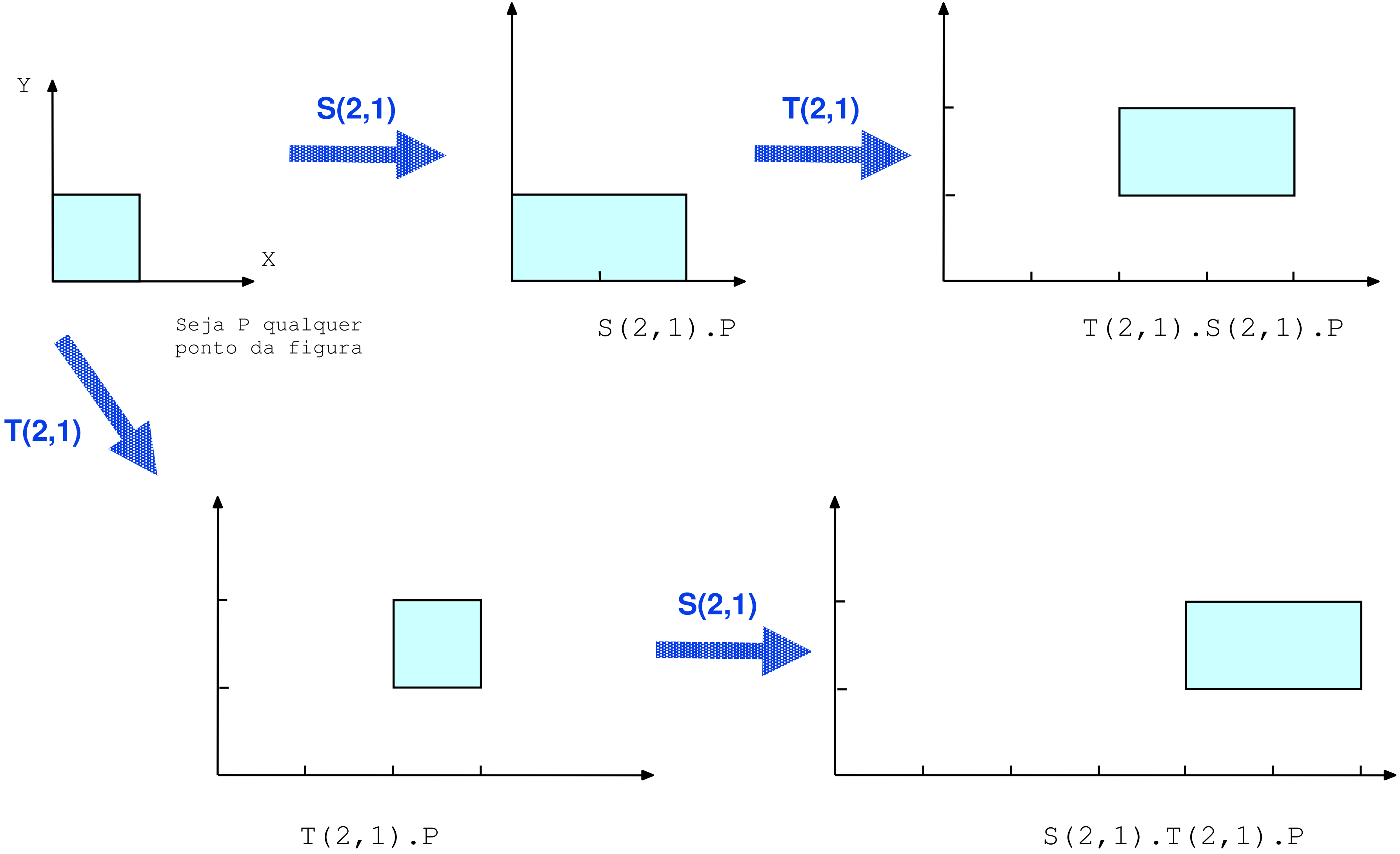
$$y' = r.\sin(ß+\alpha)$$

$$= r.\cos ß.\sin\alpha + r.\sin ß.\cos\alpha$$

$$= x.\sin\alpha + y.\cos\alpha$$

M.Próspero

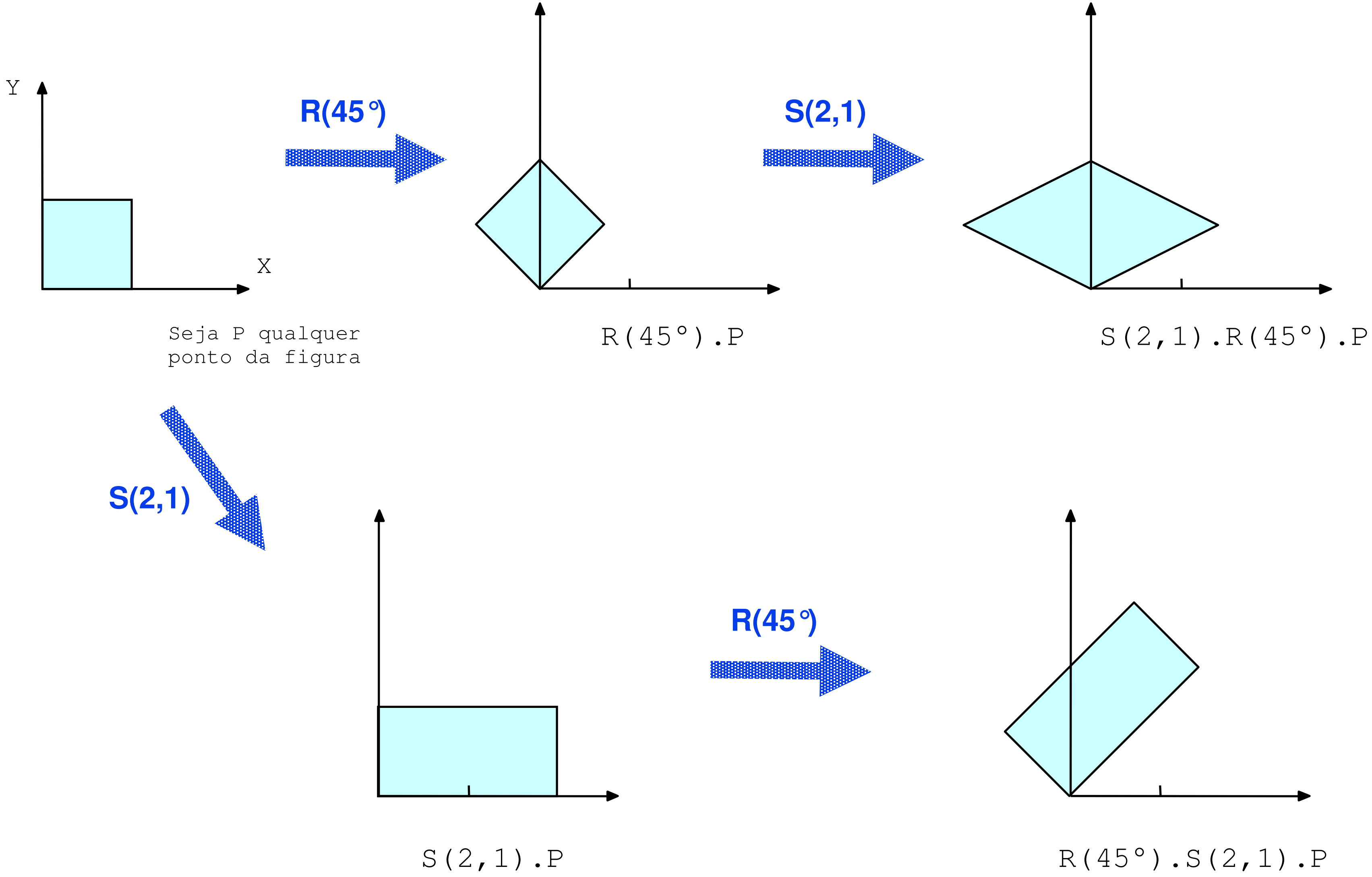
Composição de Transformações Geométricas: S e T



Seja P qualquer
ponto da figura

M.Próspero

Composição de Transformações Geométricas: R e S



R(45°)

S(2,1)

Seja P qualquer
ponto da figura

R(45°).P

S(2,1).R(45°).P

S(2,1)

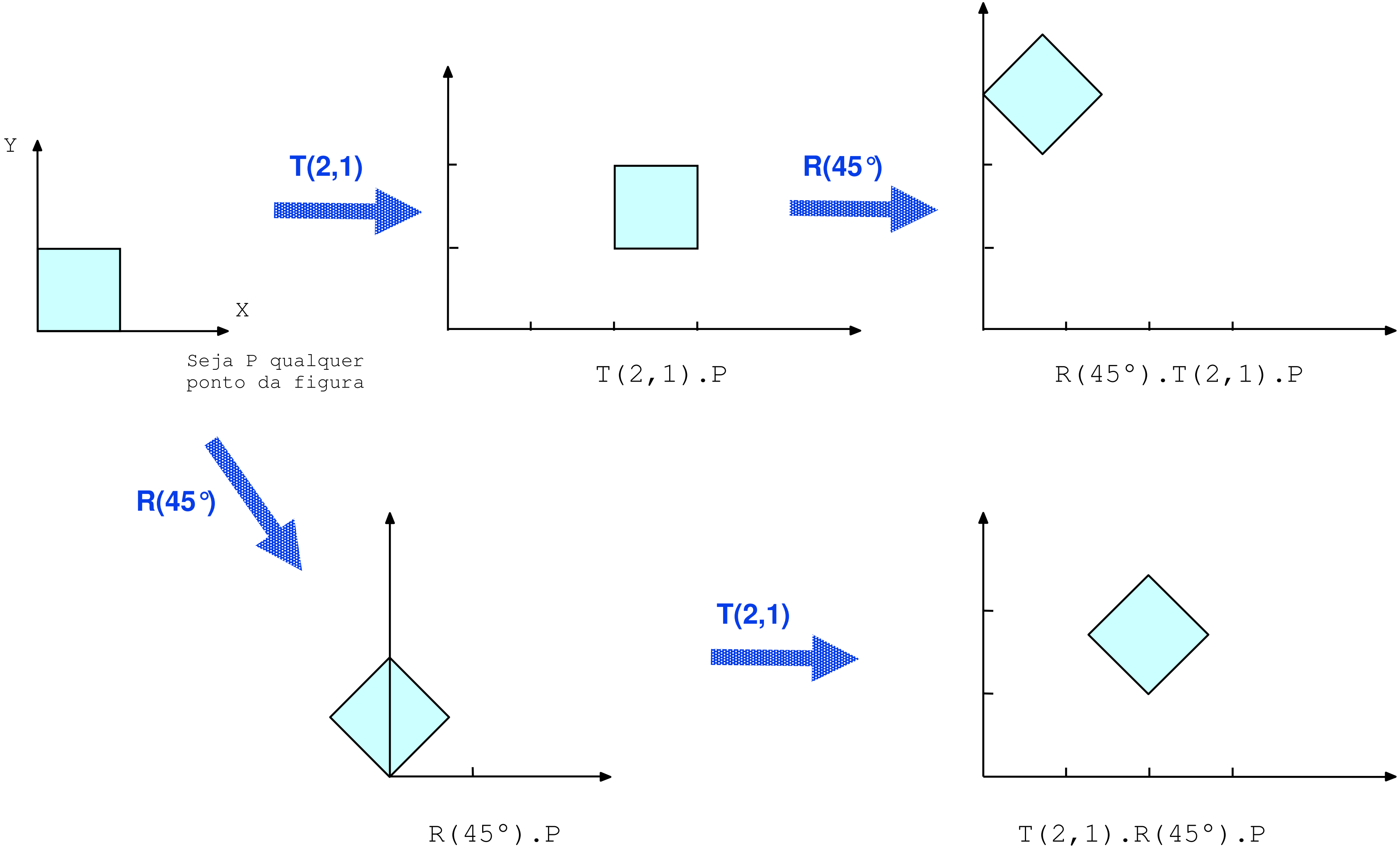
R(45°)

S(2,1).P

R(45°).S(2,1).P

M.Próspero

Composição de Transformações Geométricas: T e R



M.Próspero

2D

Quando é que se pode garantir a comutatividade?

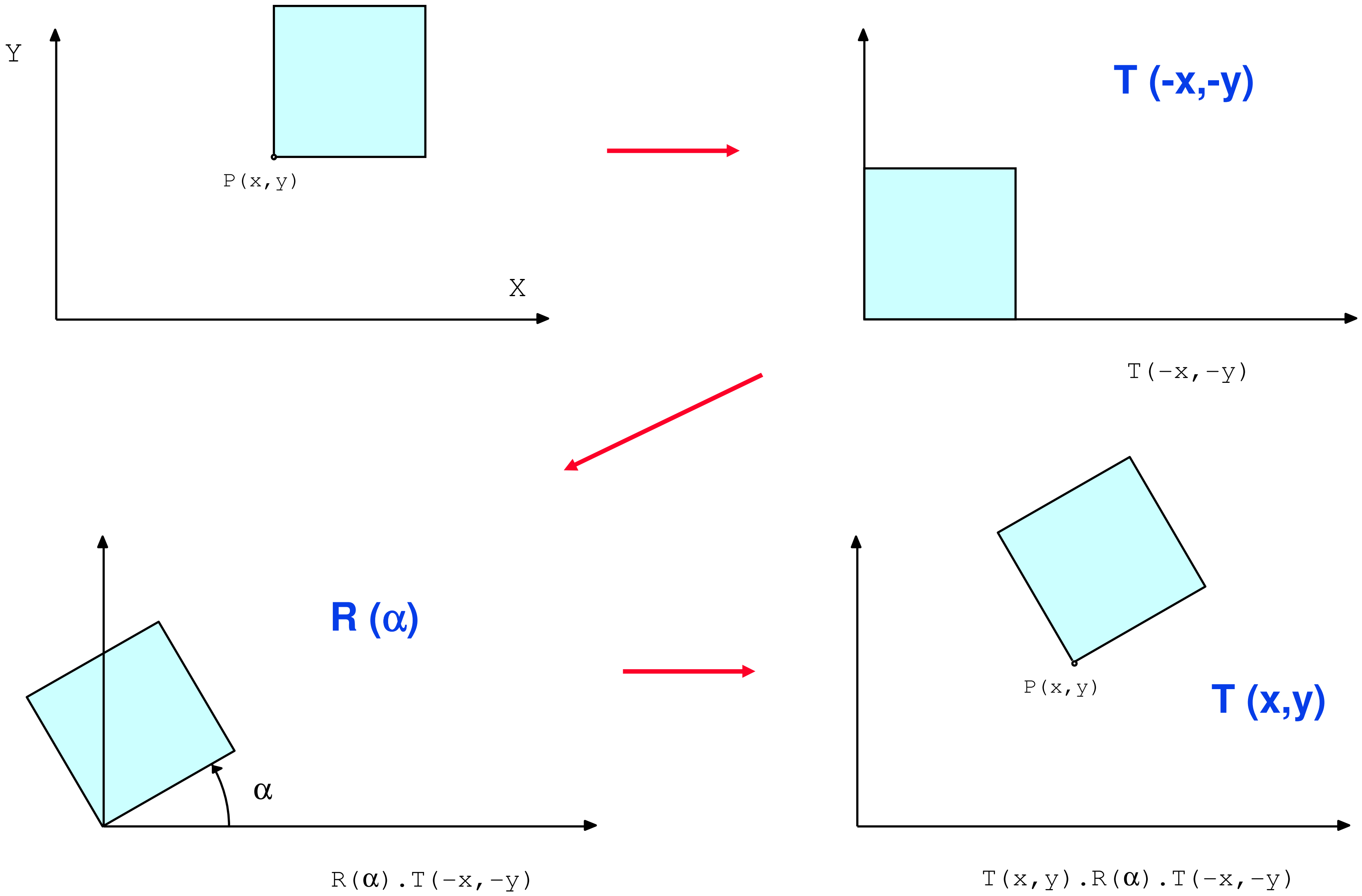
$R(\propto).R(\beta)$

$S(K1,K2).S(K3,K4)$

$T(D1,D2).T(D3,D4)$

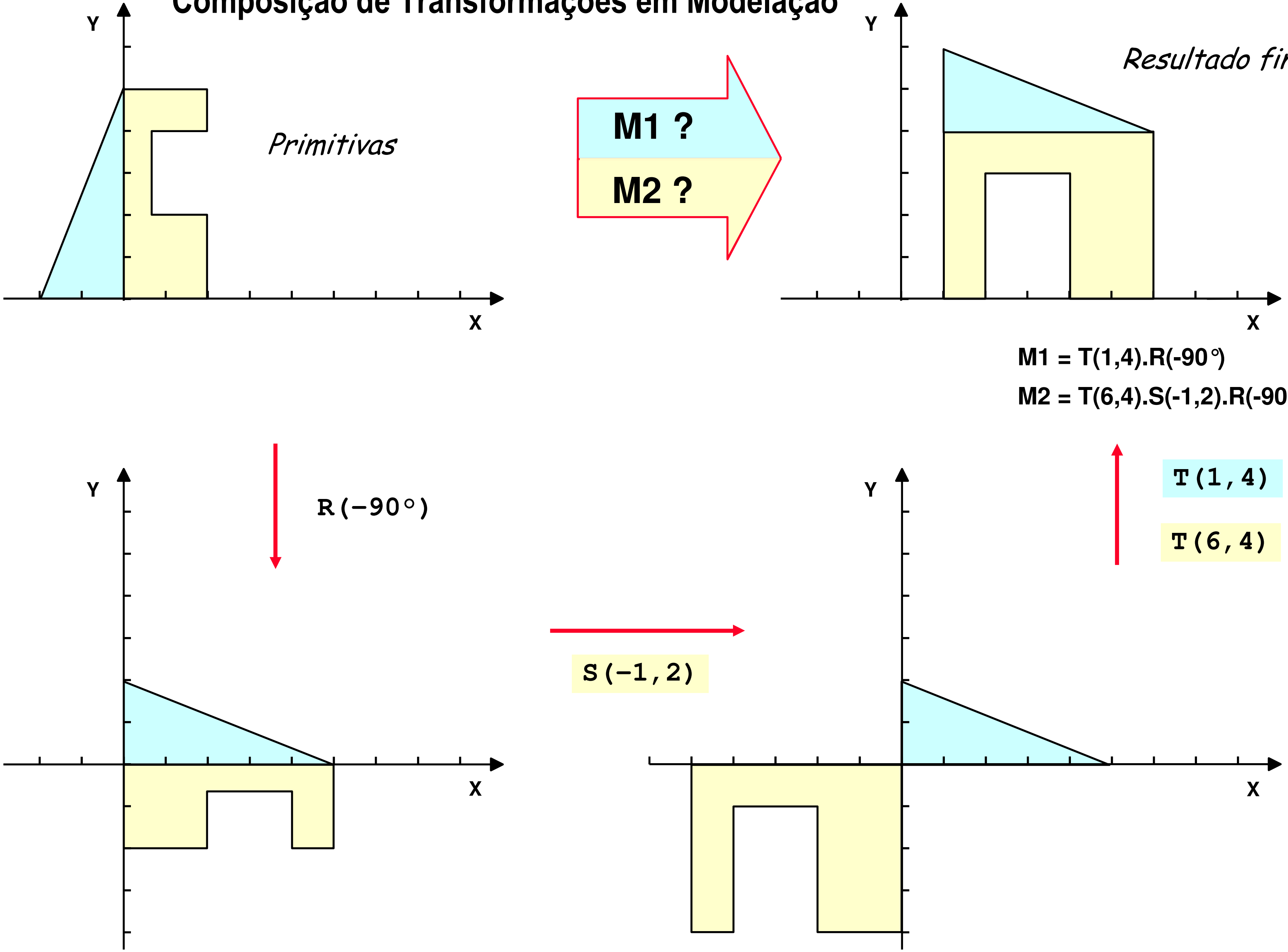
$S(K,K).R(\propto)$

Composição de Transformações: Rotação em torno de um ponto arbitrário P(x,y)



M.Próspero

Composição de Transformações em Modelação



M1 = T(1,4).R(-90°)

M2 = T(6,4).S(-1,2).R(-90°)

M.Próspero

Aplicação da composição de transformações geométricas no enquadramento janela-visor

$x' = (x - \mathbf{A}) \cdot \mathbf{B} + \mathbf{C}$

$y' = (y - \mathbf{D}) \cdot \mathbf{J} + \mathbf{K}$

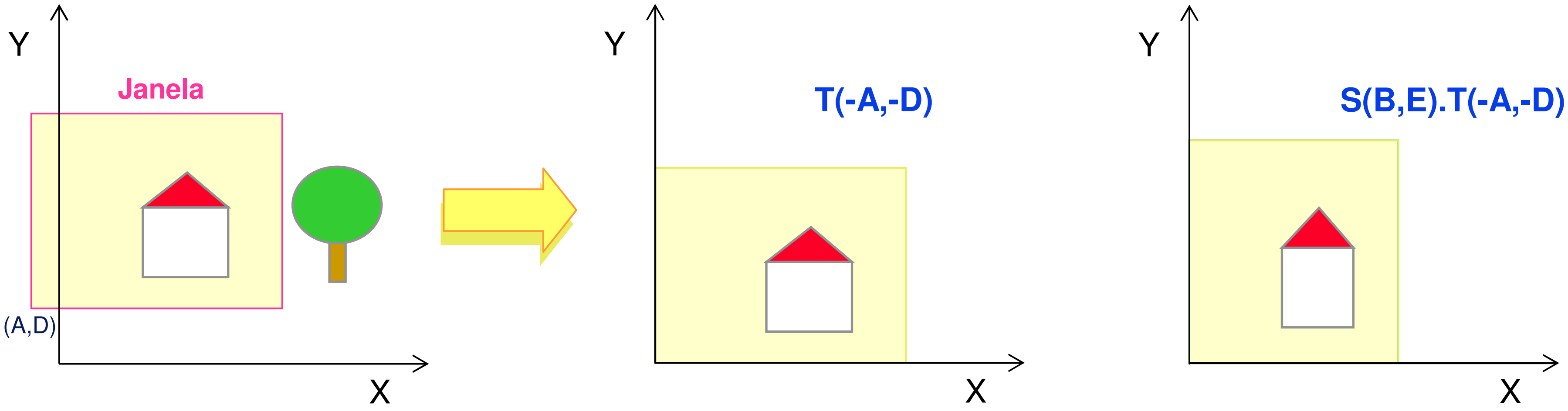
$\mathbf{J} = \mathbf{E}$ ou $\mathbf{G}$, $\mathbf{K} = \mathbf{F}$ ou $\mathbf{H}$

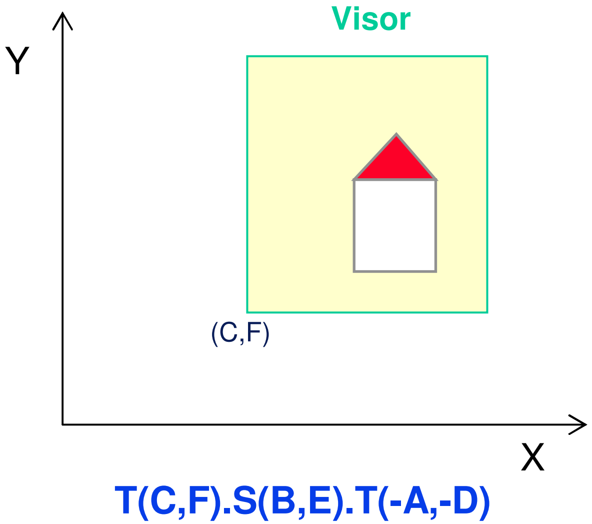
$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & C \\ 0 & 1 & K \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} B & 0 & 0 \\ 0 & J & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & -A \\ 0 & 1 & -D \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

ou, numa forma mais compacta:

$$P' = \mathbf{T}(C,K) \cdot \mathbf{S}(B,J) \cdot \mathbf{T}(-A,-D) \cdot P$$

Aplicação na dedução da transformação de enquadramento

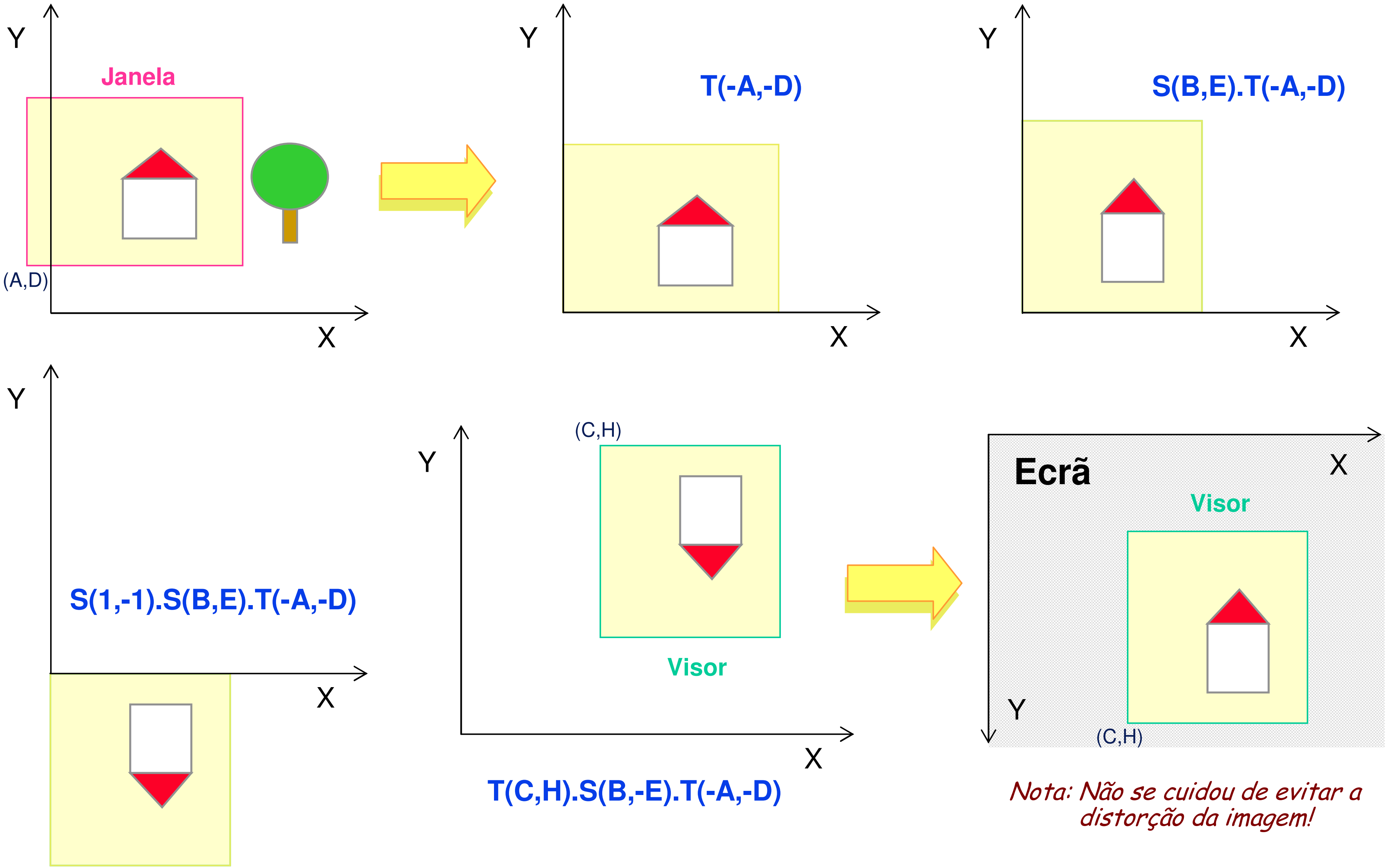




Nota: Não se cuidou de evitar a distorção da imagem, caso em que deveria ser B=E

M.Próspero

Aplicação na dedução da transformação de enquadramento (coordenadas do ecrã)



T(-A,-D)

S(B,E).T(-A,-D)

S(1,-1).S(B,E).T(-A,-D)

T(C,H).S(B,-E).T(-A,-D)

Nota: Não se cuidou de evitar a distorção da imagem!

M.Próspero

Exemplo numérico (à escala) para ecrã:

Transformar a Janela $-50 \le x \le 200 \wedge 25 \le y \le 175$ num Visor de 150x200 pixels e canto superior direito no ponto (250,100)

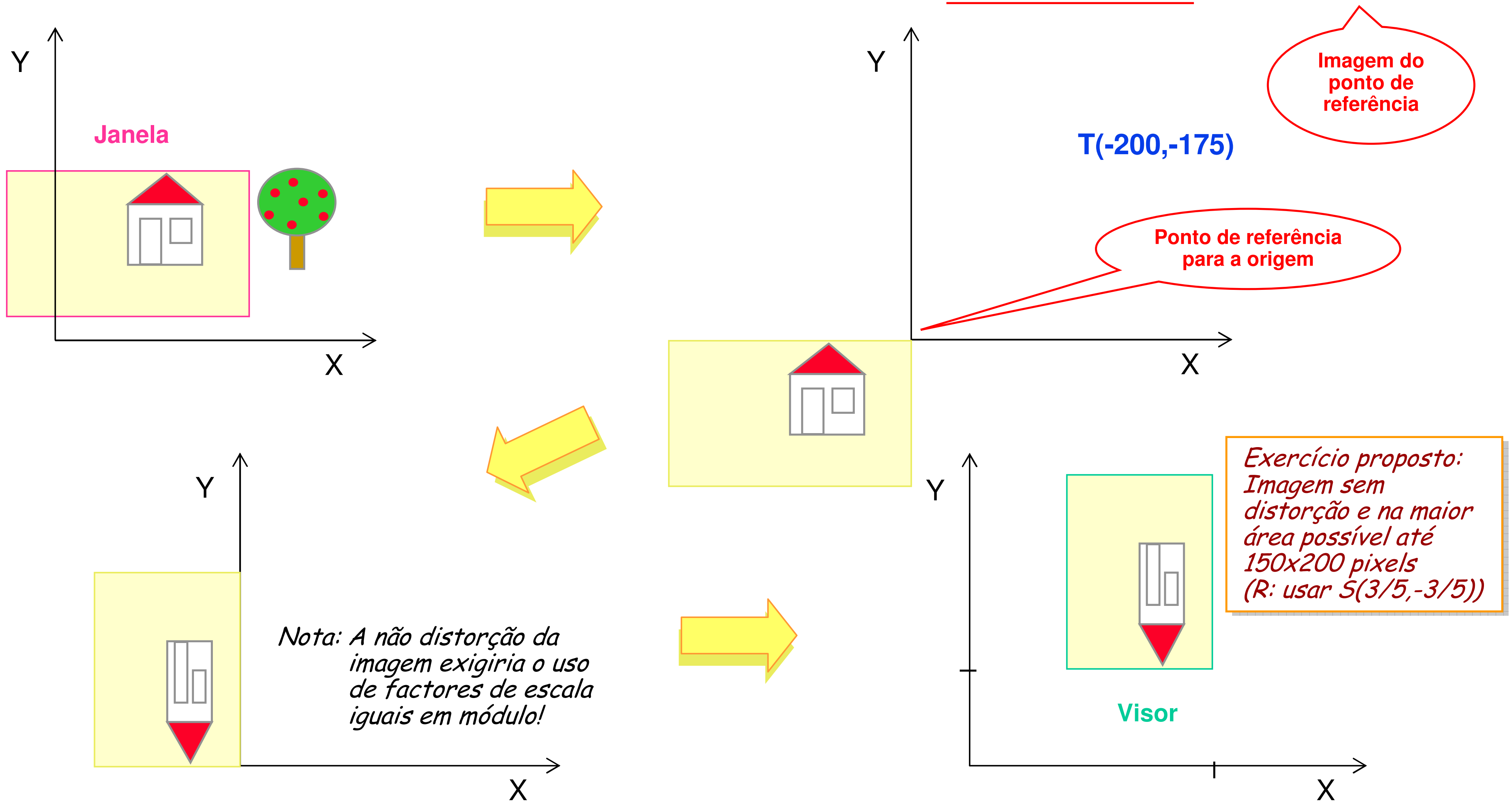


Imagem do ponto de referência

T(-200,-175)

Ponto de referência para a origem

Exercício proposto: Imagem sem distorção e na maior área possível até 150x200 pixels (R: usar S(3/5,-3/5))

Nota: A não distorção da imagem exigiria o uso de factores de escala iguais em módulo!

S(150/250,-200/150).T (-200,-175)

T(250,100).S(3/5,-4/3).T (-200,-175)

M.Próspero

Transformações Geométricas em 3D

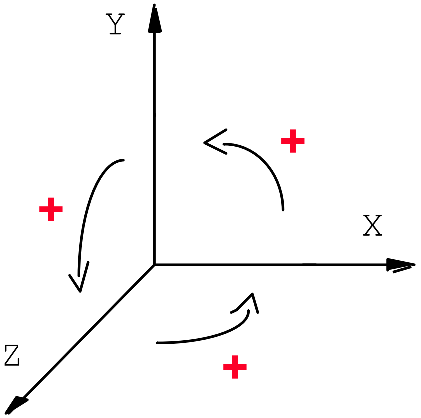
T (x,y,z)

S (Sx,Sy,Sz)

$R_z(\alpha)$

$R_x(\alpha)$

$R_y(\alpha)$



Transformações inversas:

T (x,y,z) → T (-x,-y,-z)

S (Sx,Sy,Sz) → S (1/Sx,1/Sy,1/Sz)

R (α) → R (- α)

Transformações Geométricas em 3D

$$T(T_x, T_y, T_z) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & T_x \\ 0 & 1 & 0 & T_y \\ 0 & 0 & 1 & T_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

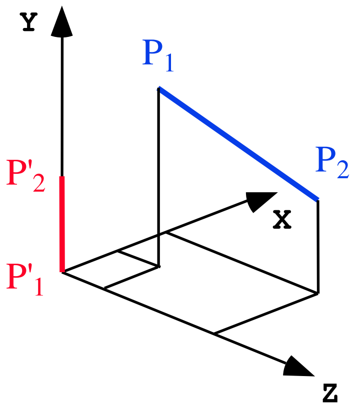
$$S(S_x, S_y, S_z) = \begin{bmatrix} S_x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & S_y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & S_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

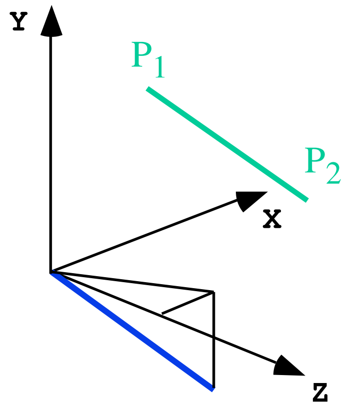
$$R_z(\theta) = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$R_x(\theta) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

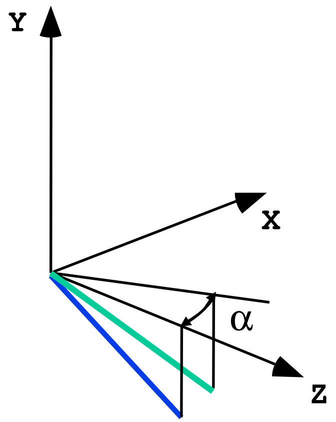
$$R_y(\theta) = \begin{bmatrix} \cos\theta & 0 & \sin\theta & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

EXEMPLO de APLICAÇÃO 3D, por composição de transformações elementares: Transformar P_1P_2 em $P'_1P'_2$

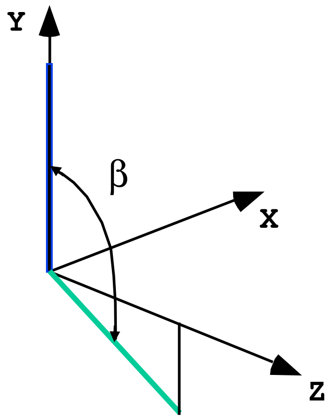




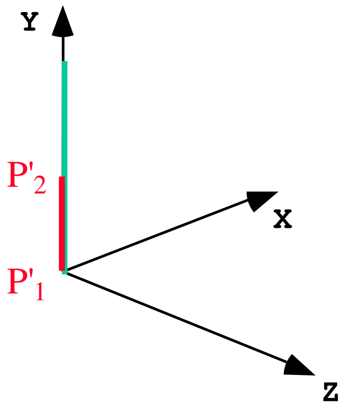
$T (T_X , T_Y , T_Z)$



$R_Y (-\alpha) . T (T_X , T_Y , T_Z)$



$R_x (-\beta) . R_Y (-\alpha) . T (T_X , T_Y , T_Z)$



$S (1 , S_Y , 1) . R_x (-\beta) . R_Y (-\alpha) . T (T_X , T_Y , T_Z)$

M.Próspero

3D

Quando é que se pode garantir a comutatividade?

$R_i(\propto).R_i(\beta)$

$S(K1,K2,K3).S(K4,K5,K6)$

$T(D1,D2,D3).T(D4,D5,D6)$

$S(K,K,K3).R_z(\propto)$

$S(K1,K,K).R_x(\propto)$

$S(K,K2,K).R_y(\propto)$