

# Curvas

# Curva

Especificada por uma ou mais equações com **uma** só variável independente.

## ◆ Descrição não-paramétrica

- Forma explícita

$$Q = ( x , y=f(x) , z=g(x) )$$

- Forma implícita

$$Q = ( F(x,y,z)=0 , G(x,y,z)=0 )$$

**x** variável independente

variável independente arbitrária

## ◆ Descrição paramétrica

$$Q = ( x=f(t) , y=g(t) , z=h(t) )$$

**t** variável independente

$$a \leq t \leq b$$

M.Próspero

# Superfície

Especificada por uma ou mais equações com **duas** variáveis independentes.

## ◆ Descrição não-paramétrica

- Forma explícita

$$Q = ( x , y , z=f(x,y) )$$

- Forma implícita

$$Q = ( F(x,y,z)=0 )$$

$x, y$  variáveis independentes

2 variáveis independentes arbitrárias

## ◆ Descrição paramétrica

$$Q = ( x=f(s,t) , y=g(s,t) , z=h(s,t) )$$

$s, t$  variáveis independentes

$$a \leq t \leq b$$

$$c \leq s \leq d$$

M.Próspero

# Curvas e Superfícies

## ◆ Descrição não-paramétrica

### ● Forma explícita

😊 Facilidade de cálculo

😞 Não pode representar uma correspondência que não seja função

😞 Não se podem aplicar diretamente transformações por operadores matriciais

◆ Exemplo:  $y = \sqrt{4 - x^2}$  e  $y = -\sqrt{4 - x^2}$  com  $-2 \leq x \leq 2$

não sendo direto aplicar-se uma matriz **M** de transformação

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \mathbf{M} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

M.Próspero

# Curvas e Superfícies

## ◆ Descrição não-paramétrica

### ● Forma implícita

- 😊 Representação de correspondências que não sejam funções
- 😞 Pode ser difícil a determinação das raízes
- 😞 Não se podem aplicar diretamente transformações por operadores matriciais

### ◆ Exemplo:

$$x^2 + y^2 - 4 = 0$$

$$\text{com } -2 \leq x \leq 2$$

# Curvas e Superfícies

## ◆ Descrição paramétrica

- 😊 Representação de correspondências que não sejam funções
- 😊 Podem aplicar-se diretamente transformações por operadores matriciais

### ◆ Exemplo:

$$\begin{aligned}x &= 2 \cos t \\y &= 2 \sin t\end{aligned}\quad \text{com } 0 \leq t \leq 2\pi$$

ou

$$\begin{aligned}x &= 2 \cos (2\pi t) \\y &= 2 \sin (2\pi t)\end{aligned}\quad \text{com } 0 \leq t \leq 1$$

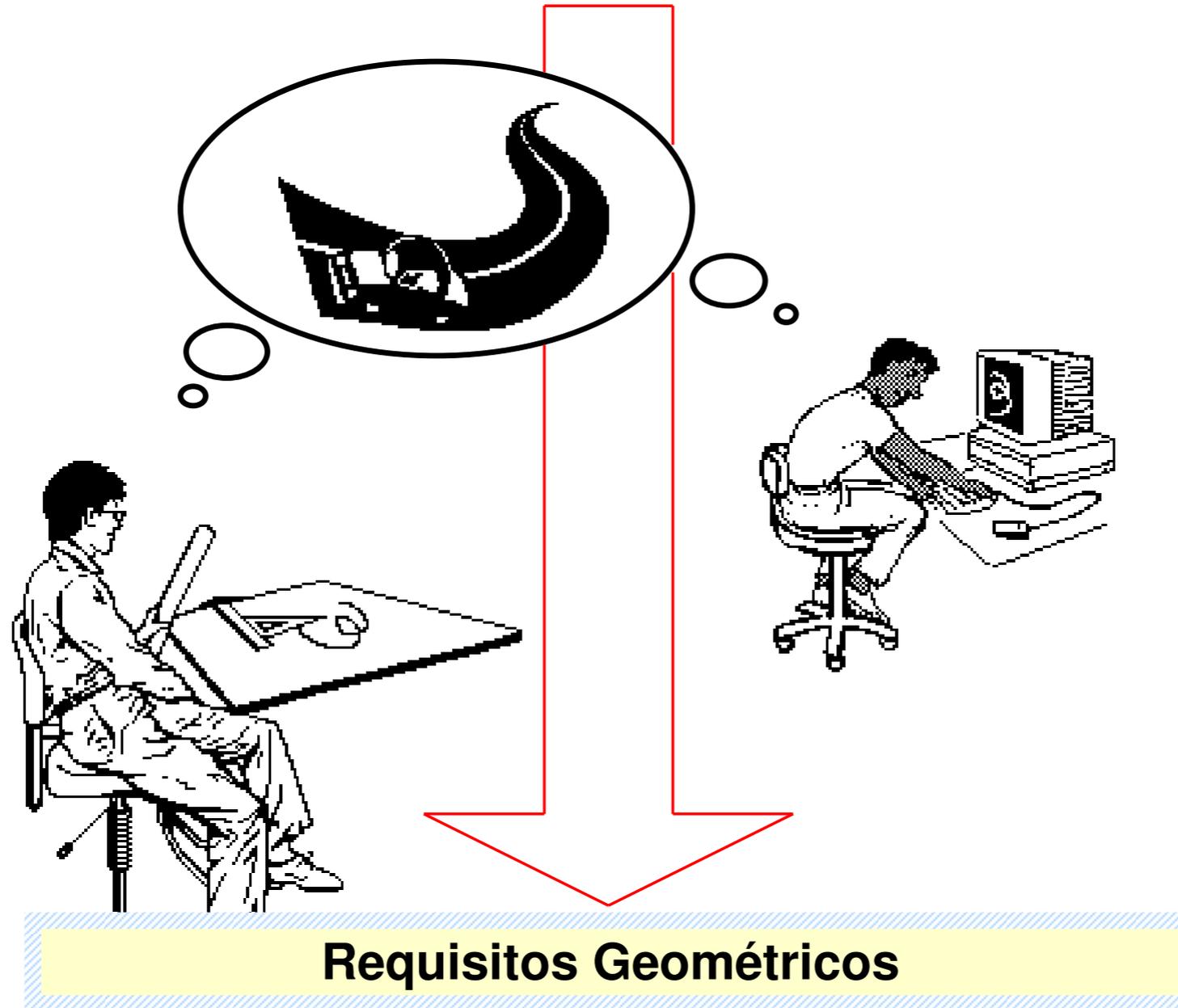
sendo já direto aplicar-se uma matriz **M** de transformação

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \mathbf{M} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

M.Próspero

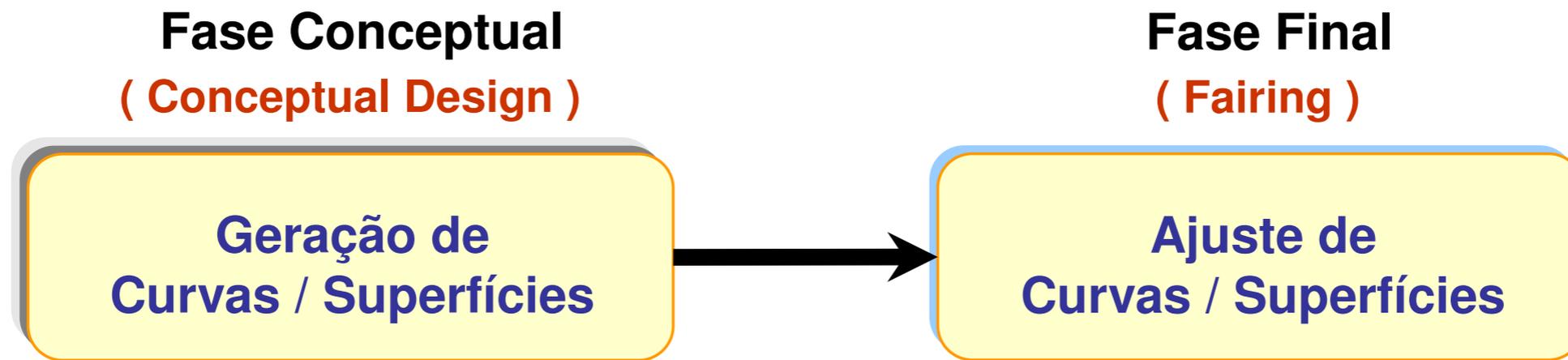
# O processo de Design

**Requisitos Técnicos, Requisitos Físicos, Requisitos Económicos, etc.**



*M.Próspero*

# Fases no processo de Design



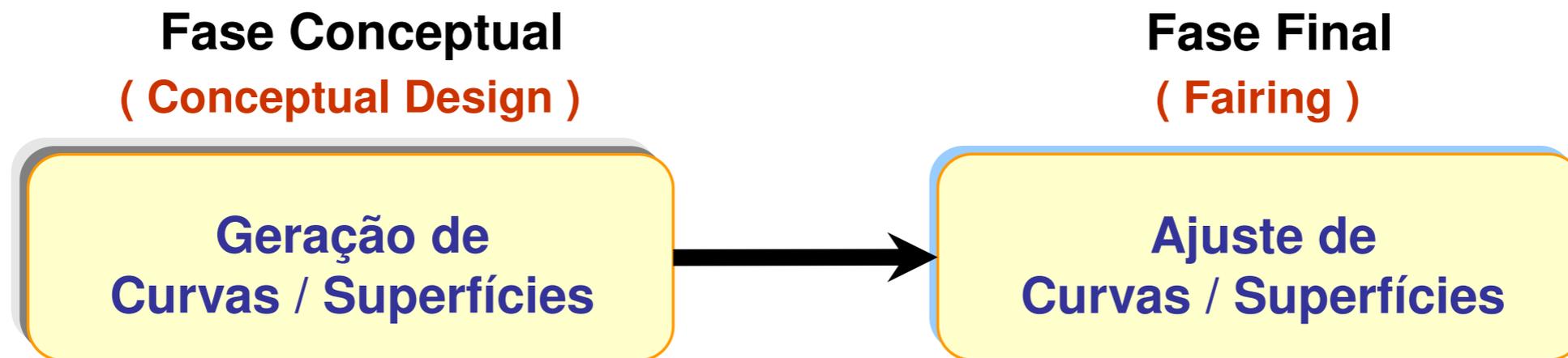
## The Design Problem

**Given:** A set of geometric requirements [such as offsets, slopes, second derivatives, areas, volumes, centroids, ...] sufficient to characterize the intended shape.

**Find:** A curve (surface) meeting these requirements.

*M.Próspero*

# Fases no processo de Design



## The Fairing Problem

**Given:** A curve (surface), or a corresponding set of offset points, approximating an intended shape.

**Find:** A fairer curve (surface) according to some fairness criterion without deviating too far from the given shape.

What does fair mean?

- Pleasing to the eye (aesthetic requirements)
- Related to the absence of unwanted deficiencies, particularly oscillations
- Spline fairness

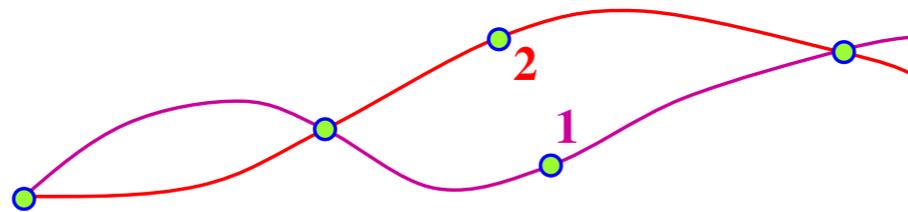
*M.Próspero*

# Alguns requisitos no design de Curvas

- ◆ Interpolar ou aproximar um certo número de pontos conhecidos, obtendo-se a equação da curva



- ◆ Controlar através de pontos conhecidos e de forma previsível: **local** (preferível) ou **globalmente**



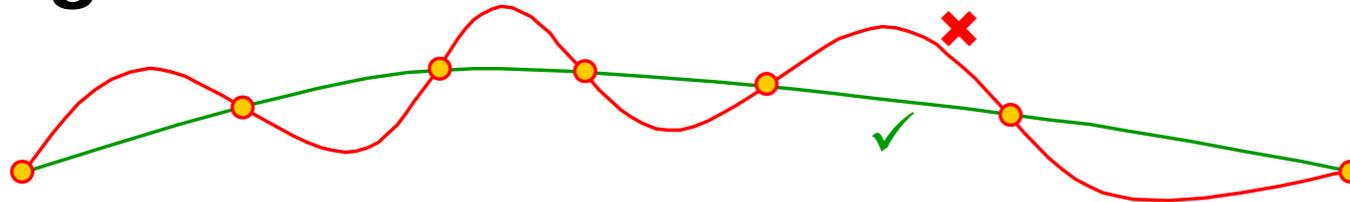
- ◆ Haver independência da forma da curva em relação ao sistema de eixos usado para especificar os pontos
- ◆ Permitir correspondências que não sejam funções



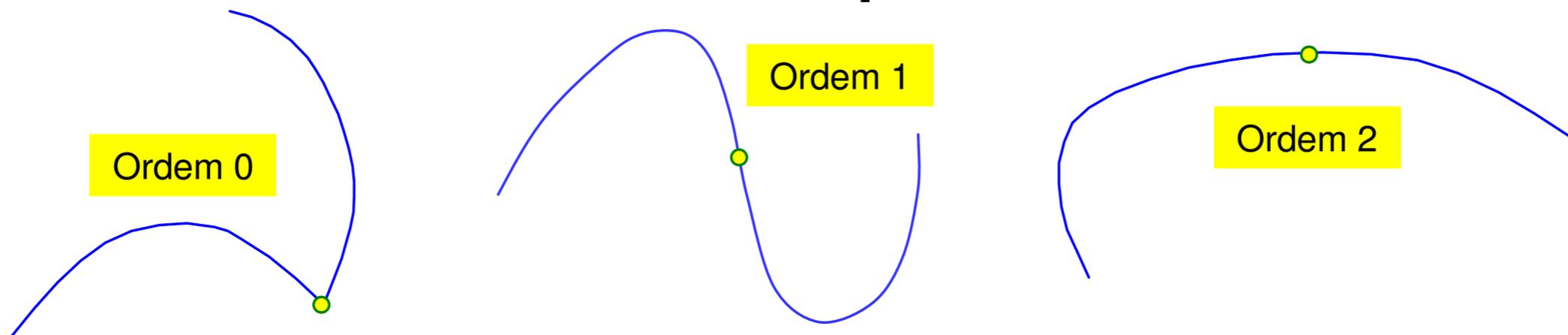
M.Próspero

# Alguns requisitos no design de Curvas

- ◆ **Existir tendência para suavizar pequenas irregularidades**



- ◆ **Disponibilizar grande versatilidade de formas**
- ◆ **Permitir a continuidade entre os troços que constituam uma curva complexa**



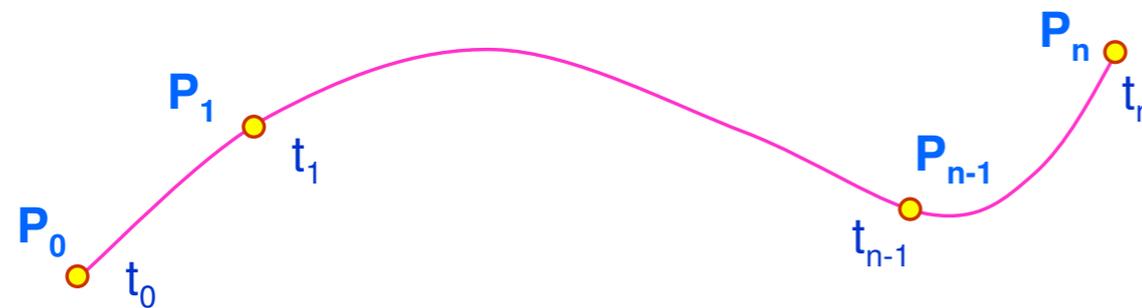
**1.<sup>a</sup> conclusão: Usar descrições paramétricas.**

M.Próspero

# Curvas de Interpolação

## ◆ Problema:

Encontrar uma curva  $Q(t)$  que passe por  $n+1$  pontos  $P_i$



$t_i \equiv$  nó ( *knot* ) associado a  $P_i$

Como consequência da descrição paramétrica, a escolha dos valores dos nós influencia o andamento da curva.

## ● Condições do problema:

- $Q(t_i) = P_i$  ,  $i = 0..n$
- Continuidade das funções e suas derivadas

## ● Resolução:

- Usar polinómios interpoladores

M.Próspero

# Interpolação de Lagrange

Existe um e um só polinómio de grau  $n$  que resolve o problema:

$$Q(t) = \sum_{i=0}^n P_i L_{in}(t)$$

em que

$$L_{in}(t) = \frac{(t - t_0) \dots (t - t_{i-1}) (t - t_{i+1}) \dots (t - t_n)}{(t_i - t_0) \dots (t_i - t_{i-1}) (t_i - t_{i+1}) \dots (t_i - t_n)}$$

Mas ...

... um polinómio de grau  $n$  tem até  $n-1$  extremos relativos e  $n-2$  pontos de inflexão !

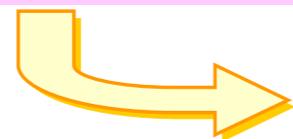
Em medições precisas, quando se usam muitos pontos, o resultado poderá ser uma oscilação indesejada da curva.

Este efeito negativo poderá ser evitado ?

**Não**, pois basta que haja um só ponto incompatível com uma curva suave.

A maioria das aplicações não requer continuidade das derivadas de elevada ordem

A solução é a interpolação da curva por troços contínuos !



Polinómios de baixo grau



M.Próspero

# Interpolação por Splines (naturais)

A teoria dos splines trata da interpolação polinomial, na generalidade e por troços.

DEFINIÇÃO DE SPLINE :

Uma função  $\mathbf{S}(t)$ , escalar ou vetorial, definida no intervalo  $[t_0, t_n]$ , é um **SPLINE** de **ordem k** (ou **grau k-1**) se :

- $\mathbf{S}(t)$  é um polinómio de grau **k-1** em cada intervalo  $[t_i, t_{i+1}]$ , com  $t_0 < \dots < t_i < t_{i+1} < \dots < t_n$
- $\mathbf{S}(t)$  e as suas derivadas de ordem **1..k-2** são contínuas em todo o intervalo onde é definida (isto é,  $\mathbf{S}(t)$  pertence à **classe  $C^{k-2}$** )

$k = 4$   **SPLINE CÚBICO**

**DADOS:**  $n+1$  pontos  $\mathbf{P}_i$  ( $i=0..n$ ) e nós  $t_i \in [t_0, t_n]$  associados

**OBJETIVO:**

Encontrar os polinómios cúbicos interpoladores por troços e que definem a função  $\mathbf{Q}(t)$  em  $[t_0, t_n]$  tal que pertence a  $C^2$  nos nós ( *knots* ).

M.Próspero

# Dedução dos coeficientes

Sendo polinómio cúbico, para o intervalo  $[t_k, t_{k+1}]$  pode escrever-se

$$Q_k(t) = a_k + b_k (t - t_k) + c_k (t - t_k)^2 + d_k (t - t_k)^3$$

Condições fronteira:

$$Q(t_k) = P_k$$

$$Q(t_{k+1}) = P_{k+1}$$

$$\left(\frac{dQ_k}{dt}\right)_{t=t_k} = R_k$$

$$\left(\frac{dQ_k}{dt}\right)_{t=t_{k+1}} = R_{k+1}$$

Substituindo e resolvendo dá:

$$a_k = P_k$$

$$b_k = R_k$$

$$c_k = \frac{3(P_{k+1} - P_k)}{h_k^2} - \frac{2R_k}{h_k} - \frac{R_{k+1}}{h_k}$$

$$d_k = \frac{2(P_k - P_{k+1})}{h_k^3} + \frac{R_k}{h_k^2} + \frac{R_{k+1}}{h_k^2}$$

com  $h_k = t_{k+1} - t_k$

# Condições adicionais

As **4** equações deduzidas para os coeficientes referem-se a cada um dos troços (intervalos), pelo que haverá ao todo **4n** equações.

As derivadas  $R_i$  (em número de **n+1**) ainda não são conhecidas, pelo que precisamos de outras **n+1** equações.

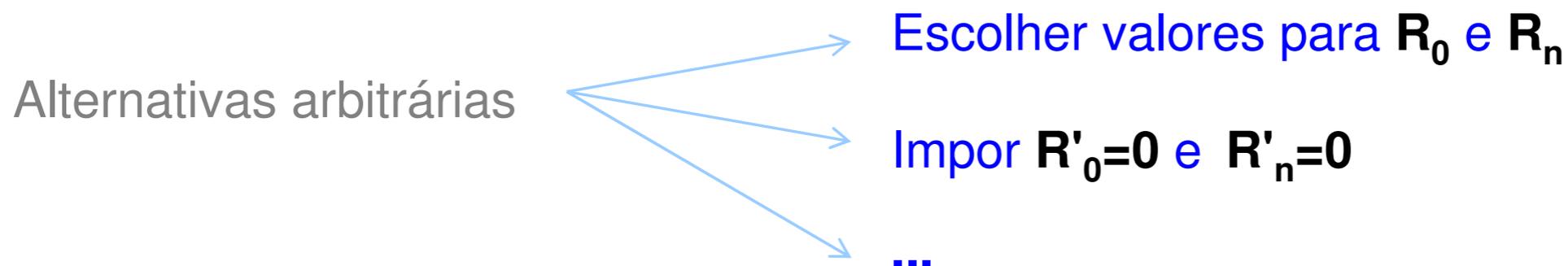
Condição para a segunda derivada:

$$\left(\frac{d^2 Q_k}{dt^2}\right)_{t=t_{k+1}} = \left(\frac{d^2 Q_{k+1}}{dt^2}\right)_{t=t_{k+1}}$$

Ao todo serão **n-1** equações, da forma:

$$2 c_k + 6 d_k (t_{k+1} - t_k) = 2 c_{k+1}$$

Para não deixarmos o sistema indeterminado, há que introduzir mais **2** equações:



M.Próspero

# Desvantagens dos Splines naturais

- ◆ Como se trata de resolver um sistema de equações global, o controlo da curva é global (e não local).
- ◆ Qualquer que seja a alternativa tomada para a resolução da indeterminação do sistema, o ajuste da curva resultante depende inteiramente da qualidade dos pontos dados, não se garantindo, portanto, a ausência de oscilações indesejáveis (mesmo na situação dos erros nos dados serem pequenos).

## CONCLUSÃO:

**Não é boa solução para design interativo!**

*M.Próspero*

# Curvas Cúbicas

# Curvas cúbicas e notação a usar

Curva no espaço 3D (também se poderia escrever em coordenadas homogêneas XYZW):

$$Q(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_x t^3 + b_x t^2 + c_x t + d_x \\ a_y t^3 + b_y t^2 + c_y t + d_y \\ a_z t^3 + b_z t^2 + c_z t + d_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [t^3 \ t^2 \ t \ 1] \cdot [a_x \ b_x \ c_x \ d_x]^T \\ [t^3 \ t^2 \ t \ 1] \cdot [a_y \ b_y \ c_y \ d_y]^T \\ [t^3 \ t^2 \ t \ 1] \cdot [a_z \ b_z \ c_z \ d_z]^T \end{bmatrix}$$

Sempre que não estiver em causa apenas uma coordenada em particular, por comodidade usar-se-á a seguinte expressão geral (vetorial):

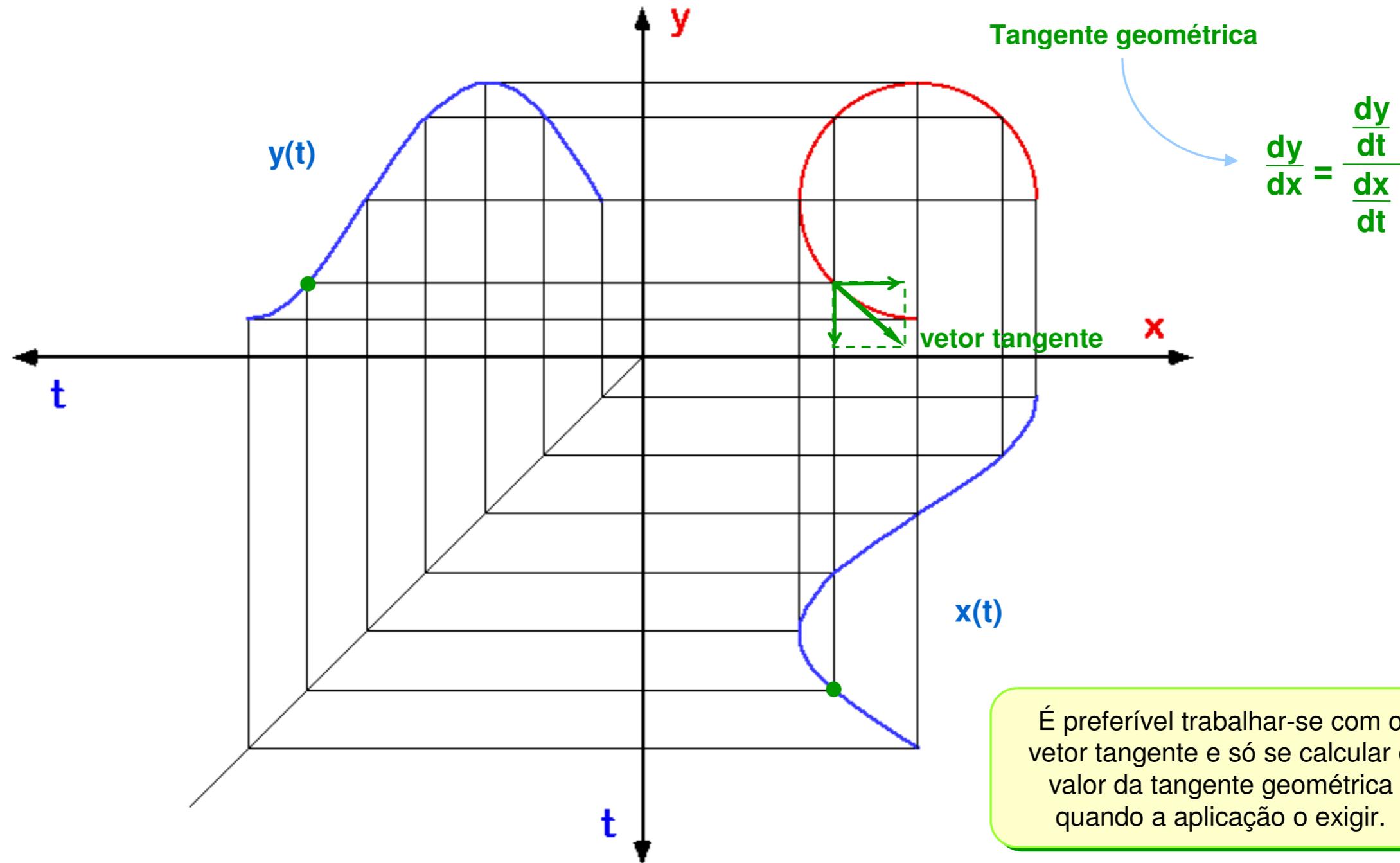
$$Q(t) = a t^3 + b t^2 + c t + d = [t^3 \ t^2 \ t \ 1] \cdot \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix} = T.A$$

## Conclusão:

4 coeficientes (vetoriais) arbitrários  podemos impor 4 condições

M.Próspero

# Eliminação do parâmetro em curva 2D



M.Próspero

# Exemplo com outro tipo de curva

Forma paramétrica:

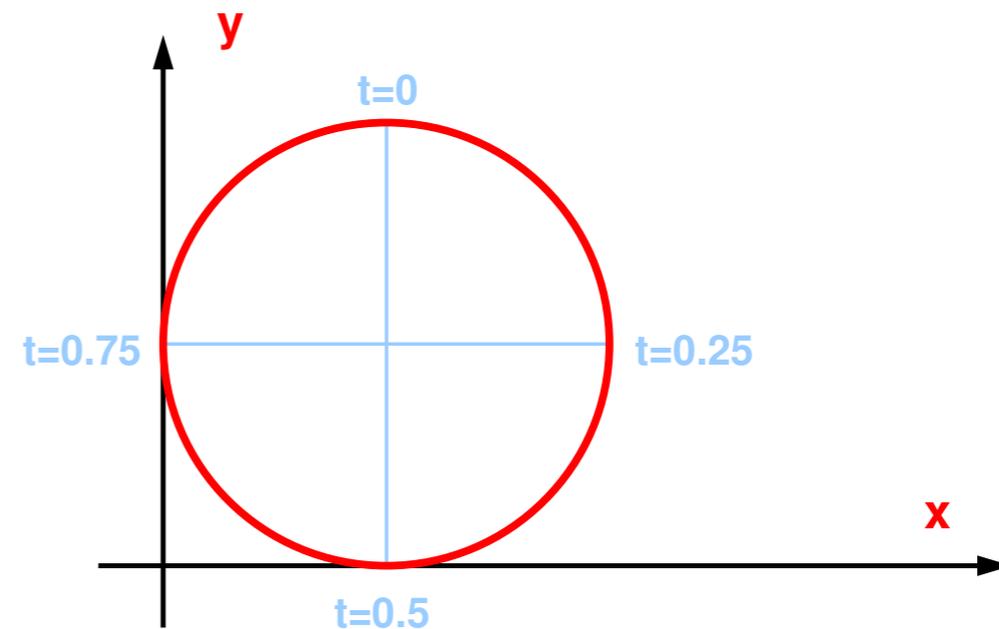
$$x = 1 + \sin(2\pi t)$$

$$y = 1 + \cos(2\pi t)$$

Componentes do vetor tangente:

$$\frac{dx}{dt} = 2\pi \cos(2\pi t)$$

$$\frac{dy}{dt} = -2\pi \sin(2\pi t)$$



Módulo do vetor tangente:

$$|R| = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} = 2\pi \sqrt{\cos^2(2\pi t) + \sin^2(2\pi t)} = 2\pi$$

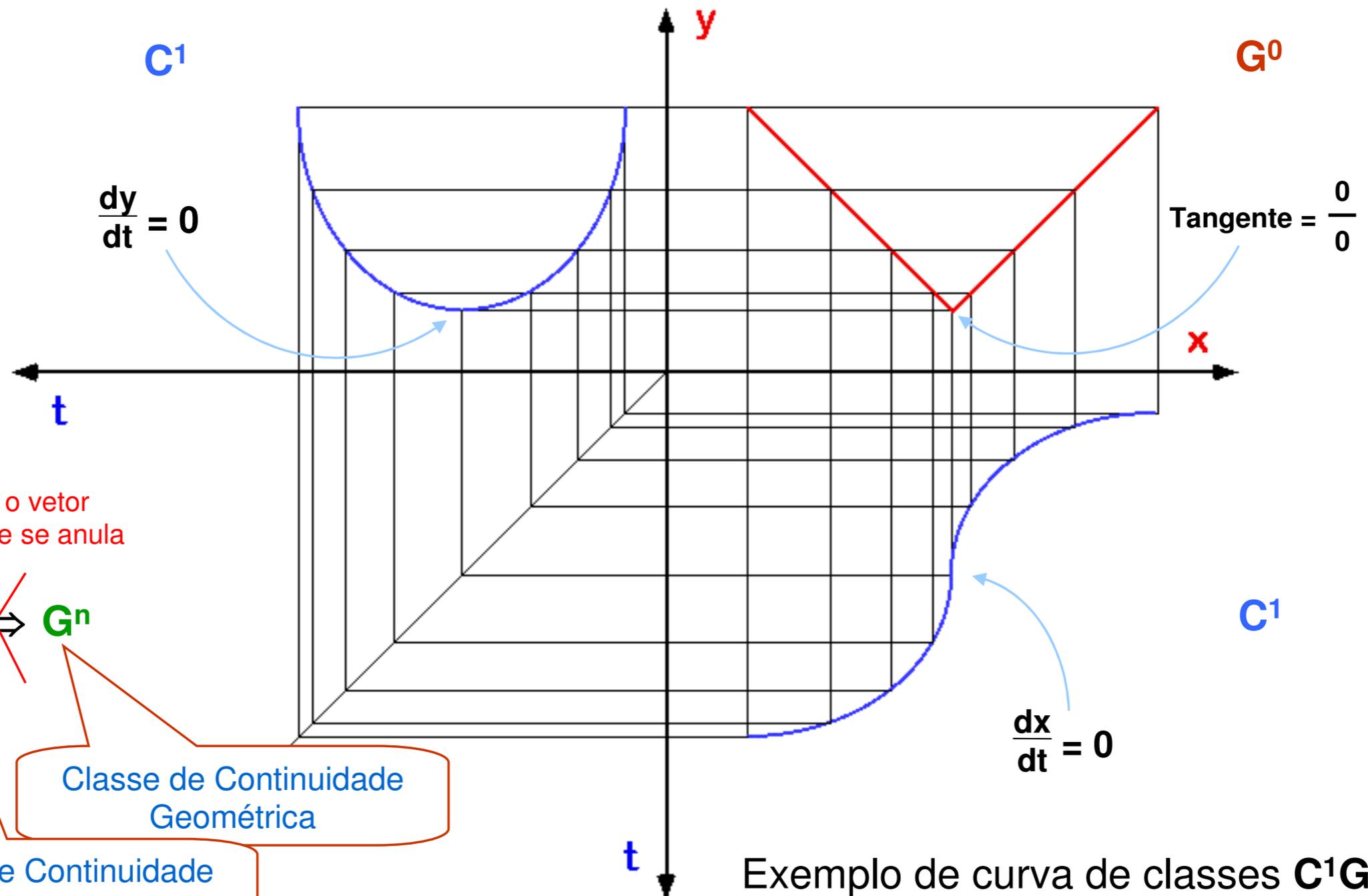
Tangente geométrica:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = -\operatorname{tg}(2\pi t)$$

Estas formas trigonométricas foram apenas um exemplo analítico, uma vez que o aprofundamento dos métodos basear-se-á em polinómios.

M.Próspero

# Continuidades Paramétrica e Geométrica



Exemplo de curva de classes  $C^1G^0$

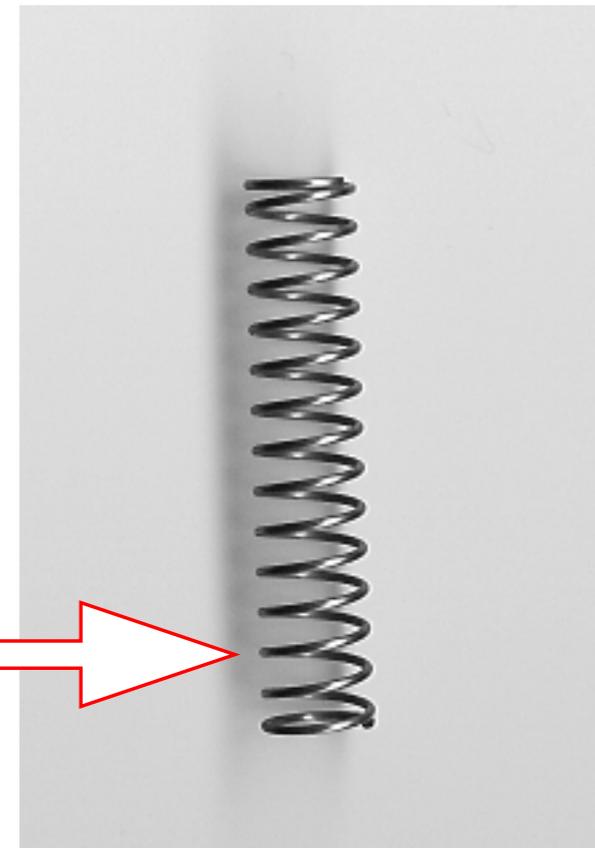
M. Próspero

# Comparação com exemplo fotográfico

Esta mola de arame não apresenta, no espaço 3D, quaisquer pontos angulosos ao longo da sua extensão...



... mas esse tipo de pontos pode aparecer numa fotografia (2D), dependendo da escolha do ponto de vista.



M.Próspero

# Curvas de Hermite

Condições: 2 pontos a interpolar e vetores tangentes nesses mesmos pontos.

$$Q(0) = P_0$$

$$Q'(0) = R_0$$

$$Q(1) = P_3$$

$$Q'(1) = R_3$$

Na forma matricial:

$$\begin{bmatrix} Q(0) \\ Q(1) \\ Q'(0) \\ Q'(1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_0 \\ P_3 \\ R_0 \\ R_3 \end{bmatrix}$$

Vetor da geometria de Hermite  $G_H$

Substituindo cada elemento  $Q(t)$  por  $T \cdot A$  escrever-se-á:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot A = G_H$$

Resolvendo em ordem a  $A$  dará

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}^{-1} \cdot G_H = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 & 1 \\ -3 & 3 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot G_H = M_H \cdot G_H$$

Matriz de Hermite

pele que uma curva de Hermite é da forma

$$Q(t) = T \cdot M_H \cdot G_H$$

M. Próspero

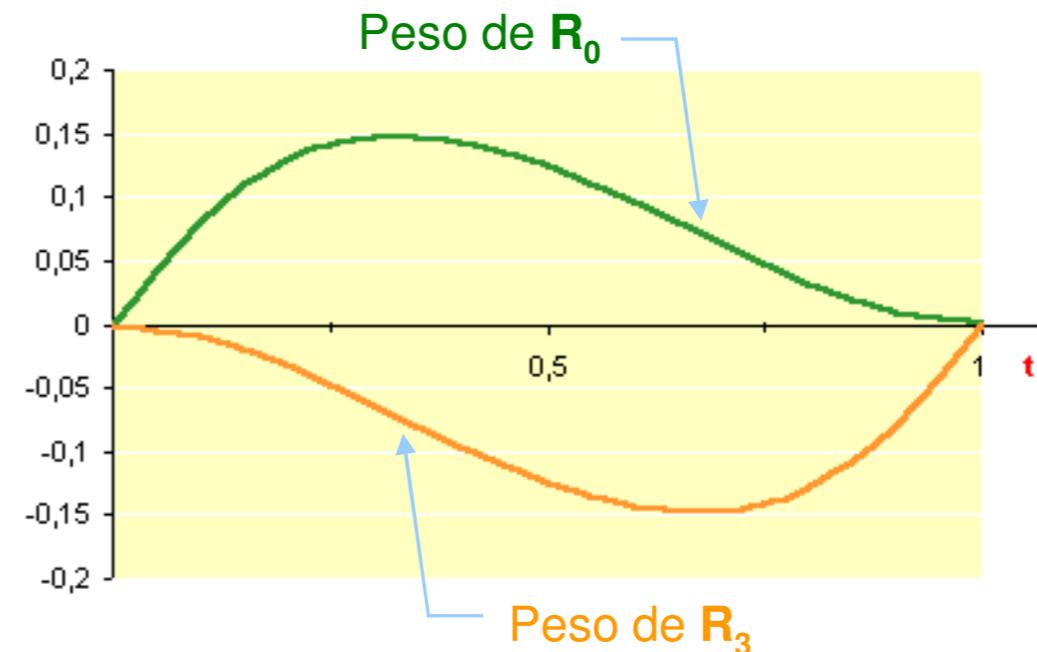
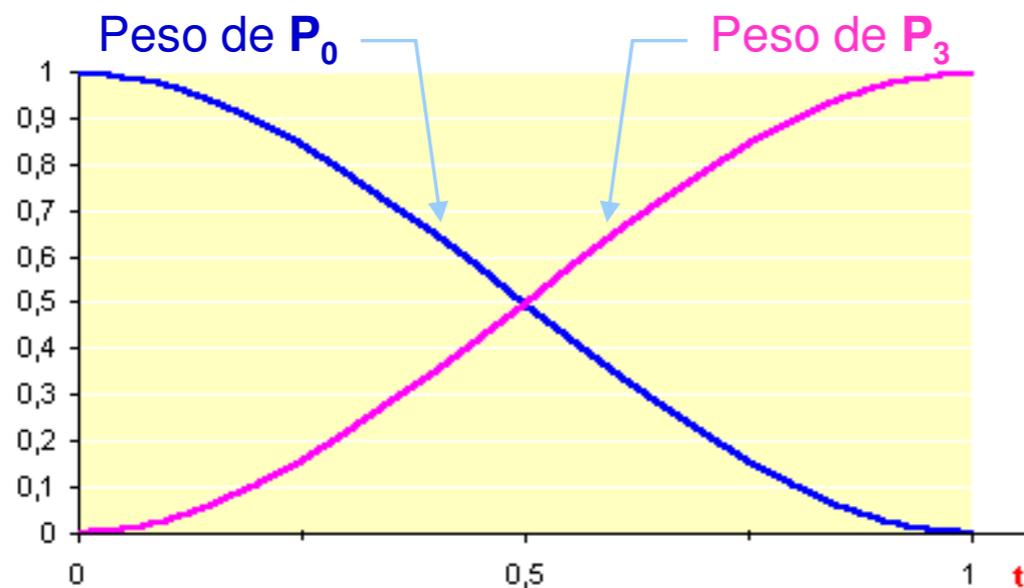
# Blending functions

$$Q(t) = T \cdot M_H \cdot G_H$$

Os pesos dos elementos do vetor de geometria são funções de  $t$  :

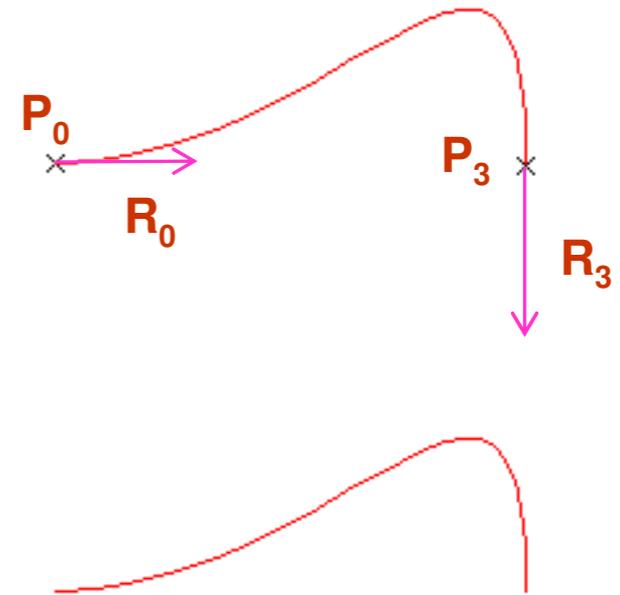
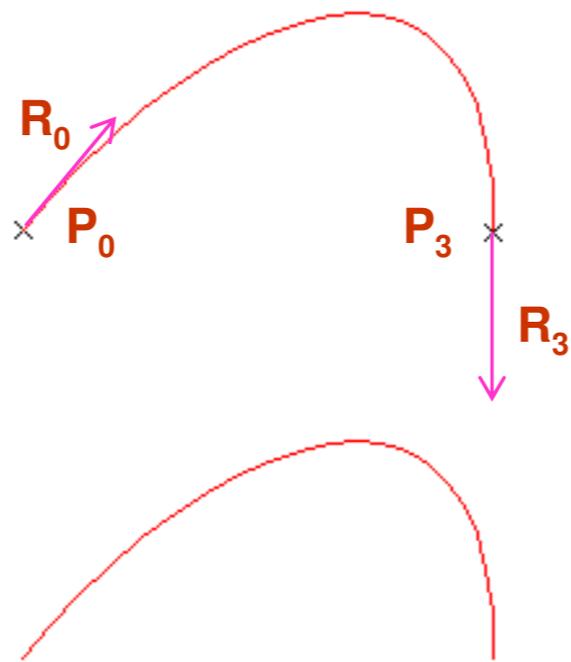
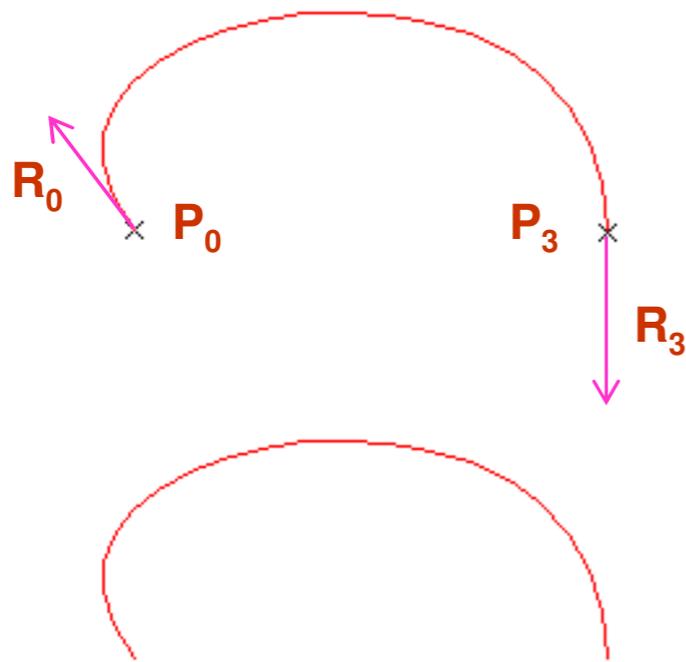
Blending Functions

$$T \cdot M_H = [ 2t^3 - 3t^2 + 1 \quad -2t^3 + 3t^2 \quad t^3 - 2t^2 + t \quad t^3 - t^2 ]$$



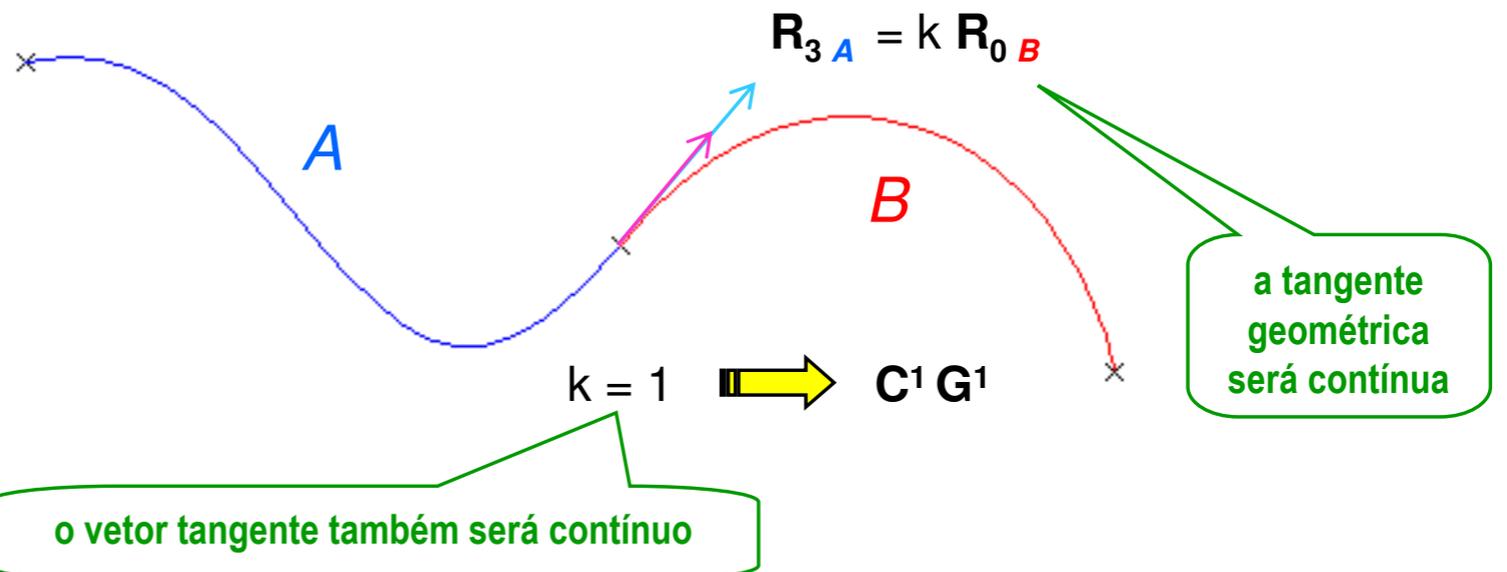
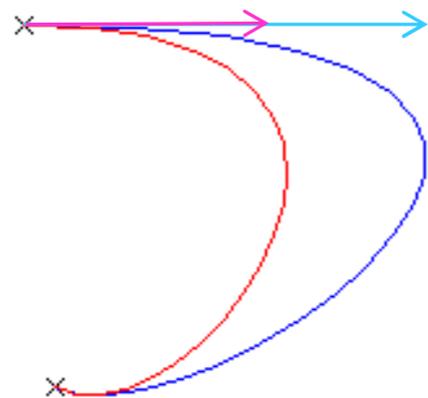
M. Próspero

# Exemplos de curvas no plano



Condição  $k > 0$  para  $C^0 G^1$  no ponto de junção de troços:

Influência da norma do vetor tangente:



M. Próspero

# Curvas de Bézier

**Condições:** As mesmas das curvas de Hermite, introduzindo-se 2 pontos intermédios que determinam os vetores tangentes.

$$Q'(0) = R_0 = 3 (P_1 - P_0)$$

$$Q'(1) = R_3 = 3 (P_3 - P_2)$$

donde:

$$\boxed{G_H} \begin{bmatrix} P_0 \\ P_3 \\ R_0 \\ R_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -3 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} P_0 \\ P_1 \\ P_2 \\ P_3 \end{bmatrix} \boxed{G_B}$$

Vetor da geometria de Bézier

$$Q(t) = T \cdot M_H \cdot G_H$$



$$Q(t) = T \cdot M_B \cdot G_B$$

com a Matriz de Bézier:

$$M_B = \begin{bmatrix} -1 & 3 & -3 & 1 \\ 3 & -6 & 3 & 0 \\ -3 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Numa interface para curvas de Bézier manipulam-se apenas pontos, enquanto que para curvas de Hermite há que manipular também vetores.

# Curvas de Bézier

Exemplo geral da utilização de *Blending Functions*  $B_{in}(t)$  de ordem  $n$ :

$$Q(t) = P_0 B_{0n}(t) + P_1 B_{1n}(t) + P_2 B_{2n}(t) + \dots + P_m B_{mn}(t)$$

com  $0 \leq t \leq 1$  e  $n = m + 1$

$B_{in}$  equivale a  $B_{i,n}$

*Blending Functions* de ordem  $n=4$  para as Curvas de Bézier:

Se  $Q(t) = T \cdot M_B \cdot G_B$  então

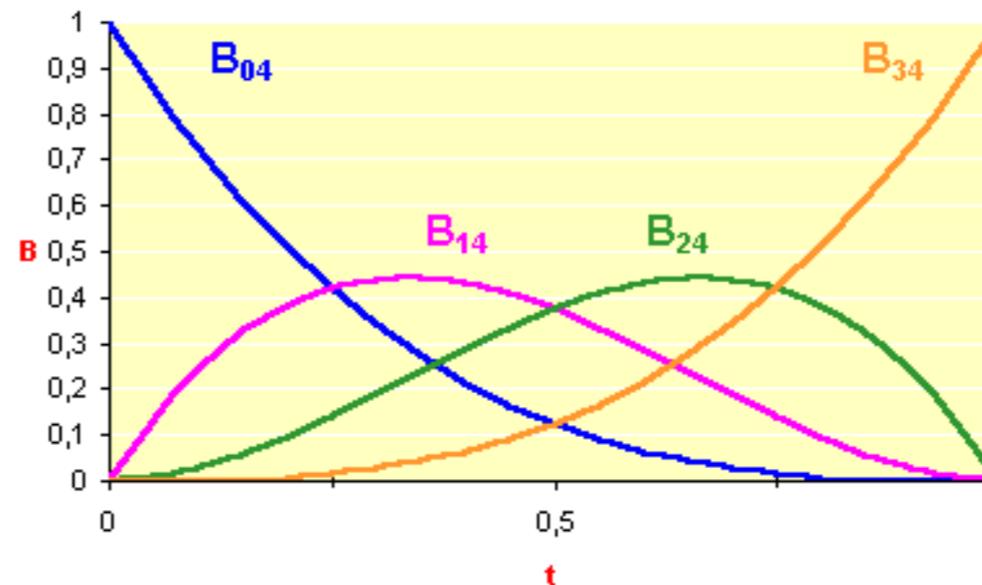
$$T \cdot M_B = [ B_{04} \quad B_{14} \quad B_{24} \quad B_{34} ]$$

$$B_{04}(t) = -t^3 + 3t^2 - 3t + 1$$

$$B_{14}(t) = 3t^3 - 6t^2 + 3t$$

$$B_{24}(t) = -3t^3 + 3t^2$$

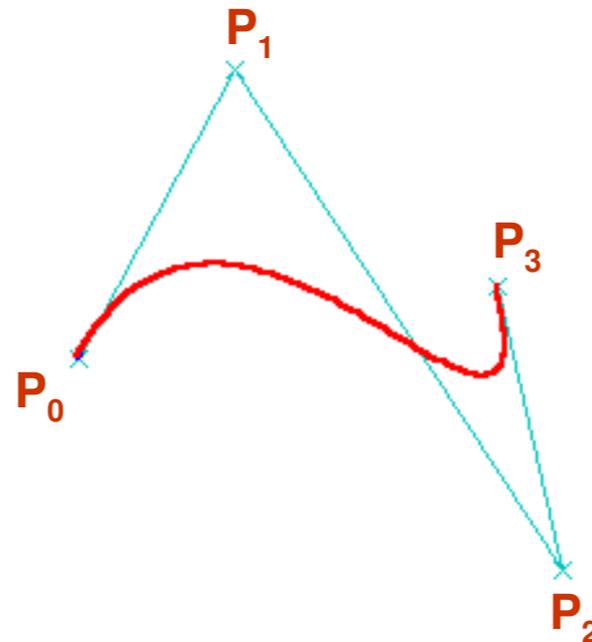
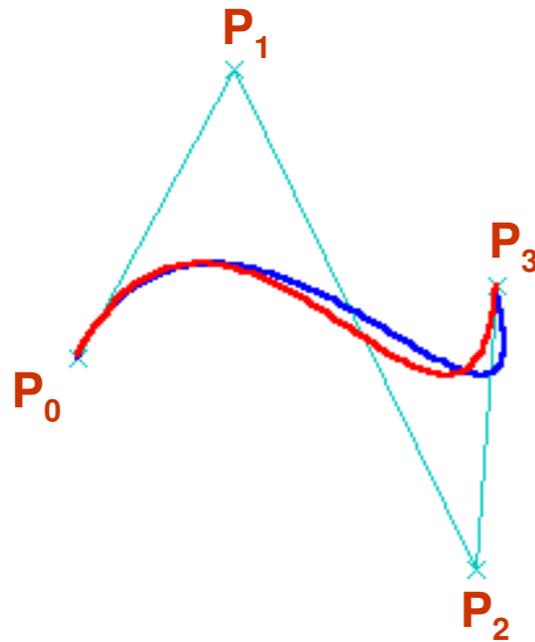
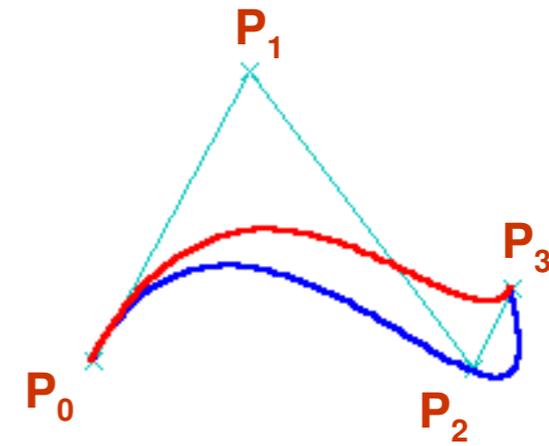
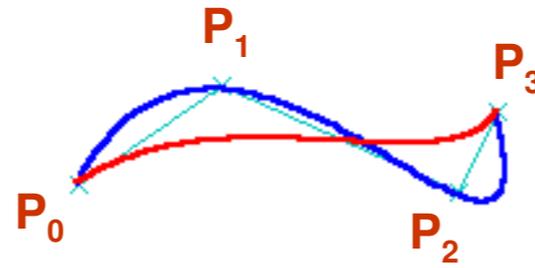
$$B_{34}(t) = t^3$$



M.Próspero

# Exemplo interativo

Curva pretendida:



Invólucro Convexo  
2D: Polígono  
3D: Poliedro

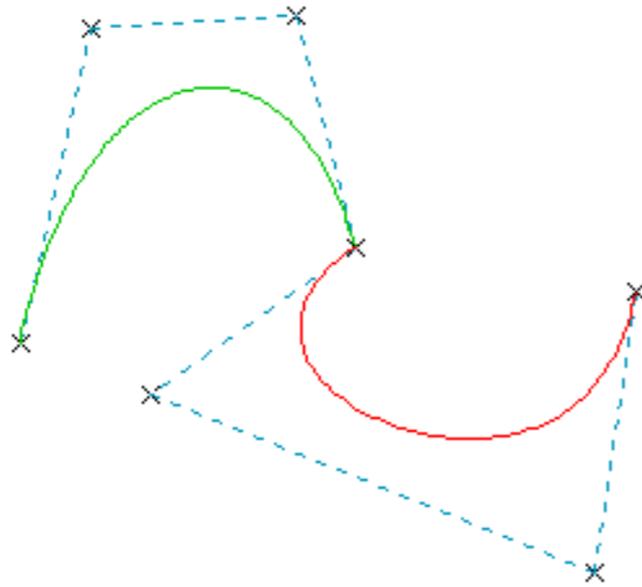
Convex  
Hull

$$\sum_{i=0}^m B_{in}(t) = 1$$

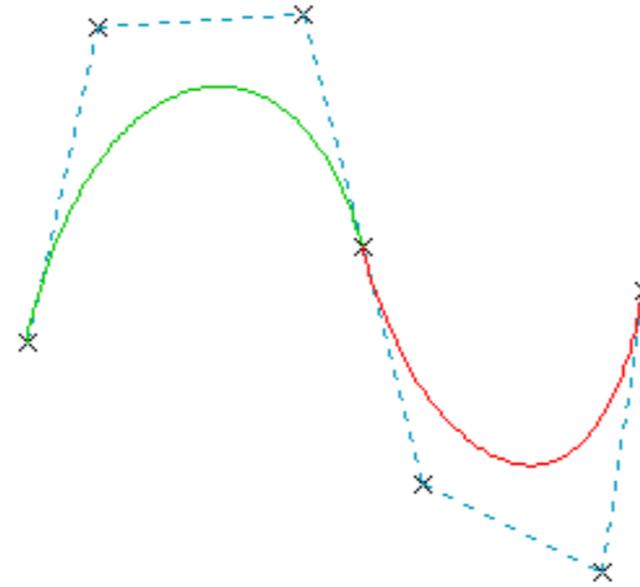
$$B_{in}(t) \geq 0$$

M.Próspero

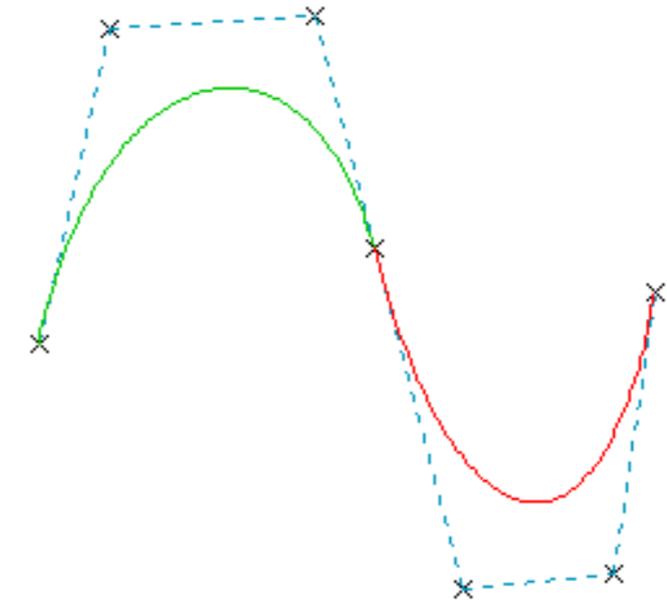
# Junção de troços (segmentos) de curva



Continuidade  $C^0 G^0$  na junção  
(vetores tangentes com direções ou sentidos diferentes)



Continuidade  $C^1 G^1$  na junção  
(vetores tangentes iguais)

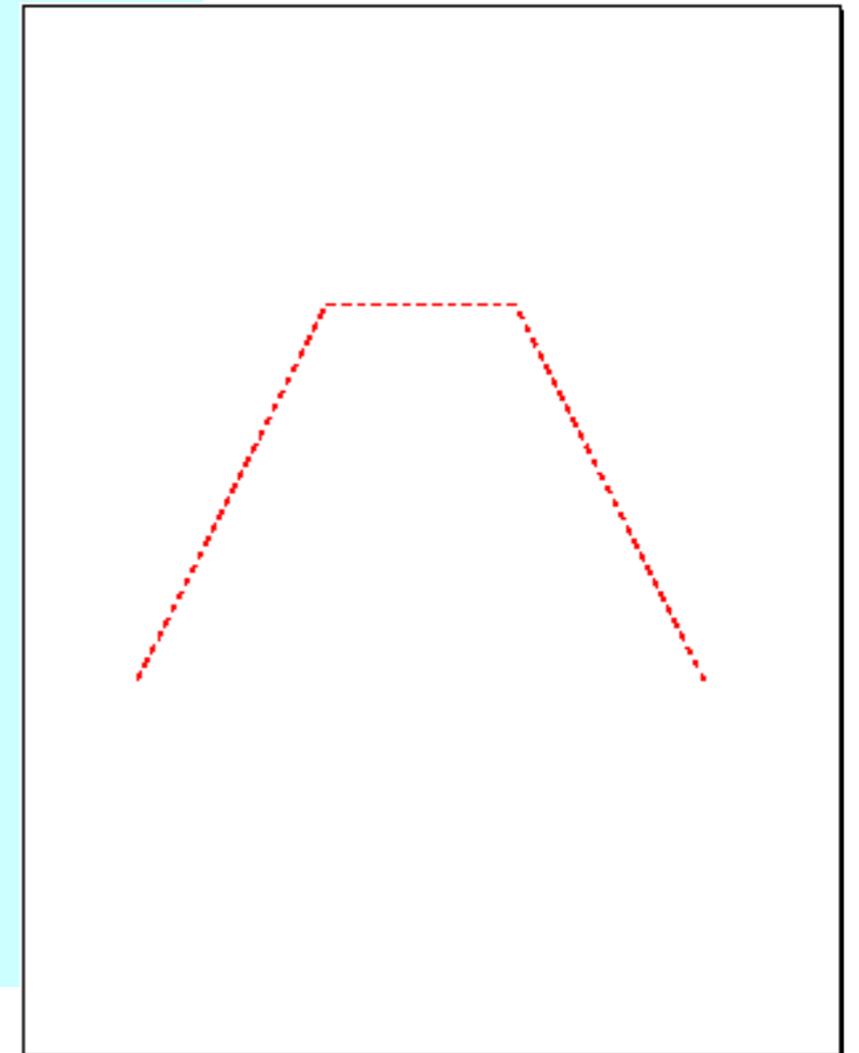


Continuidade  $C^0 G^1$  na junção  
(vetores tangentes apenas com a mesma direção e sentido)

M.Próspero

# Exemplo de utilização em PostScript

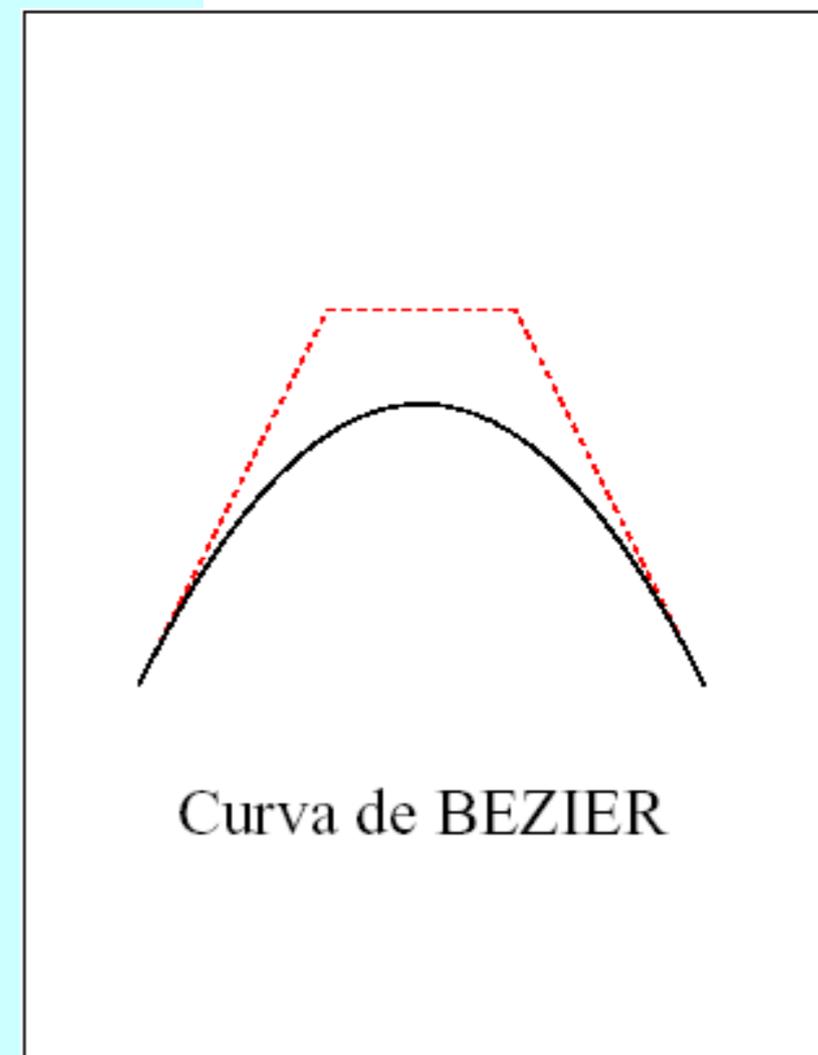
```
%!PS
% Poligonal guia numa curva de Bézier (M.Próspero)
/cm {28.35 mu} def
3 cm 10 cm moveto
8 cm 20 cm lineto
13 cm 20 cm lineto
18 cm 10 cm lineto
[ 0.2 cm 0.2 cm ] 0 setdash
0.02 cm setlinewidth
1.0 0.0 0.0 setrgbcolor
stroke
showpage
```



*M.Próspero*

# Exemplo de utilização em PostScript

```
%!PS
% Desenho de uma curva de Bézier (M.Próspero)
/cm {28.35 mul} def
3 cm 10 cm moveto
gsave
  8 cm 20 cm lineto
  13 cm 20 cm lineto
  18 cm 10 cm lineto
  [ 0.2 cm 0.2 cm ] 0 setdash
  0.02 cm setlinewidth
  1.0 0.0 0.0 setrgbcolor
  stroke
grestore
8 cm 20 cm 13 cm 20 cm 18 cm 10 cm curveto
stroke
% Legenda:
/Times-Roman findfont
50 scalefont
setfont
4 cm 6 cm moveto
(Curva de BEZIER) show
showpage
```



*M.Próspero*

# Algoritmo de DE CASTELJAU

A partir dos pontos dados  $\mathbf{P}_i$  ( apresentados agora na forma  $\mathbf{P}_{0i}$  ) definem-se pontos auxiliares:

$$\mathbf{P}_{k,n}(t) = (1 - t) \mathbf{P}_{k-1,n-1}(t) + t \mathbf{P}_{k-1,n}(t)$$

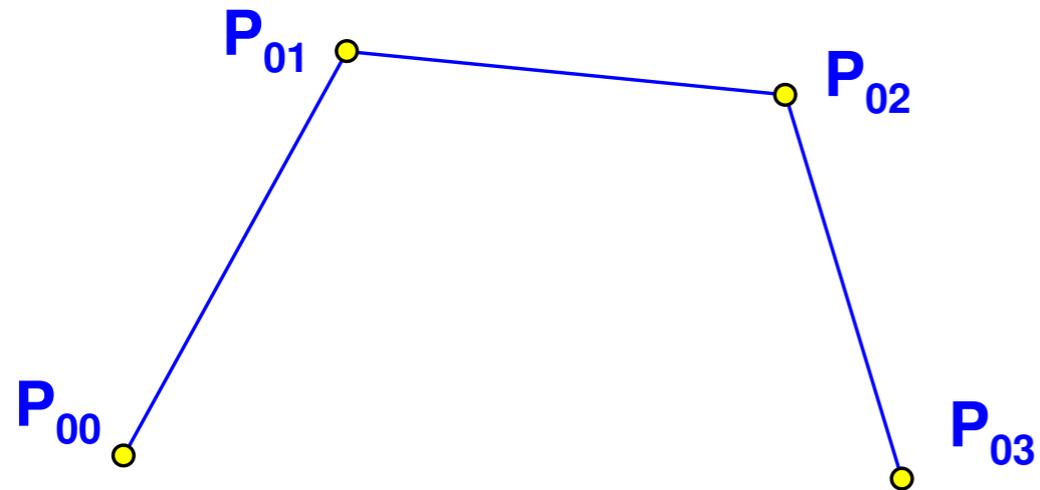
**Exercício:** Verificar que  $\mathbf{P}_{33}(t)$  corresponde à **curva cúbica de Bézier**.

**Resolução:**

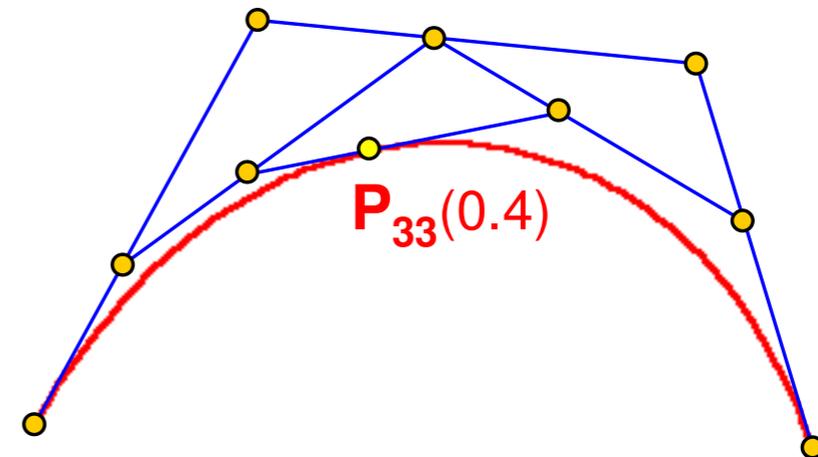
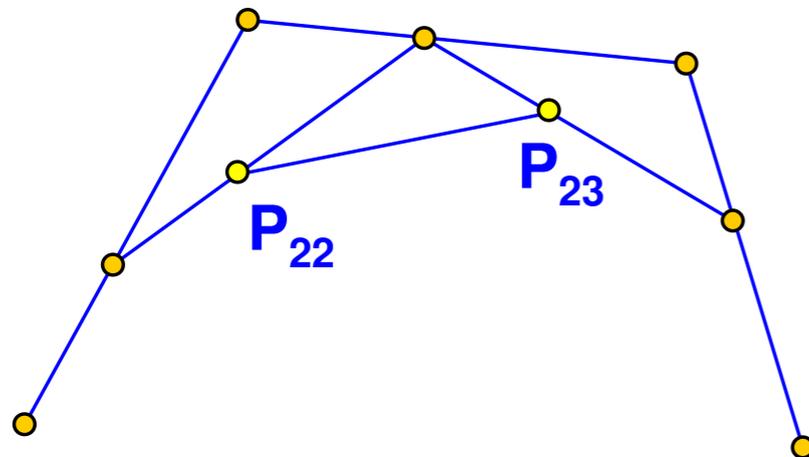
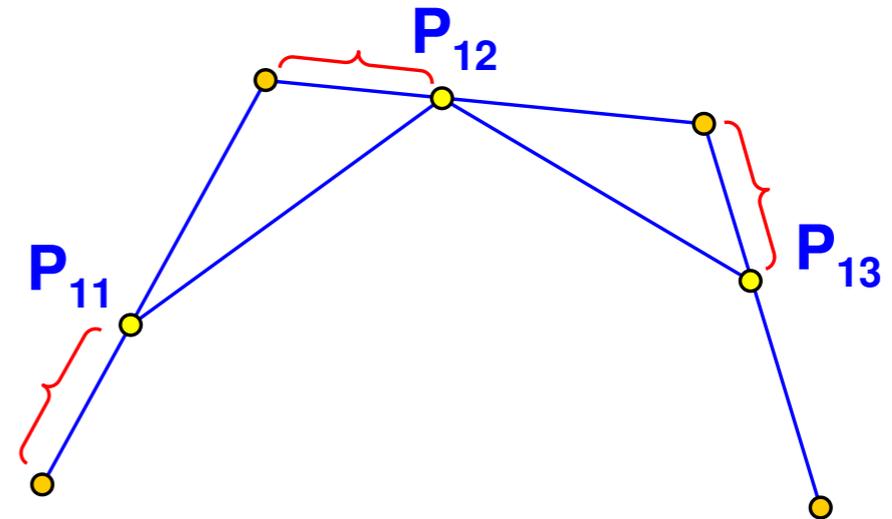
$$\begin{aligned} \mathbf{P}_{33}(t) &= (1 - t) \mathbf{P}_{22}(t) + t \mathbf{P}_{23}(t) \\ &= (1 - t) ((1 - t) \mathbf{P}_{11}(t) + t \mathbf{P}_{12}(t)) + \\ &\quad t ((1 - t) \mathbf{P}_{12}(t) + t \mathbf{P}_{13}(t)) \\ &= (1 - t)^2 ((1 - t) \mathbf{P}_{00} + t \mathbf{P}_{01}) + \\ &\quad 2(t - t^2) ((1 - t) \mathbf{P}_{01} + t \mathbf{P}_{02}) + t^2 ((1 - t) \mathbf{P}_{02} + t \mathbf{P}_{03}) \\ &= (1 - t)^3 \mathbf{P}_{00} + (3t - 6t^2 + 3t^3) \mathbf{P}_{01} + (3t^2 - 3t^3) \mathbf{P}_{02} + t^3 \mathbf{P}_{03} \\ &= \mathbf{Q}_{\text{Bézier}}(t) \end{aligned}$$

M.Próspero

# Aplicação geométrica



Para  $t=0.4$  :



Ver Applet em [http://www.saltire.com/applets/advanced\\_geometry/spline/spline.htm](http://www.saltire.com/applets/advanced_geometry/spline/spline.htm)

M.Próspero