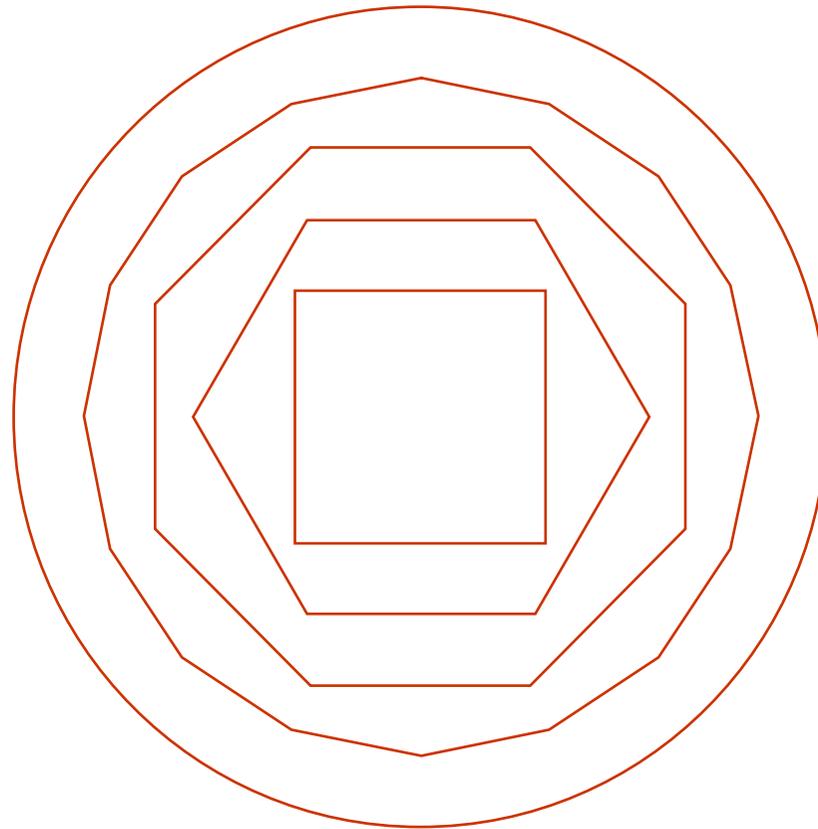


Rasterização de linhas curvas genéricas



Embora haja algoritmos para casos particulares, de uma forma geral bastará encontrar uma aproximação razoável por segmentos de reta e executar o algoritmo de rasterização destes para cada um.

Representação matemática de pontos

A cada ponto $P(x,y)$ no plano far-se-á corresponder um vetor

$$P = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Assim, uma transformação linear, dada por uma matriz M , poderá transformar P em P' escrevendo-se:

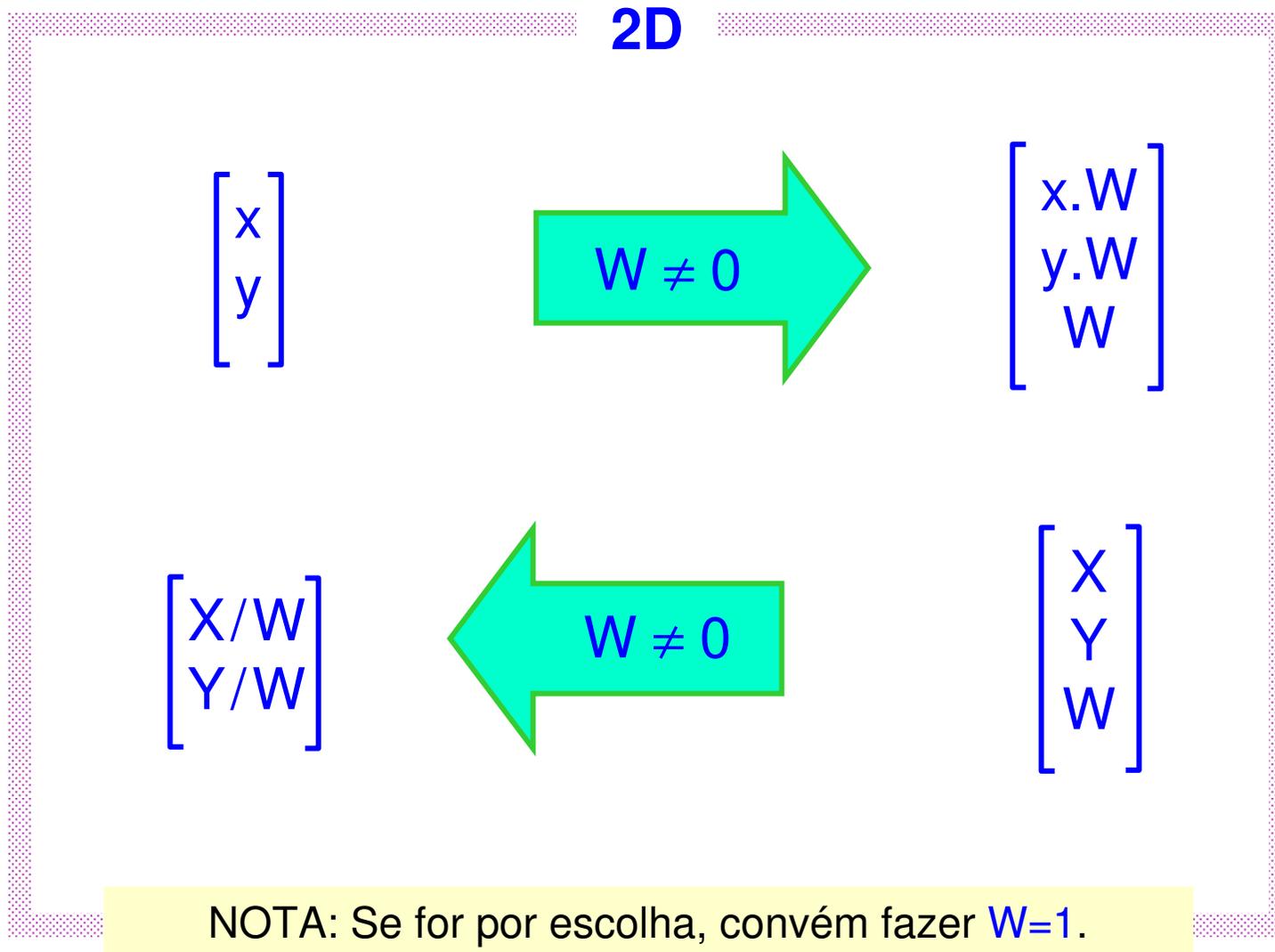
$$P' = M.P$$

Por conseguinte, o operador M deverá ser uma matriz 2x2.

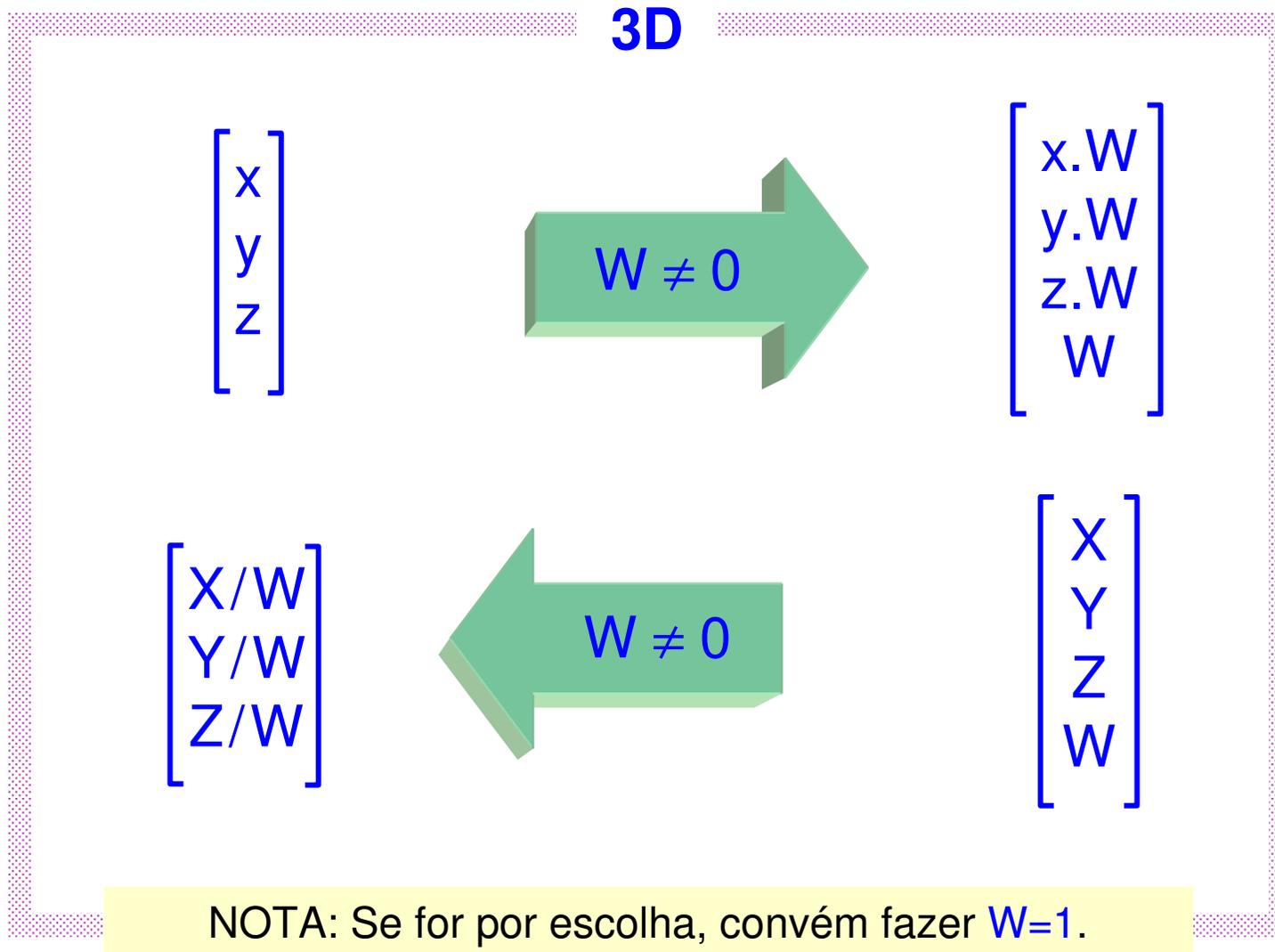
Mas, em alternativa, os pontos também se poderão especificar em Coordenadas Homogéneas*.

* As vantagens serão referidas em capítulos posteriores

Pontos em Coordenadas Homogéneas



Pontos em Coordenadas Homogéneas



Curva

Especificada por uma ou mais equações com **uma** só variável independente.

◆ Descrição não-paramétrica

- Forma explícita

$$Q = (x , y=f(x) , z=g(x))$$

- Forma implícita

$$Q = (F(x,y,z)=0 , G(x,y,z)=0)$$

◆ Descrição paramétrica

$$Q = (x=f(t) , y=g(t) , z=h(t))$$

x variável independente

variável independente arbitrária

t variável independente

$$a \leq t \leq b$$

Superfície

Especificada por uma ou mais equações com **duas** variáveis independentes.

◆ Descrição não-paramétrica

- Forma explícita

$$Q = (x , y , z=f(x,y))$$

x, y variáveis independentes

- Forma implícita

$$Q = (F(x,y,z)=0)$$

2 variáveis independentes arbitrárias

◆ Descrição paramétrica

$$Q = (x=f(s,t) , y=g(s,t) , z=h(s,t))$$

s, t variáveis independentes

$$a \leq t \leq b$$

$$c \leq s \leq d$$

Curvas e Superfícies

◆ Descrição não-paramétrica

- Forma explícita

- 😊 Facilidade de cálculo

- 😞 Não pode representar uma correspondência que não seja função

- 😞 Não se podem aplicar diretamente transformações por operadores matriciais

- ◆ Exemplo: $y = \sqrt{4 - x^2}$ e $y = -\sqrt{4 - x^2}$ com $-2 \leq x \leq 2$

não sendo direto aplicar-se uma matriz **M** de transformação

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \mathbf{M} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Curvas e Superfícies

◆ Descrição não-paramétrica

● Forma implícita

- 😊 Representação de correspondências que não sejam funções
- 😞 Pode ser difícil a determinação das raízes
- 😞 Não se podem aplicar diretamente transformações por operadores matriciais

◆ Exemplo:

$$x^2 + y^2 - 4 = 0$$

com $-2 \leq x \leq 2$

Curvas e Superfícies

◆ Descrição paramétrica

- 😊 Representação de correspondências que não sejam funções
- 😊 Podem aplicar-se diretamente transformações por operadores matriciais

◆ Exemplo:

$$\begin{aligned}x &= 2 \cos t \\y &= 2 \sin t\end{aligned}\quad \text{com } 0 \leq t \leq 2\pi$$

ou

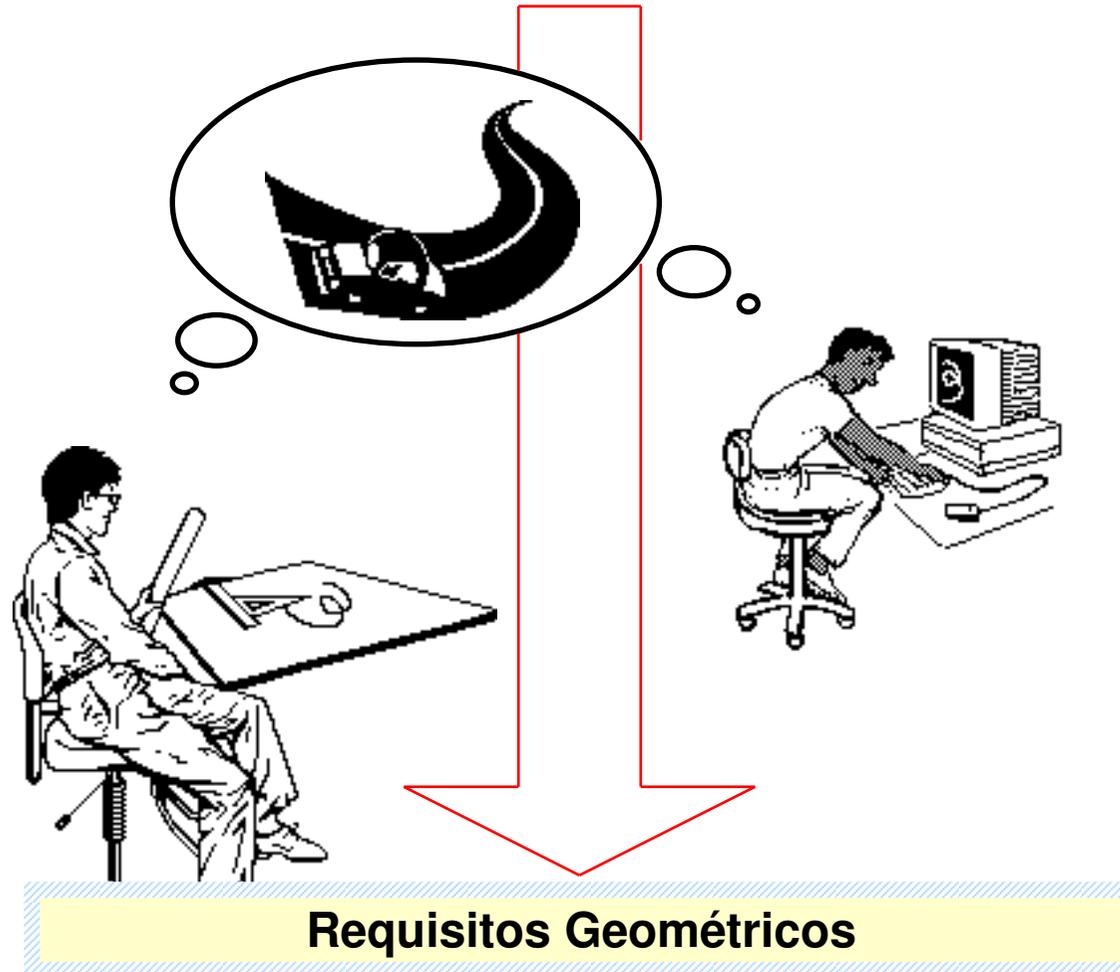
$$\begin{aligned}x &= 2 \cos (2\pi t) \\y &= 2 \sin (2\pi t)\end{aligned}\quad \text{com } 0 \leq t \leq 1$$

sendo já direto aplicar-se uma matriz **M** de transformação

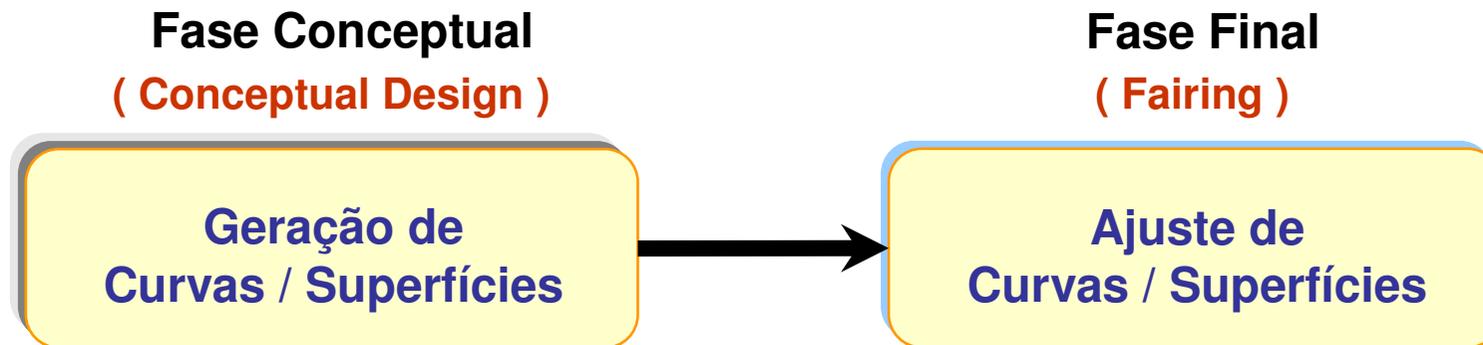
$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \mathbf{M} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

O processo de Design

Requisitos Técnicos, Requisitos Físicos, Requisitos Económicos, etc.



Fases no processo de Design

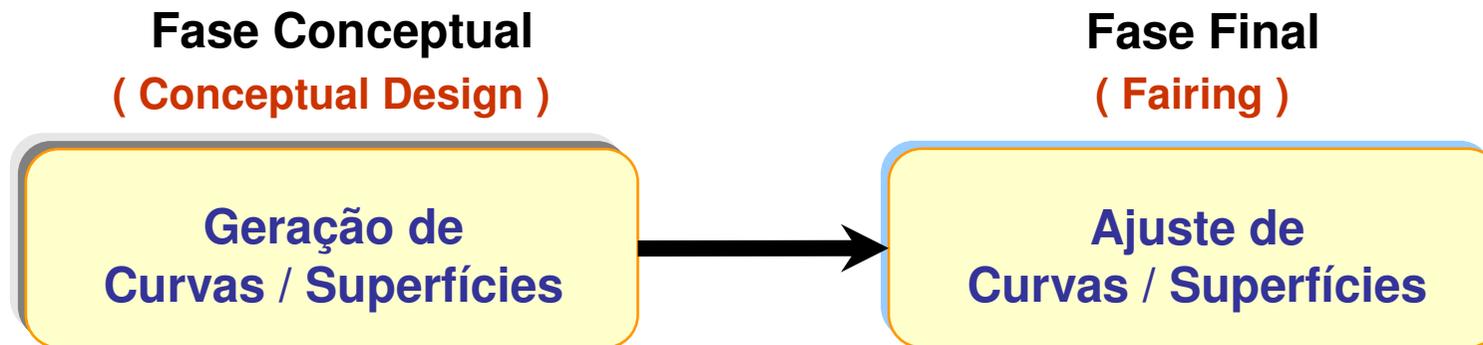


The Design Problem

Given: A set of geometric requirements [such as offsets, slopes, second derivatives, areas, volumes, centroids, ...] sufficient to characterize the intended shape.

Find: A curve (surface) meeting these requirements.

Fases no processo de Design



The Fairing Problem

Given: A curve (surface), or a corresponding set of offset points, approximating an intended shape.

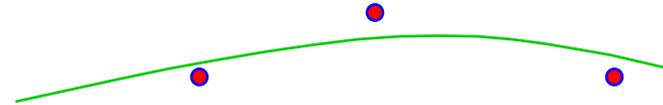
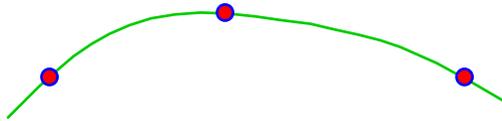
Find: A fairer curve (surface) according to some fairness criterion without deviating too far from the given shape.

What does fair mean?

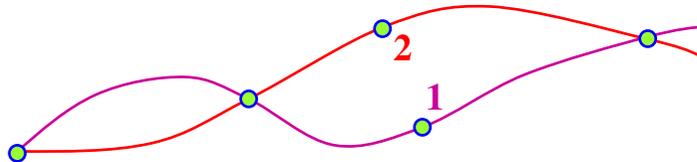
- Pleasing to the eye (aesthetic requirements)
- Related to the absence of unwanted deficiencies, particularly oscillations
- Spline fairness

Alguns requisitos no design de Curvas

- ◆ Interpolar ou aproximar um certo número de pontos conhecidos, obtendo-se a equação da curva



- ◆ Controlar através de pontos conhecidos e de forma previsível: **local** (preferível) ou **globalmente**

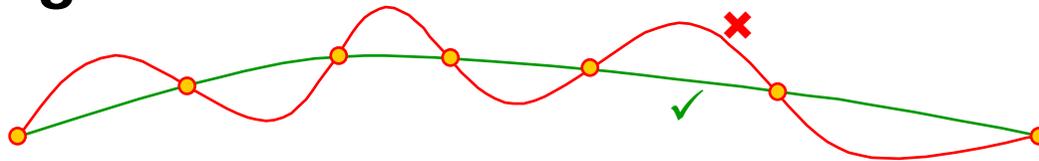


- ◆ Haver independência da forma da curva em relação ao sistema de eixos usado para especificar os pontos
- ◆ Permitir correspondências que não sejam funções

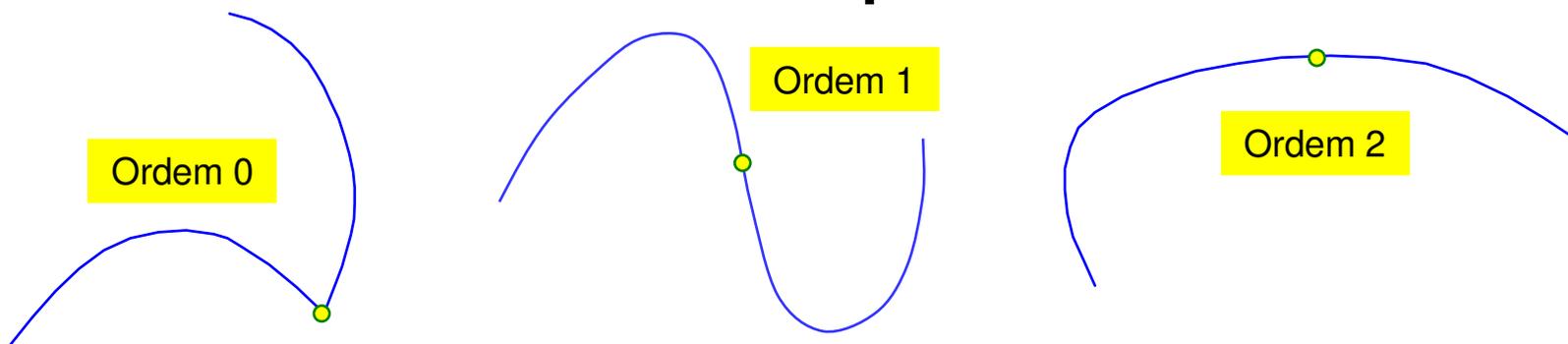


Alguns requisitos no design de Curvas

- ◆ **Existir tendência para suavizar pequenas irregularidades**



- ◆ **Disponibilizar grande versatilidade de formas**
- ◆ **Permitir a continuidade entre os troços que constituam uma curva complexa**

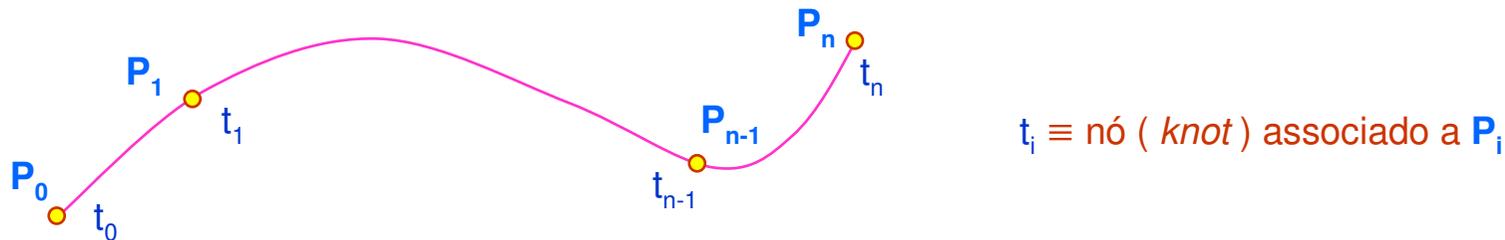


1.^a conclusão: Usar descrições paramétricas.

Curvas de Interpolação

◆ Problema:

Encontrar uma curva $Q(t)$ que passe por $n+1$ pontos P_i



Como consequência da descrição paramétrica, a escolha dos valores dos nós influencia o andamento da curva.

● Condições do problema:

- $Q(t_i) = P_i$, $i = 0..n$
- Continuidade das funções e suas derivadas

● Resolução:

- Usar polinômios interpoladores

Interpolação de Lagrange

Existe um e um só polinómio de grau n que resolve o problema:

$$Q(t) = \sum_{i=0}^n P_i L_{in}(t)$$

em que $L_{in}(t) = \frac{(t - t_0) \dots (t - t_{i-1}) (t - t_{i+1}) \dots (t - t_n)}{(t_i - t_0) \dots (t_i - t_{i-1}) (t_i - t_{i+1}) \dots (t_i - t_n)}$

Mas ...

... um polinómio de grau n tem até $n-1$ extremos relativos e $n-2$ pontos de inflexão !

Em medições precisas, quando se usam muitos pontos, o resultado poderá ser uma oscilação indesejada da curva.

Este efeito negativo poderá ser evitado ?

Não, pois basta que haja um só ponto incompatível com uma curva suave.

A maioria das aplicações não requer continuidade das derivadas de elevada ordem

A solução é a interpolação da curva por troços contínuos !



Polinómios de baixo grau



Interpolação por Splines (naturais)

A teoria dos splines trata da interpolação polinomial, na generalidade e por troços.

DEFINIÇÃO DE SPLINE :

Uma função $\mathbf{S}(t)$, escalar ou vetorial, definida no intervalo $[t_0, t_n]$, é um **SPLINE** de **ordem k** (ou **grau k-1**) se :

- $\mathbf{S}(t)$ é um polinómio de grau **k-1** em cada intervalo $[t_i, t_{i+1}]$, com $t_0 < \dots < t_i < t_{i+1} < \dots < t_n$
- $\mathbf{S}(t)$ e as suas derivadas de ordem **1..k-2** são contínuas em todo o intervalo onde é definida (isto é, $\mathbf{S}(t)$ pertence à **classe \mathbf{C}^{k-2}**)

$k = 4$  **SPLINE CÚBICO**

DADOS: $n+1$ pontos \mathbf{P}_i ($i=0..n$) e nós $t_i \in [t_0, t_n]$ associados

OBJETIVO:

Encontrar os polinómios cúbicos interpoladores por troços e que definem a função $\mathbf{Q}(t)$ em $[t_0, t_n]$ tal que pertence a \mathbf{C}^2 nos nós (*knots*).

Dedução dos coeficientes

Sendo polinómio cúbico, para o intervalo $[t_k, t_{k+1}]$ pode escrever-se

$$Q_k(t) = a_k + b_k (t - t_k) + c_k (t - t_k)^2 + d_k (t - t_k)^3$$

Condições fronteira:

$$Q(t_k) = P_k$$

$$Q(t_{k+1}) = P_{k+1}$$

$$\left(\frac{dQ_k}{dt}\right)_{t=t_k} = R_k$$

$$\left(\frac{dQ_k}{dt}\right)_{t=t_{k+1}} = R_{k+1}$$

Substituindo e resolvendo dá:

$$a_k = P_k$$

$$b_k = R_k$$

$$c_k = \frac{3(P_{k+1} - P_k)}{h_k^2} - \frac{2R_k}{h_k} - \frac{R_{k+1}}{h_k}$$

$$d_k = \frac{2(P_k - P_{k+1})}{h_k^3} + \frac{R_k}{h_k^2} + \frac{R_{k+1}}{h_k^2}$$

com $h_k = t_{k+1} - t_k$

Condições adicionais

As **4** equações deduzidas para os coeficientes referem-se a cada um dos troços (intervalos), pelo que haverá ao todo **4n** equações.

As derivadas **R_i** (em número de **n+1**) ainda não são conhecidas, pelo que precisamos de outras **n+1** equações.

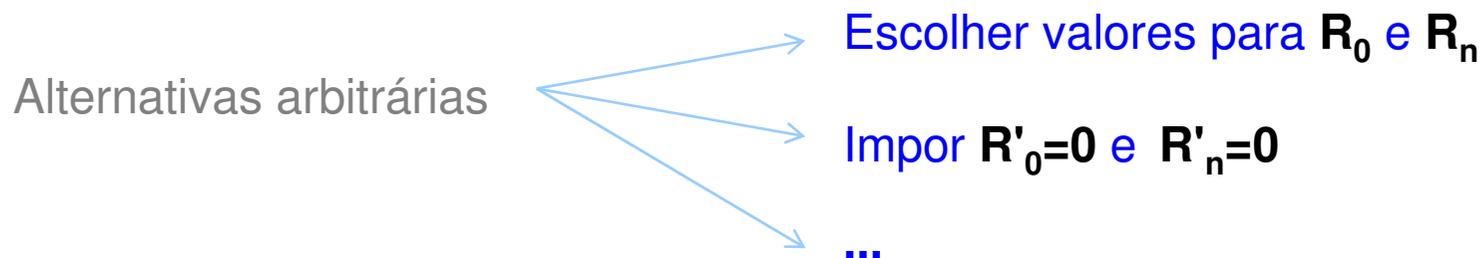
Condição para a segunda derivada:

$$\left(\frac{d^2 Q_k}{dt^2} \right)_{t=t_{k+1}} = \left(\frac{d^2 Q_{k+1}}{dt^2} \right)_{t=t_{k+1}}$$

Ao todo serão **n-1** equações, da forma:

$$2 c_k + 6 d_k (t_{k+1} - t_k) = 2 c_{k+1}$$

Para não deixarmos o sistema indeterminado, há que introduzir mais **2** equações:



Desvantagens dos Splines naturais

- ◆ **Como se trata de resolver um sistema de equações global, o controlo da curva é global (e não local).**
- ◆ **Qualquer que seja a alternativa tomada para a resolução da indeterminação do sistema, o ajuste da curva resultante depende inteiramente da qualidade dos pontos dados, não se garantindo, portanto, a ausência de oscilações indesejáveis (mesmo na situação dos erros nos dados serem pequenos).**

CONCLUSÃO:

Não é boa solução para design interativo!

Curvas cúbicas e notação a usar

Curva no espaço 3D (também se poderia escrever em coordenadas homogêneas XYZW):

$$Q(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_x t^3 + b_x t^2 + c_x t + d_x \\ a_y t^3 + b_y t^2 + c_y t + d_y \\ a_z t^3 + b_z t^2 + c_z t + d_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [t^3 \ t^2 \ t \ 1] \cdot [a_x \ b_x \ c_x \ d_x]^T \\ [t^3 \ t^2 \ t \ 1] \cdot [a_y \ b_y \ c_y \ d_y]^T \\ [t^3 \ t^2 \ t \ 1] \cdot [a_z \ b_z \ c_z \ d_z]^T \end{bmatrix}$$

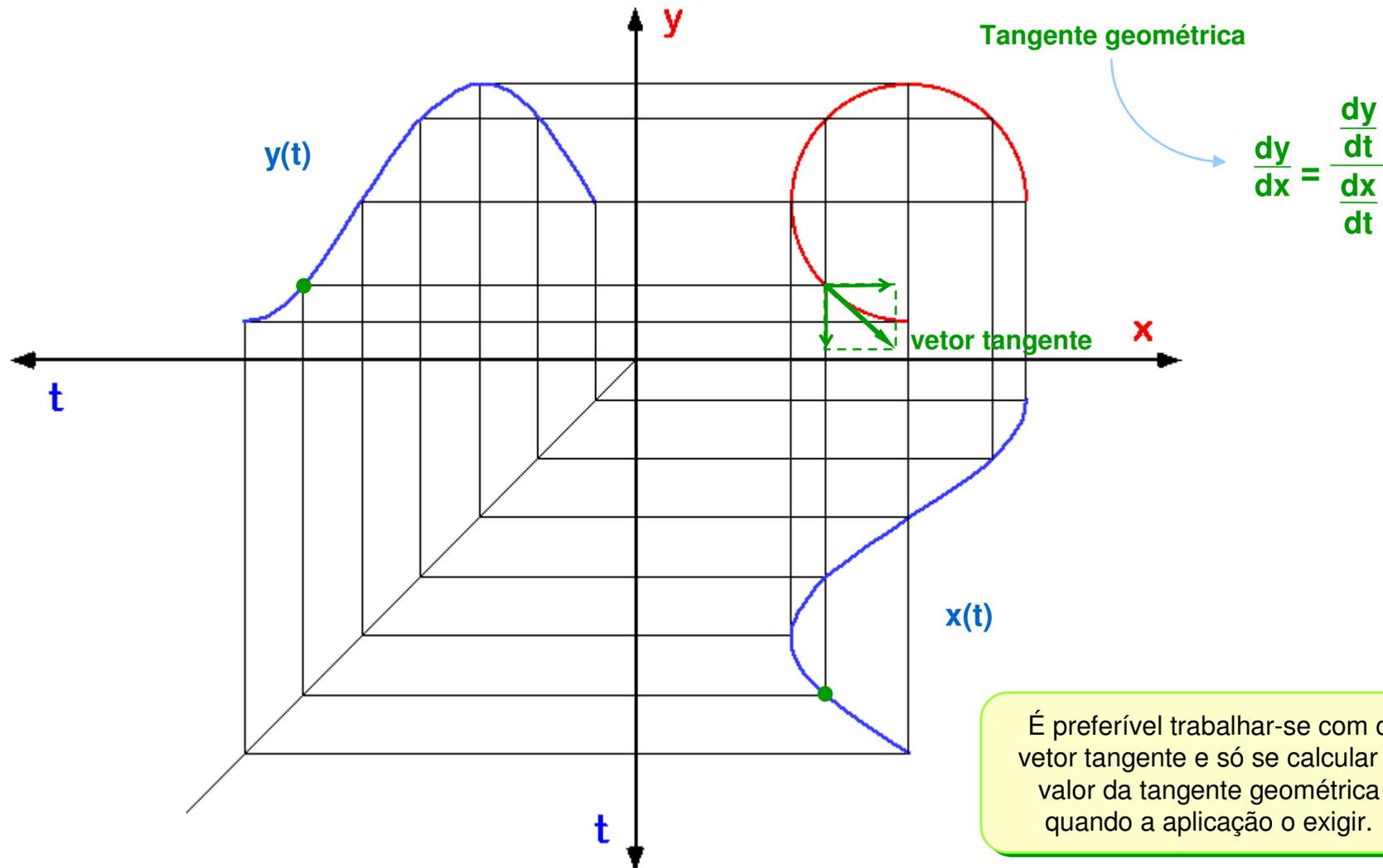
Sempre que não estiver em causa apenas uma coordenada em particular, por comodidade usar-se-á a seguinte expressão geral (vetorial):

$$Q(t) = a t^3 + b t^2 + c t + d = [t^3 \ t^2 \ t \ 1] \cdot \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix} = T.A$$

Conclusão:

4 coeficientes (vetoriais) arbitrários  podemos impor 4 condições

Eliminação do parâmetro em curva 2D



Exemplo com outro tipo de curva

Forma paramétrica:

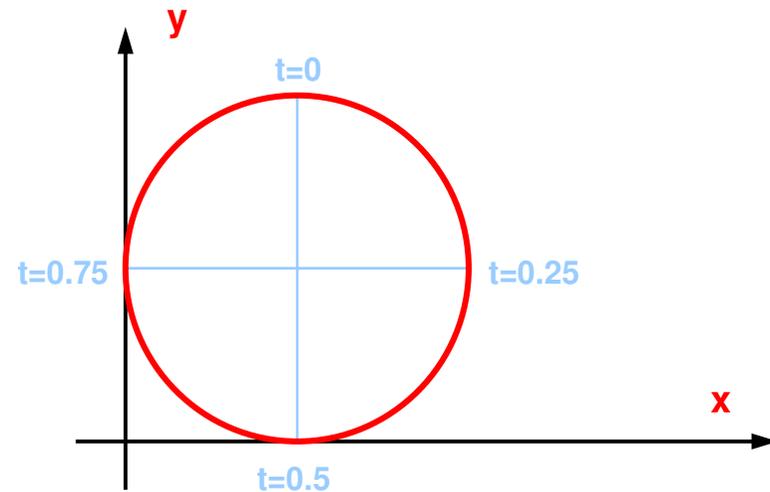
$$x = 1 + \sin(2\pi t)$$

$$y = 1 + \cos(2\pi t)$$

Componentes do vetor tangente:

$$\frac{dx}{dt} = 2\pi \cos(2\pi t)$$

$$\frac{dy}{dt} = -2\pi \sin(2\pi t)$$



Módulo do vetor tangente:

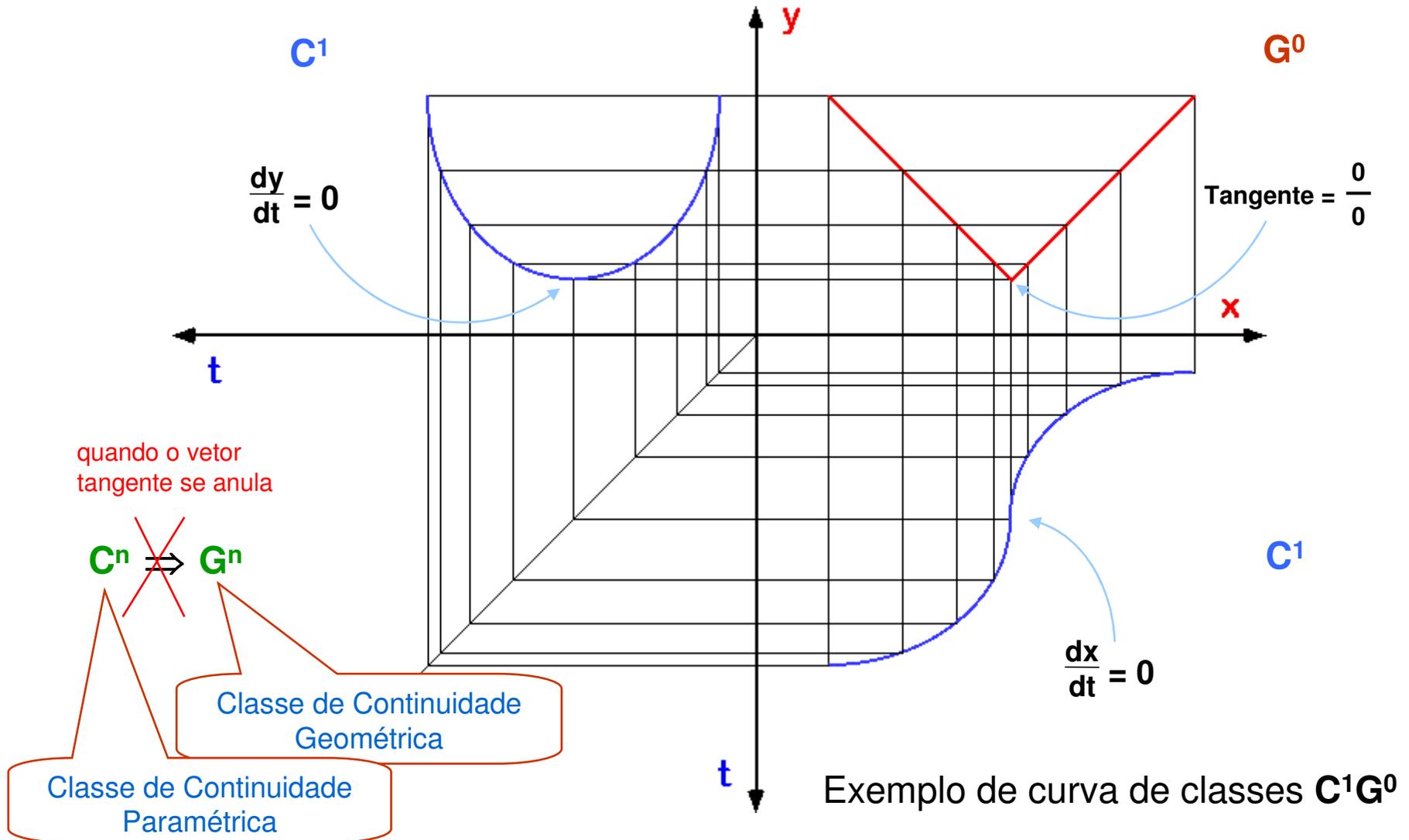
$$|R| = \sqrt{(dx/dt)^2 + (dy/dt)^2} = 2\pi \sqrt{\cos^2(2\pi t) + \sin^2(2\pi t)} = 2\pi$$

Tangente geométrica:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = -\operatorname{tg}(2\pi t)$$

Estas formas trigonométricas foram apenas um exemplo analítico, uma vez que o aprofundamento dos métodos basear-se-á em polinómios.

Continuidades Paramétrica e Geométrica

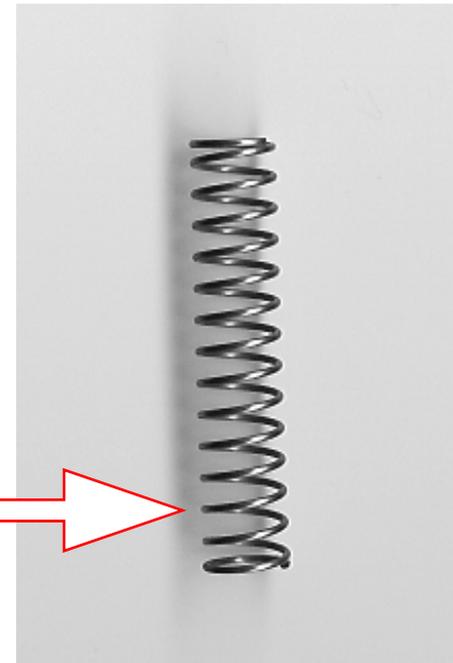


Comparação com exemplo fotográfico

Esta mola de arame não apresenta, no espaço 3D, quaisquer pontos angulosos ao longo da sua extensão...



... mas esse tipo de pontos pode aparecer numa fotografia (2D), dependendo da escolha do ponto de vista.



Curvas de Hermite

Condições: 2 pontos a interpolar e vetores tangentes nesses mesmos pontos.

$$Q(0) = P_0 \quad Q'(0) = R_0 \quad Q(1) = P_3 \quad Q'(1) = R_3$$

Na forma matricial:

$$\begin{bmatrix} Q(0) \\ Q(1) \\ Q'(0) \\ Q'(1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_0 \\ P_3 \\ R_0 \\ R_3 \end{bmatrix}$$

Vetor da geometria de Hermite G_H

Substituindo cada elemento $Q(t)$ por $T.A$ escrever-se-á:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot A = G_H$$

Resolvendo em ordem a A dará

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}^{-1} \cdot G_H = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 & 1 \\ -3 & 3 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot G_H = M_H \cdot G_H$$

Matriz de Hermite

pelo que uma curva de Hermite é da forma

$$Q(t) = T \cdot M_H \cdot G_H$$

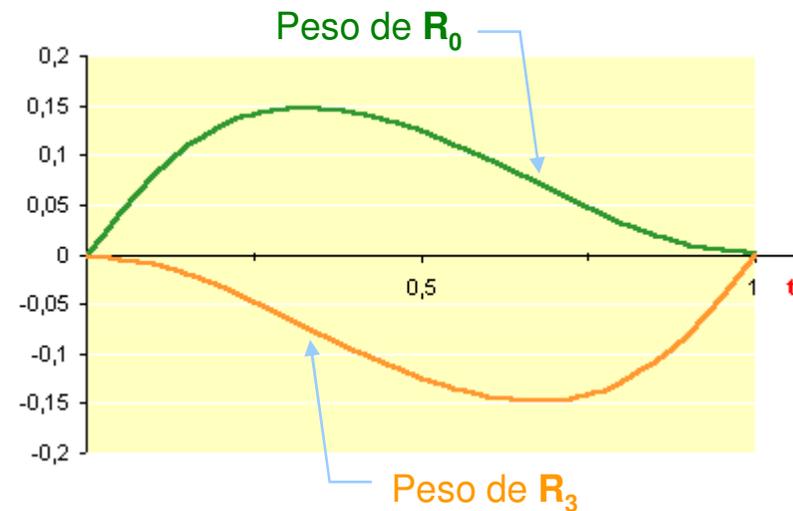
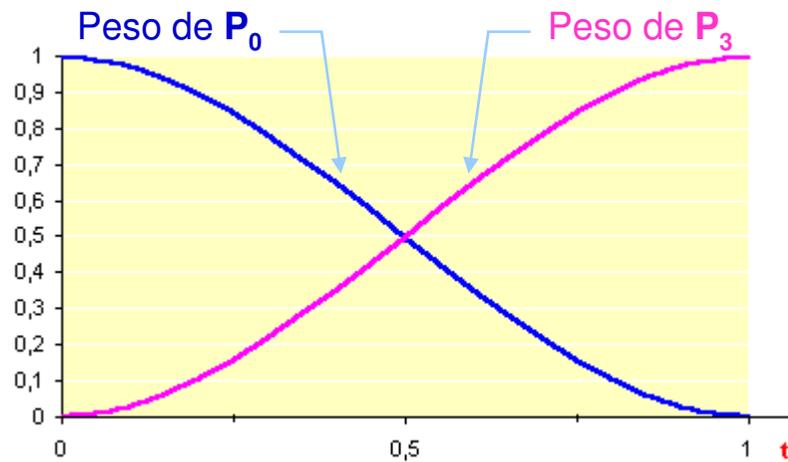
Blending functions

$$Q(t) = T \cdot M_H \cdot G_H$$

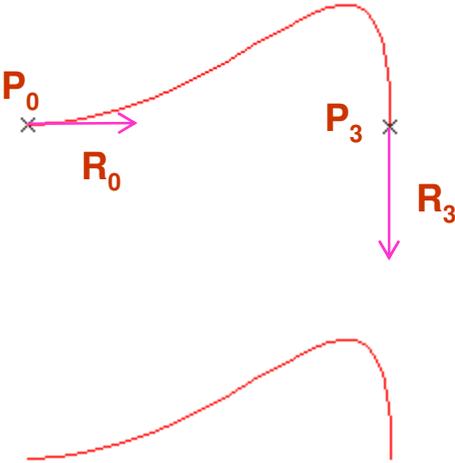
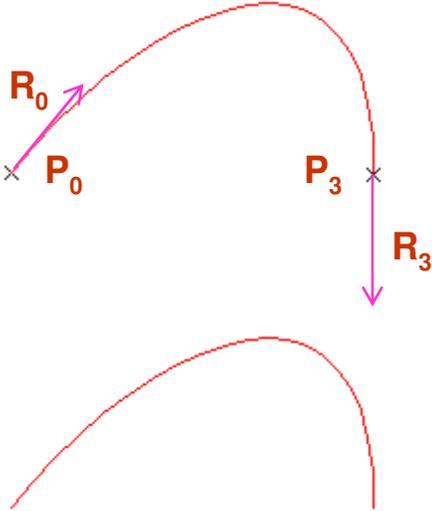
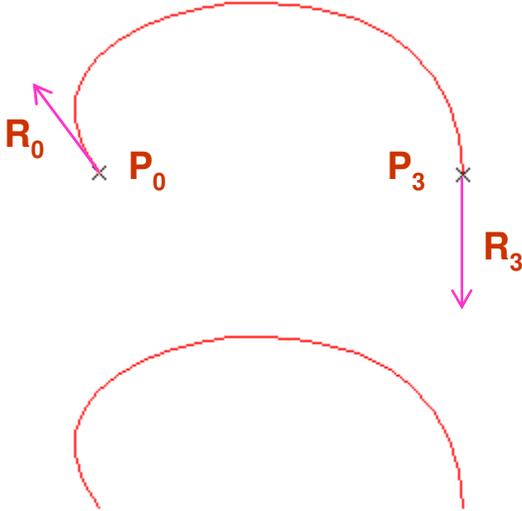
Os pesos dos elementos do vetor de geometria são funções de t :

Blending Functions

$$T \cdot M_H = [2t^3 - 3t^2 + 1 \quad -2t^3 + 3t^2 \quad t^3 - 2t^2 + t \quad t^3 - t^2]$$

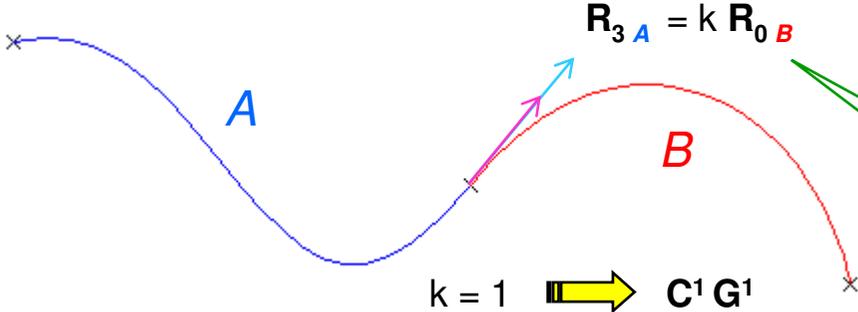
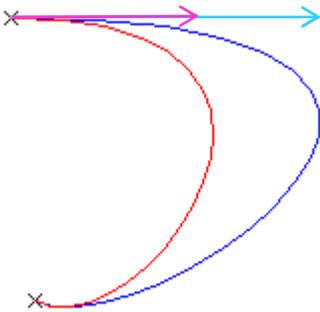


Exemplos de curvas no plano



Condição $k > 0$ para $C^0 G^1$ no ponto de junção de troços:

Influência da norma do vetor tangente:



o vetor tangente também será contínuo

a tangente geométrica será contínua

Curvas de Bézier

Condições: As mesmas das curvas de Hermite, introduzindo-se 2 pontos intermédios que determinam os vetores tangentes.

$$Q'(0) = R_0 = 3 (P_1 - P_0)$$

$$Q'(1) = R_3 = 3 (P_3 - P_2)$$

donde:

$$\begin{matrix} \boxed{G_H} \\ \uparrow \end{matrix} \begin{bmatrix} P_0 \\ P_3 \\ R_0 \\ R_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -3 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{matrix} \begin{bmatrix} P_0 \\ P_1 \\ P_2 \\ P_3 \end{bmatrix} \\ \uparrow \\ \boxed{G_B} \end{matrix}$$

Vetor da geometria de Bézier

$$Q(t) = T \cdot M_H \cdot G_H$$



$$Q(t) = T \cdot M_B \cdot G_B$$

com a Matriz de Bézier:

$$M_B = \begin{bmatrix} -1 & 3 & -3 & 1 \\ 3 & -6 & 3 & 0 \\ -3 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Numa interface para curvas de Bézier manipulam-se apenas pontos, enquanto que para curvas de Hermite há que manipular também vetores.

Curvas de Bézier

Exemplo geral da utilização de *Blending Functions* $B_{in}(t)$ de ordem n :

$$Q(t) = P_0 B_{0n}(t) + P_1 B_{1n}(t) + P_2 B_{2n}(t) + \dots + P_m B_{mn}(t)$$

com $0 \leq t \leq 1$ e $n = m + 1$

B_{in} equivale a $B_{i,n}$

Blending Functions de ordem $n=4$ para as Curvas de Bézier:

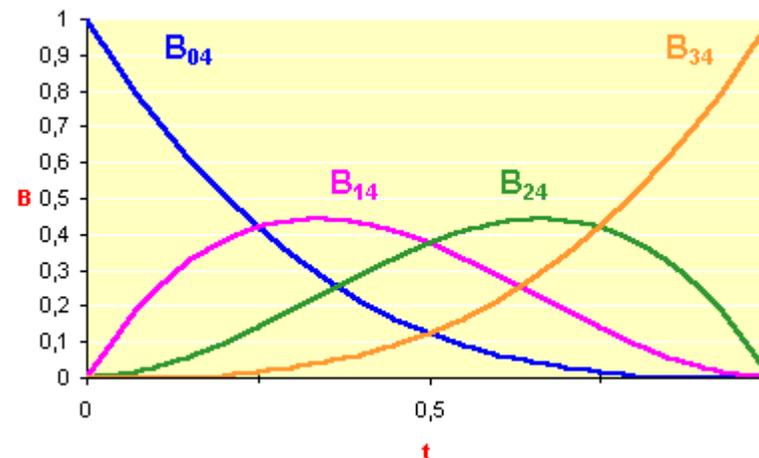
Se $Q(t) = T \cdot M_B \cdot G_B$ então $T \cdot M_B = [B_{04} \ B_{14} \ B_{24} \ B_{34}]$

$$B_{04}(t) = -t^3 + 3t^2 - 3t + 1$$

$$B_{14}(t) = 3t^3 - 6t^2 + 3t$$

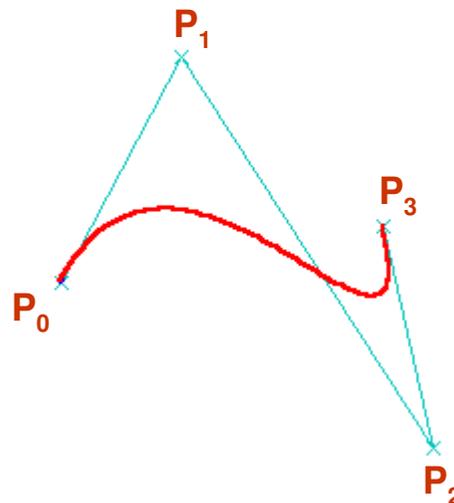
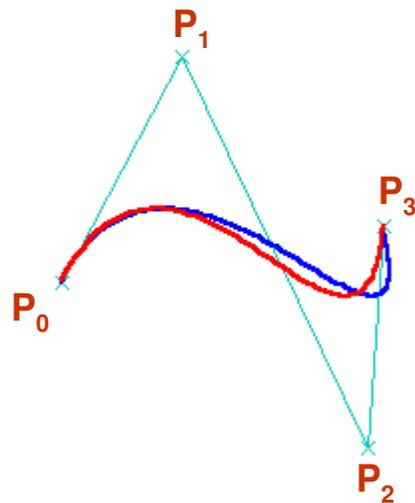
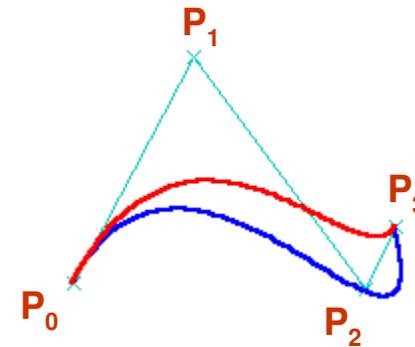
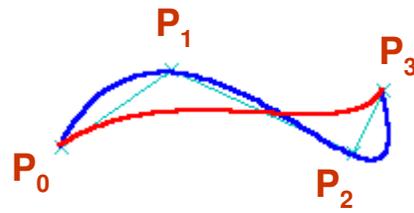
$$B_{24}(t) = -3t^3 + 3t^2$$

$$B_{34}(t) = t^3$$



Exemplo interativo

Curva pretendida:



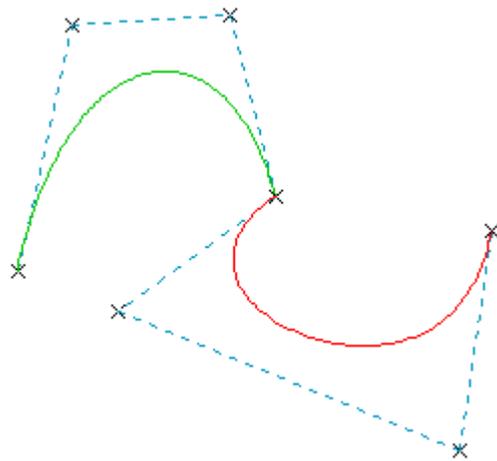
Invólucro Convexo
 2D: Polígono
 3D: Poliedro

Convex
Hull

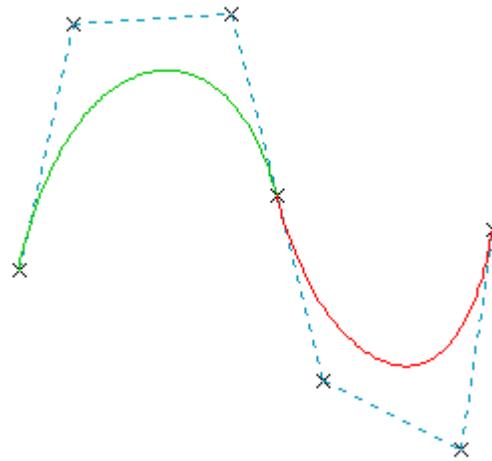
$$\sum_{i=0}^m B_{in}(t) = 1$$

$$B_{in}(t) \geq 0$$

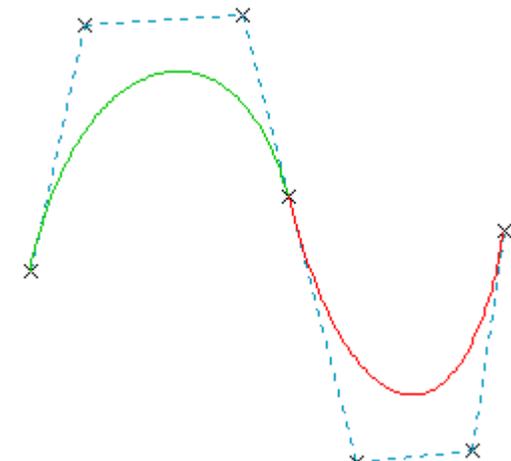
Junção de troços (segmentos) de curva



Continuidade **C⁰ G⁰** na junção
(vetores tangentes com direções ou sentidos diferentes)



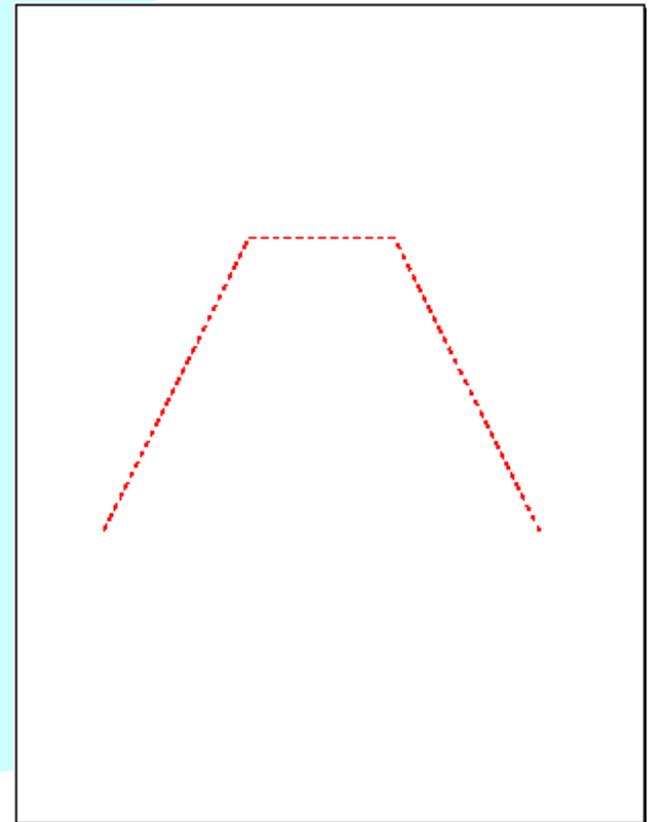
Continuidade **C¹ G¹** na junção
(vetores tangentes iguais)



Continuidade **C⁰ G¹** na junção
(vetores tangentes apenas com a mesma direção e sentido)

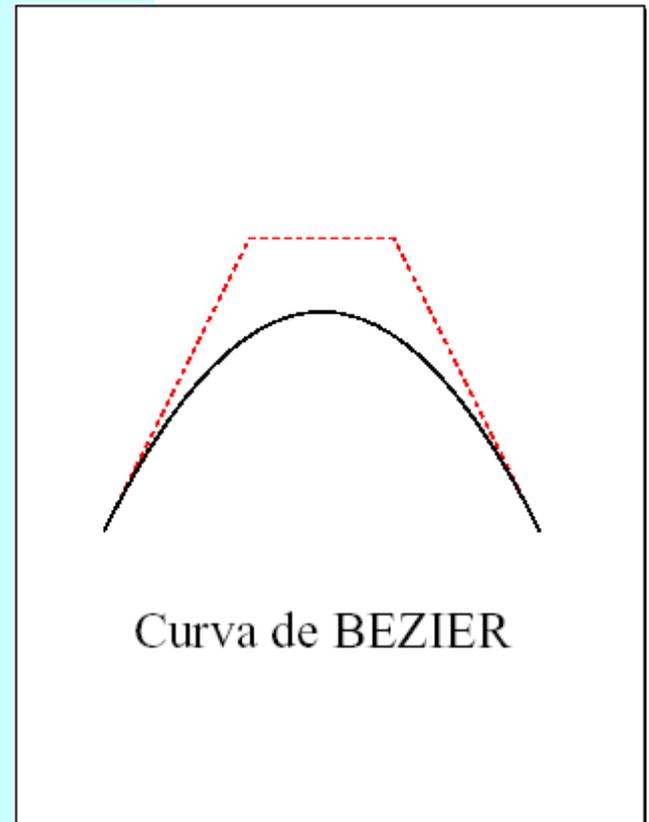
Exemplo de utilização em PostScript

```
%!PS
% Poligonal guia numa curva de Bézier (M.Próspero)
/cm {28.35 mul} def
3 cm 10 cm moveto
8 cm 20 cm lineto
13 cm 20 cm lineto
18 cm 10 cm lineto
[ 0.2 cm 0.2 cm ] 0 setdash
0.02 cm setlinewidth
1.0 0.0 0.0 setrgbcolor
stroke
showpage
```



Exemplo de utilização em PostScript

```
%!PS
% Desenho de uma curva de Bézier (M.Próspero)
/cm {28.35 mul} def
3 cm 10 cm moveto
gsave
  8 cm 20 cm lineto
  13 cm 20 cm lineto
  18 cm 10 cm lineto
  [ 0.2 cm 0.2 cm ] 0 setdash
  0.02 cm setlinewidth
  1.0 0.0 0.0 setrgbcolor
  stroke
grestore
8 cm 20 cm 13 cm 20 cm 18 cm 10 cm curveto
stroke
% Legenda:
/Times-Roman findfont
50 scalefont
setfont
4 cm 6 cm moveto
(Curva de BEZIER) show
showpage
```



Algoritmo de DE CASTELJAU

A partir dos pontos dados P_i (apresentados agora na forma P_{0i}) definem-se pontos auxiliares:

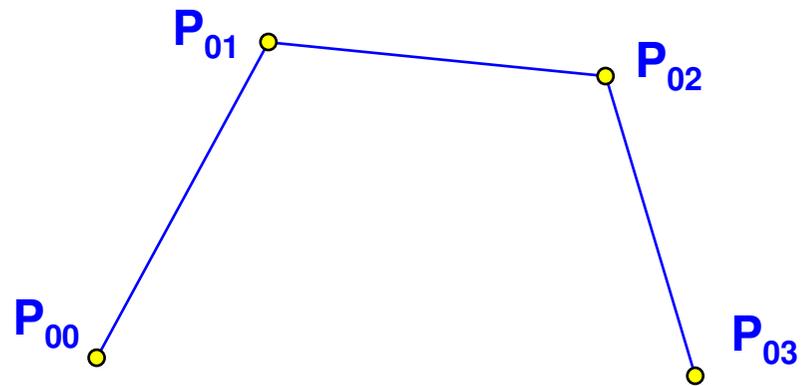
$$P_{k,n}(t) = (1 - t) P_{k-1,n-1}(t) + t P_{k-1,n}(t)$$

Exercício: Verificar que $P_{33}(t)$ corresponde à curva cúbica de Bézier.

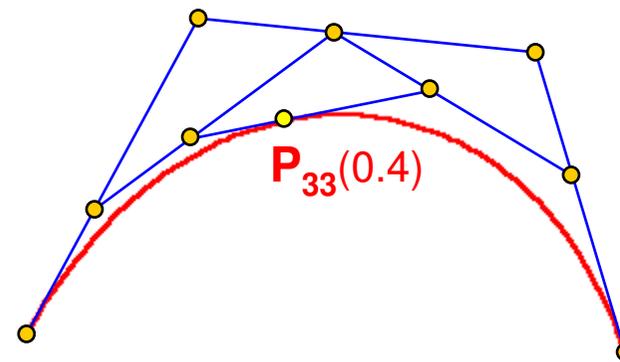
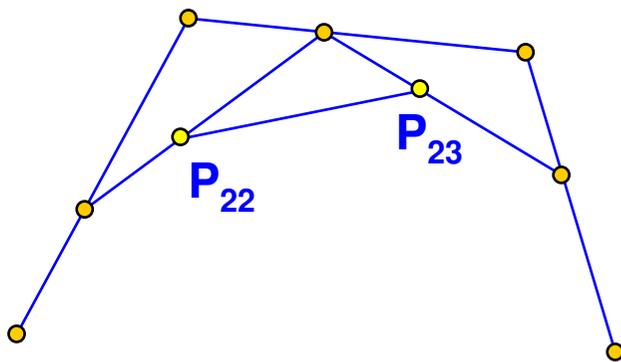
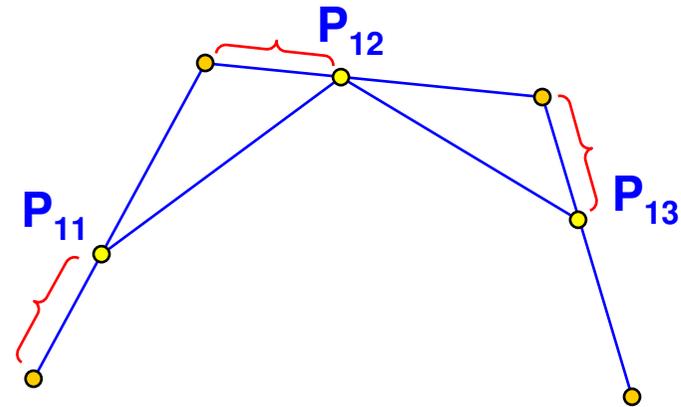
Resolução:

$$\begin{aligned} P_{33}(t) &= (1 - t) P_{22}(t) + t P_{23}(t) \\ &= (1 - t) ((1 - t) P_{11}(t) + t P_{12}(t)) + \\ &\quad t ((1 - t) P_{12}(t) + t P_{13}(t)) \\ &= (1 - t)^2 ((1 - t) P_{00} + t P_{01}) + \\ &\quad 2(t - t^2) ((1 - t) P_{01} + t P_{02}) + t^2 ((1 - t) P_{02} + t P_{03}) \\ &= (1 - t)^3 P_{00} + (3t - 6t^2 + 3t^3) P_{01} + (3t^2 - 3t^3) P_{02} + t^3 P_{03} \\ &= Q_{\text{Bézier}}(t) \end{aligned}$$

Aplicação geométrica



Para $t=0.4$:



Ver Applet em http://www.saltire.com/applets/advanced_geometry/spline/spline.htm

Aproximação Bézier-Bernstein

Generalização:

$$Q(t) = \sum_{i=0}^m P_i B_{in}(t)$$

com $0 \leq t \leq 1$ e $n = m + 1$

Curva de ordem n , aplicada a $m+1$ pontos e tendo como funções de peso (*Blending Functions*) os

Polinómios de Bernstein:

$$B_{k,n}(t) = \frac{(n-1)!}{k!(n-1-k)!} t^k (1-t)^{n-1-k}$$

As Curvas cúbicas de Bézier são o caso particular em que $n=4$ pontos.

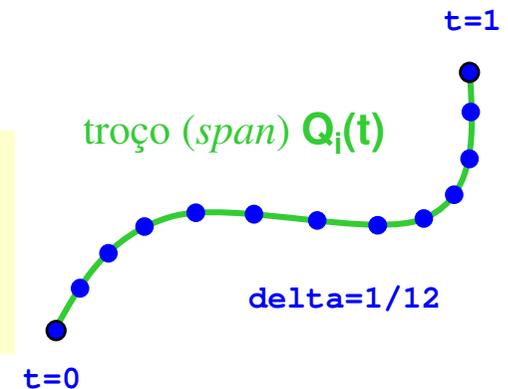
Avaliação de uma curva cúbica

Em 2D ou 3D, cada troço i tem a forma

$$Q_i(t) = T \cdot A = a * t^3 + b * t^2 + c * t + d$$

Algoritmo de visualização (aproximação a poligonal 3D):

```
for (i=first_span to last_span)
  for (j=1 to 1/delta)
    Line_3D( Q_i((j-1)*delta), Q_i(j*delta) )
```



Com este algoritmo, a curva $Q_i(t)$ é avaliada $2/\text{delta}$ vezes (e $1+1/\text{delta}$ recorrendo à posição corrente ou a uma variável auxiliar). Mas a eficiência aumentará se se puder reduzir o número de operações aritméticas.

Um dos métodos para tal é o de **HORNER**:

$$Q_i(t) = ((a * t + b) * t + c) * t + d$$

(Extra programa: Um outro método, ainda mais rápido, é o das **Diferenças Finitas Descendentes**)

Curvas B-Spline

$$Q(t) = T \cdot M_{Bs} \cdot G_{Bs}$$

O vetor da geometria G_{Bs} é igual ao de Bézier (G_B), sendo diferente a Matriz B-spline M_{Bs} :

$$M_{Bs} = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} -1 & 3 & -3 & 1 \\ 3 & -6 & 3 & 0 \\ -3 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Blending Functions:

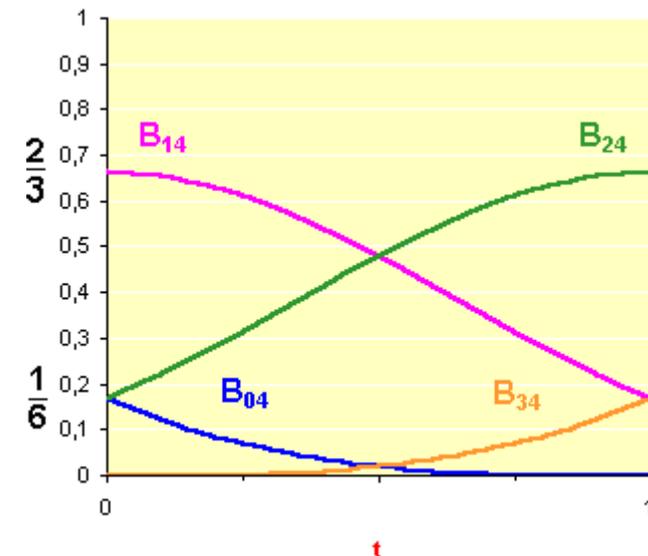
$$T \cdot M_{Bs} = [B_{04} \quad B_{14} \quad B_{24} \quad B_{34}]$$

$$B_{04}(t) = (-t^3 + 3t^2 - 3t + 1) / 6$$

$$B_{14}(t) = (3t^3 - 6t^2 + 4) / 6$$

$$B_{24}(t) = (-3t^3 + 3t^2 + 3t + 1) / 6$$

$$B_{34}(t) = t^3 / 6$$



Conclusão:

Início da curva \Rightarrow vizinhança de P_1

Final da curva \Rightarrow vizinhança de P_2

Propriedades: C^0

Sejam dados os seguintes vetores da geometria, geradores dos troços Q_3 e Q_4 :

$$G_{Bs_3} = \begin{bmatrix} P_0 \\ P_1 \\ P_2 \\ P_3 \end{bmatrix} \quad G_{Bs_4} = \begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \\ P_4 \end{bmatrix}$$

Sendo

$$T \cdot M_{Bs} = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} -t^3 + 3t^2 - 3t + 1 & 3t^3 - 6t^2 + 4 & -3t^3 + 3t^2 + 3t + 1 & t^3 \end{bmatrix}$$

e considerando o intervalo $0 \leq t \leq 1$ para cada troço, por substituição obter-se-á:

$$Q_3(1) = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 4 & 1 \end{bmatrix} G_{Bs_3}$$

$$Q_4(0) = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 1 & 4 & 1 & 0 \end{bmatrix} G_{Bs_4}$$

$$Q_3(1) = Q_4(0)$$

Conclusão:  Junção dos troços num mesmo ponto, implicando continuidade C^0

Propriedades: C^1

Primeira derivada:

$$\frac{d}{dt} \mathbf{T} \cdot \mathbf{M}_{Bs} = \frac{1}{2} [-t^2 + 2t - 1 \quad 3t^2 - 4t \quad -3t^2 + 2t + 1 \quad t^2]$$

Considerando o intervalo $0 \leq t \leq 1$ para cada trecho, por substituição obter-se-á:

$$\frac{d}{dt} \mathbf{Q}_3(1) = \frac{1}{2} [0 \quad -1 \quad 0 \quad 1] \mathbf{G}_{Bs_3}$$

$$\frac{d}{dt} \mathbf{Q}_4(0) = \frac{1}{2} [-1 \quad 0 \quad 1 \quad 0] \mathbf{G}_{Bs_4}$$

$$\frac{d}{dt} \mathbf{Q}_3(1) = \frac{d}{dt} \mathbf{Q}_4(0)$$

Conclusão:  Continuidade C^1 no ponto de junção dos treços

Propriedades: C^2

Segunda derivada:

$$\frac{d^2}{dt^2} \mathbf{T} \cdot \mathbf{M}_{Bs} = [-t+1 \quad 3t-2 \quad -3t+1 \quad t]$$

Considerando o intervalo $0 \leq t \leq 1$ para cada trecho, por substituição obter-se-á:

$$\frac{d^2}{dt^2} \mathbf{Q}_3(1) = [0 \quad 1 \quad -2 \quad 1] \mathbf{G}_{Bs3}$$

$$\frac{d^2}{dt^2} \mathbf{Q}_4(0) = [1 \quad -2 \quad 1 \quad 0] \mathbf{G}_{Bs4}$$

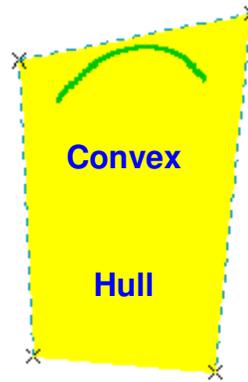
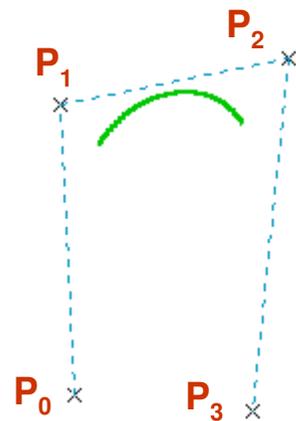
$$\frac{d^2}{dt^2} \mathbf{Q}_3(1) = \frac{d^2}{dt^2} \mathbf{Q}_4(0)$$

Conclusão final:



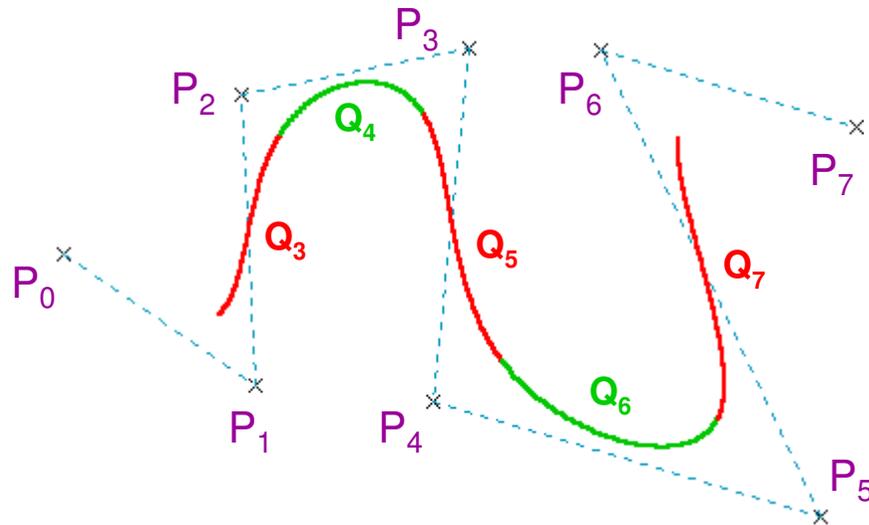
Continuidade C^2 no ponto de junção dos treços

Exemplos de curvas B-spline em 2D



$$\sum_{i=0}^m B_{in}(t) = 1$$

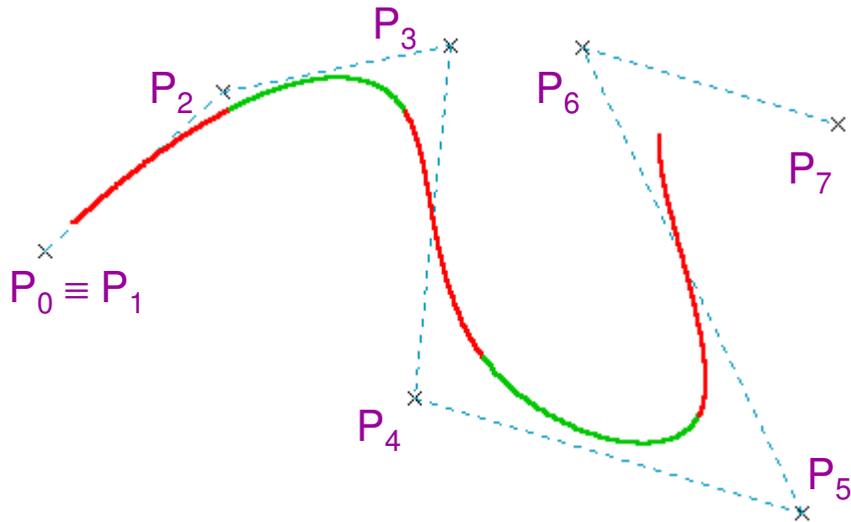
$$B_{in}(t) \geq 0$$



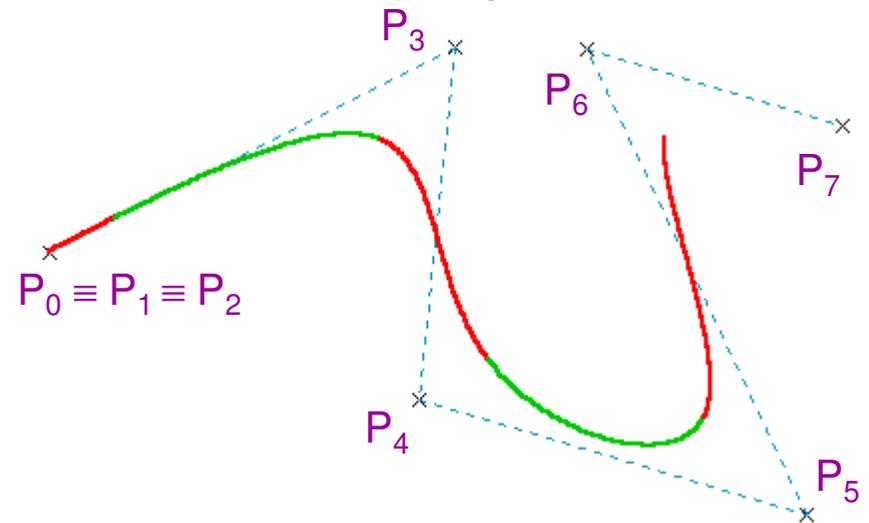
$$G_{Bsi} = \begin{bmatrix} P_{i-3} \\ P_{i-2} \\ P_{i-1} \\ P_i \end{bmatrix}$$

Grau de multiplicidade de um ponto

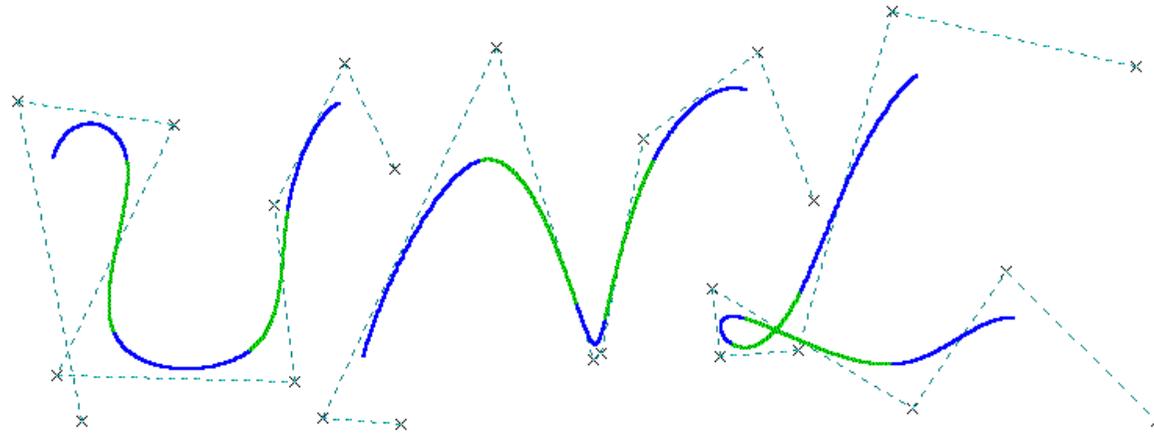
Ponto com Grau de Multiplicidade 2 :



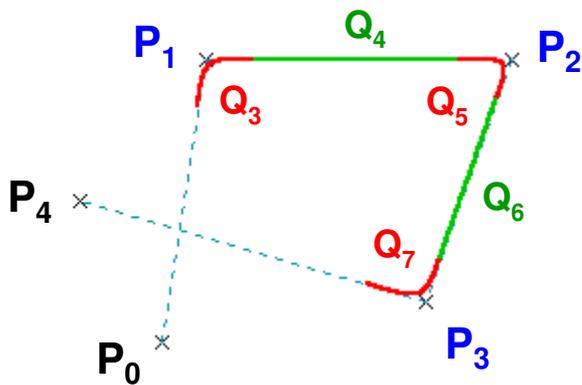
Ponto com Grau de Multiplicidade 3 :



Outros exemplos (1)



Pontos com
Grau de Multiplicidade 2 :



$$G_{Bs3} = \begin{bmatrix} P_0 \\ P_1 \\ P_1 \\ P_2 \end{bmatrix}$$

$$G_{Bs4} = \begin{bmatrix} P_1 \\ P_1 \\ P_2 \\ P_2 \end{bmatrix}$$

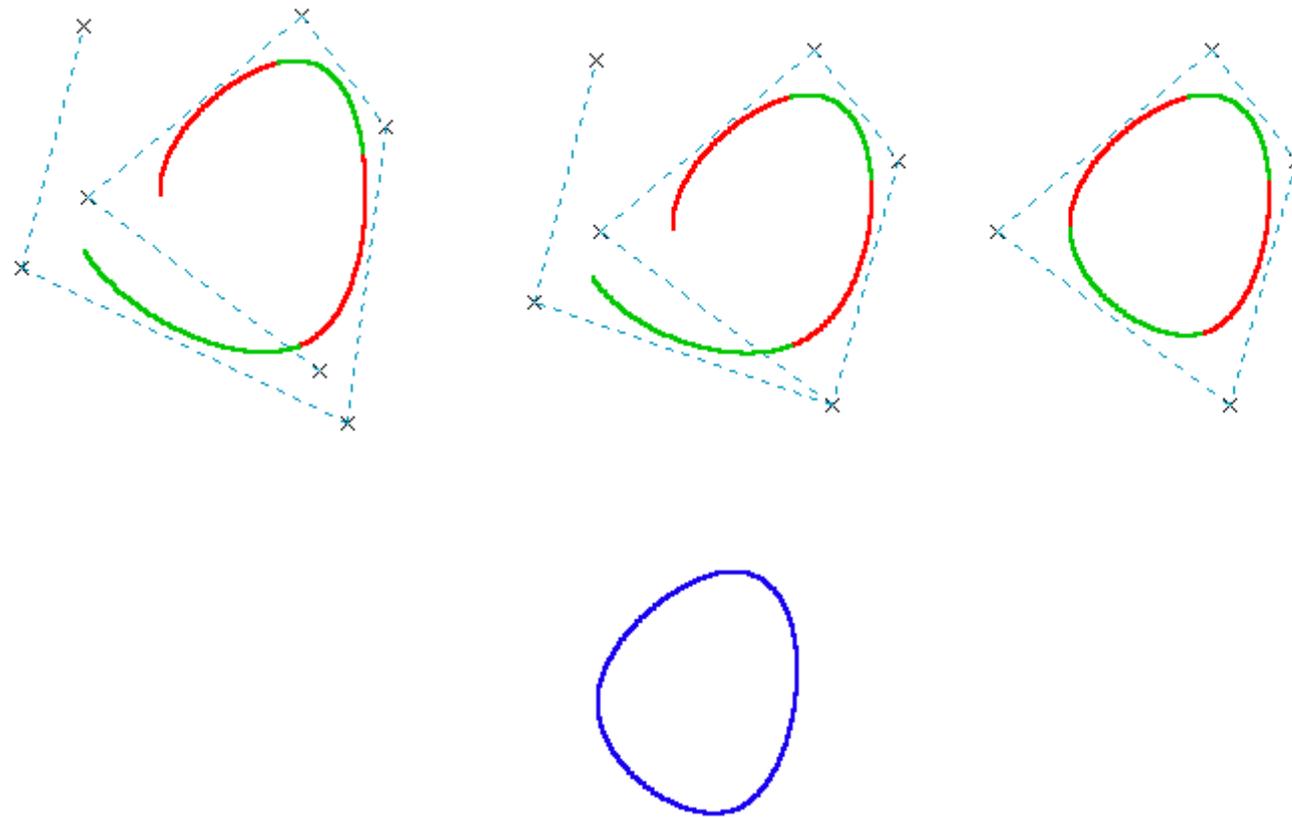
$$G_{Bs5} = \begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_2 \\ P_3 \end{bmatrix}$$

$$G_{Bs6} = \begin{bmatrix} P_2 \\ P_2 \\ P_3 \\ P_3 \end{bmatrix}$$

$$G_{Bs7} = \begin{bmatrix} P_2 \\ P_3 \\ P_3 \\ P_4 \end{bmatrix}$$

Outros exemplos (2)

Construção de uma curva fechada :



Continuidade e Interpolação

◆ Efeito dos graus de multiplicidade dos pontos de controlo:

- Multiplicidade 1 → continuidade $C^2 G^2$
- Multiplicidade 2 → continuidade $C^2 G^1$
- Multiplicidade 3 → continuidade $C^2 G^0$
- Multiplicidade 3 → interpola esse ponto de controlo

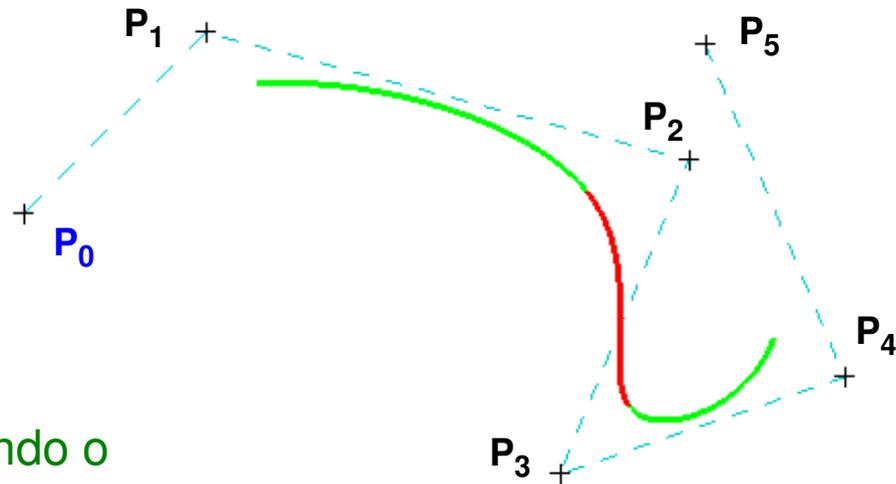
Interpretação
geométrica:
continuidade da
curvatura

◆ Haverá alternativa à interpolação no(s) extremo(s) de uma curva sem ser pelo aumento do grau de multiplicidade do(s) ponto(s), permitindo manter continuidade de classe $C^2 G^2$ com futuros troços adjacentes?

- Sim, por criação de novo(s) ponto(s) de controlo dito(s) “fantasma(s)”

Pontos de controlo “fantasmas”

Admitindo que se quer interpolar P_0 :

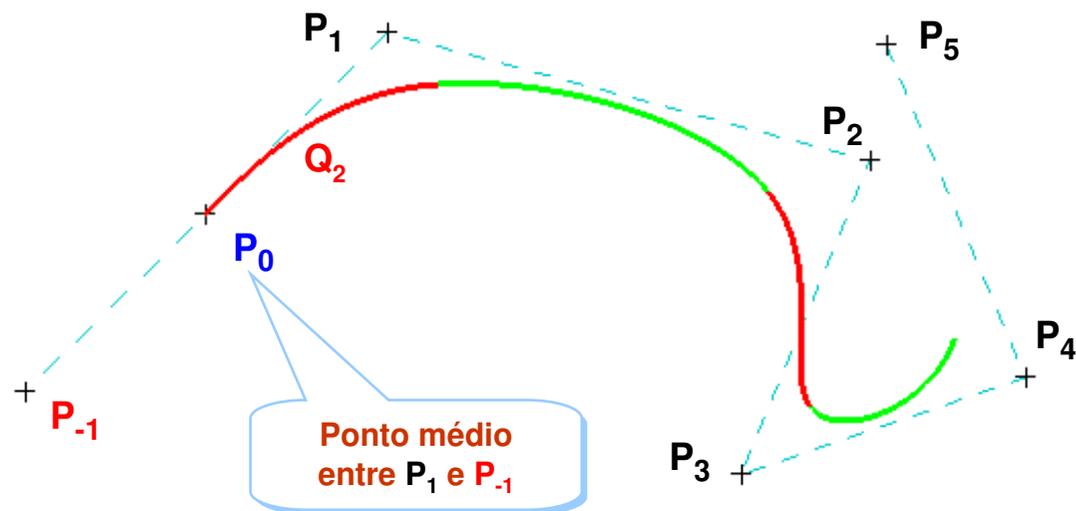


Resolve-se matematicamente encontrando o ponto “fantasma” P_{-1} que verifique a condição

$$Q_2(t=0) = T \cdot M_{Bs} \cdot \begin{bmatrix} P_{-1} \\ P_0 \\ P_1 \\ P_2 \end{bmatrix} = P_0$$

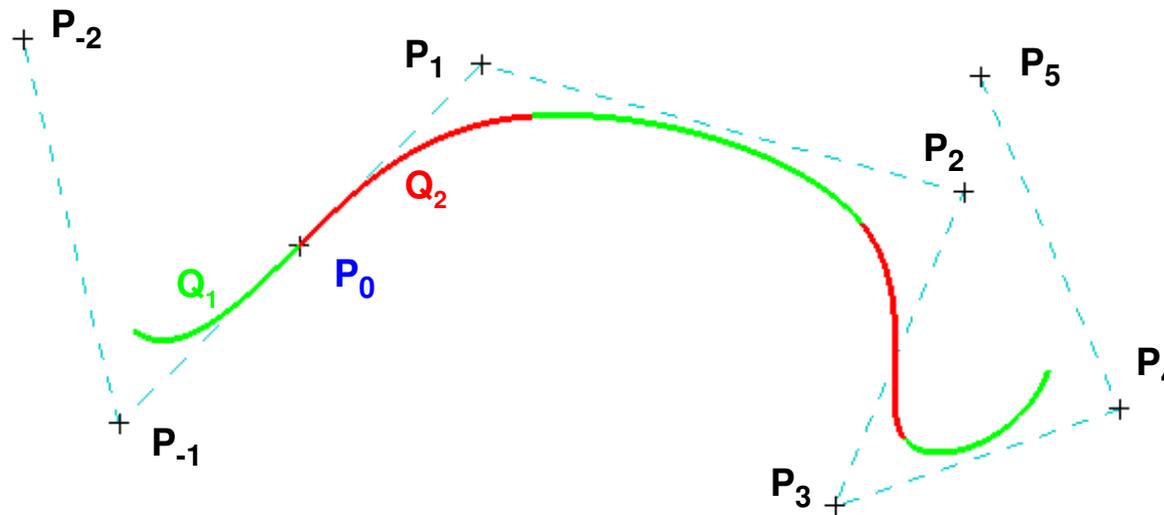
$$(P_{-1} + 4P_0 + P_1) / 6 = P_0$$

$$P_{-1} = 2P_0 - P_1$$



Junção com interpolação

Construção de um troço Q_1 adjacente a Q_2 , que também irá interpolar P_0 , mantendo-se continuidade $C^2 G^2$ em todas as junções de troços da curva (o que não seria possível se P_0 tivesse grau de multiplicidade superior a 1):



Conclusão: O método para interpolação pode ser utilizado na junção de dois troços já existentes se se condicionarem geometricamente três dos respectivos pontos de controlo.

Curvas de Catmull-Rom

ou Splines de Overhauser

$$Q(t) = T \cdot M_{CR} \cdot G_{CR}$$

$$M_{CR} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -1 & 3 & -3 & 1 \\ 2 & -5 & 4 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Blending Functions:

$$T \cdot M_{CR} = [B_{04} \quad B_{14} \quad B_{24} \quad B_{34}]$$

$$B_{04}(t) = (-t^3 + 2t^2 - t) / 2$$

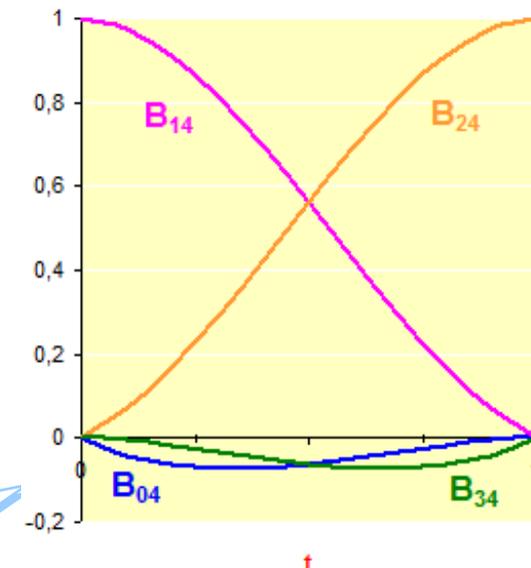
$$B_{14}(t) = (3t^3 - 5t^2 + 2) / 2$$

$$B_{24}(t) = (-3t^3 + 4t^2 + t) / 2$$

$$B_{34}(t) = (t^3 - t^2) / 2$$

As curvas não gozam da propriedade de *convex hull*

O vetor de geometria G_{CR} é igual ao de B-spline (G_{Bs})



Propriedades

Considerando o intervalo $0 \leq t \leq 1$ para cada troço:

$$Q_i(0) = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 \end{bmatrix} G_{CR_i} = P_{i-2}$$

$$Q_i(1) = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 \end{bmatrix} G_{CR_i} = P_{i-1}$$

$$Q_{i+1}(0) = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 \end{bmatrix} G_{CR_{i+1}} = P_{i-1}$$

$$Q_i(1) = Q_{i+1}(0)$$

Interpolação de pontos de controlo e, no mínimo, C^0

$$\frac{d}{dt} T \cdot M_{CR} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -3t^2 + 4t - 1 & 9t^2 - 10t & -9t^2 + 8t + 1 & 3t^2 - 2t \end{bmatrix}$$

$$\frac{d}{dt} Q_i(1) = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} G_{CR_i} = \frac{P_i - P_{i-2}}{2}$$

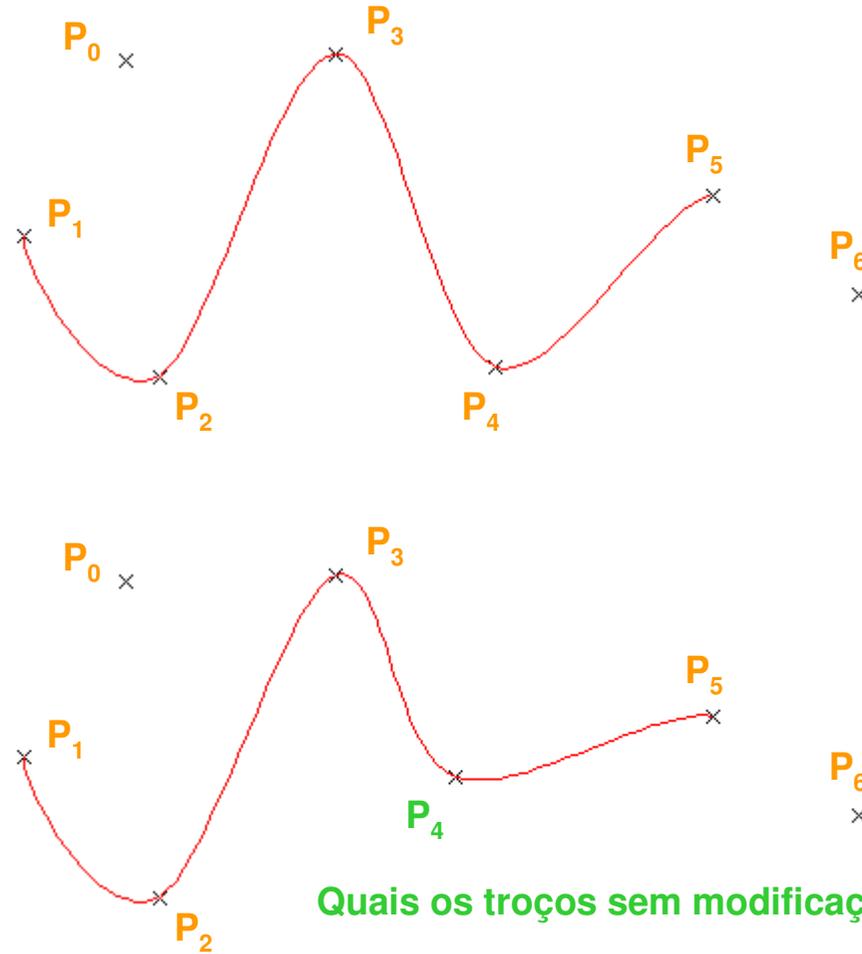
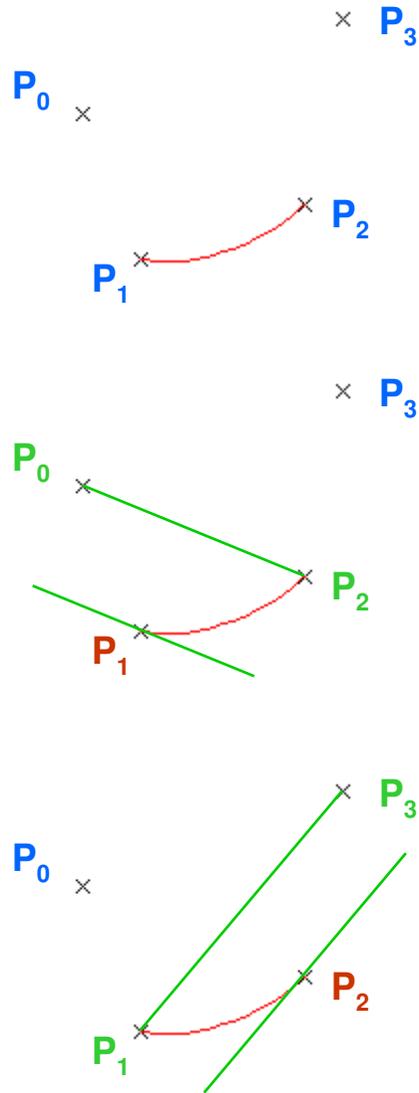
$$\frac{d}{dt} Q_{i+1}(0) = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} G_{CR_{i+1}} = \frac{P_i - P_{i-2}}{2}$$

$$\frac{d}{dt} Q_i(1) = \frac{d}{dt} Q_{i+1}(0)$$

Continuidade C^1

Exemplos

Direção dos vetores tangentes



Conversão entre curvas cúbicas

Se for construído (ou se já existir num determinado sistema) um avaliador para um certo tipo de curvas cúbicas, é possível usá-lo com qualquer outra forma de curva cúbica desde que se proceda a uma conversão entre curvas.

É o que se passa com os avaliadores (eficientes) para curvas de Bézier já existentes em PostScript e em OpenGL.

PROBLEMA:

Dada a curva $Q(t) = T \cdot M_{Bs} \cdot G_{Bs}$

encontrar G_B tal que $Q(t) = T \cdot M_B \cdot G_B$

Conversão para curva de Bézier

Solução:

$$M_B \cdot G_B = M_{Bs} \cdot G_{Bs}$$

$$G_B = M_B^{-1} \cdot M_{Bs} \cdot G_{Bs}$$

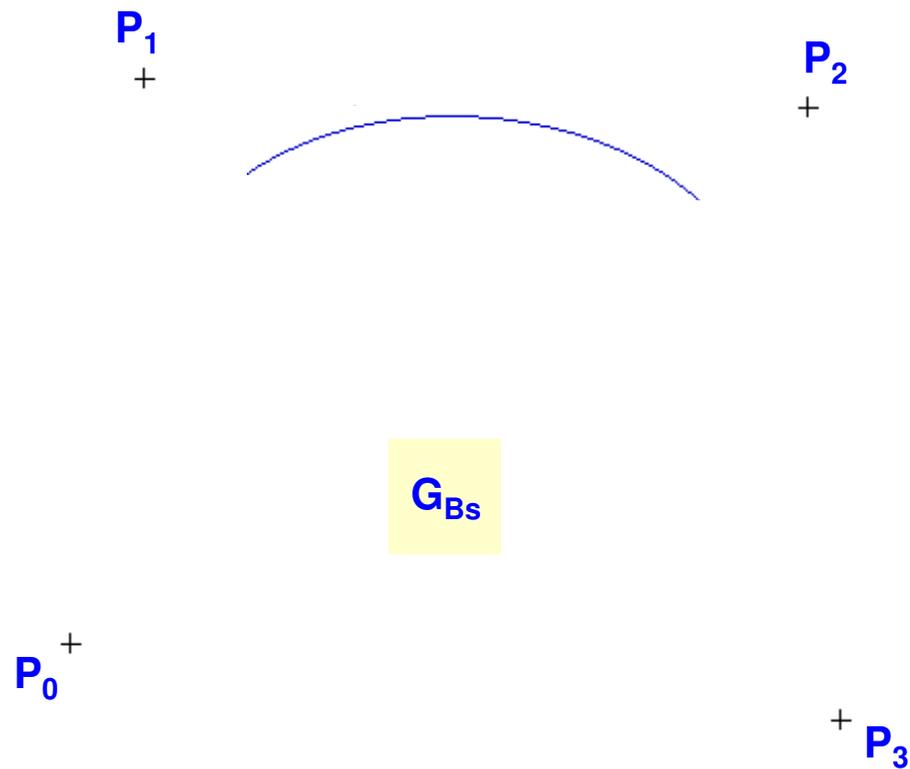
em que

$$M_B^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1/3 & 1 \\ 0 & 1/3 & 2/3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Conclusão:

Qualquer curva cúbica pode ser convertida numa curva cúbica de Bézier

Exemplo de conversão B-spline → Bézier



Exemplo de conversão B-spline → Bézier

