

Curvas (cont.)

Aproximação Bézier-Bernstein

Generalização:

$$Q(t) = \sum_{i=0}^m P_i B_{in}(t)$$

com $0 \leq t \leq 1$ e $n = m + 1$

Curva de ordem **n**, aplicada a **m+1** pontos
e tendo como funções de peso (*Blending Functions*) os

Polinómios de Bernstein:

$$B_{k,n}(t) = \frac{(n-1)!}{k! (n-1-k)!} t^k (1-t)^{n-1-k}$$

As Curvas cúbicas de Bézier são o caso particular em que **n=4** pontos.

M. Próspero

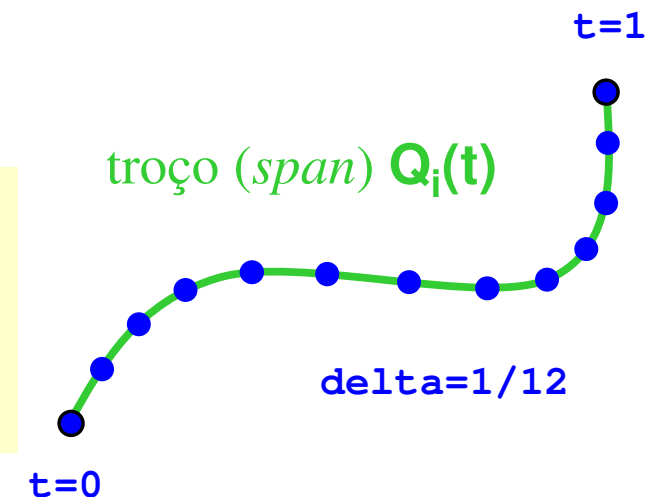
Avaliação de uma curva cúbica

Em 2D ou 3D, cada troço i tem a forma

$$Q_i(t) = T \cdot A = a * t^3 + b * t^2 + c * t + d$$

Algoritmo de visualização (aproximação a poligonal 3D):

```
for (i=first_span to last_span)
  for (j=1 to 1/delta)
    Line_3D( Q_i((j-1)*delta), Q_i(j*delta) )
```



Com este algoritmo, a curva $Q_i(t)$ é avaliada $2/\delta$ vezes (e $1+1/\delta$ recorrendo à posição corrente ou a uma variável auxiliar). Mas a eficiência aumentará se se puder reduzir o número de operações aritméticas.

Um dos métodos para tal é o de **HORNER**:

$$Q_i(t) = ((a * t + b) * t + c) * t + d$$

(Extra programa: Um outro método, ainda mais rápido, é o das **Diferenças Finitas Descendentes**)

M.Próspero

Curvas B-Spline

$$Q(t) = T \cdot M_{Bs} \cdot G_{Bs}$$

O vetor da geometria G_{Bs} é igual ao de Bézier (G_B), sendo diferente a Matriz B-spline M_{Bs} :

$$M_{Bs} = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} -1 & 3 & -3 & 1 \\ 3 & -6 & 3 & 0 \\ -3 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Blending Functions:

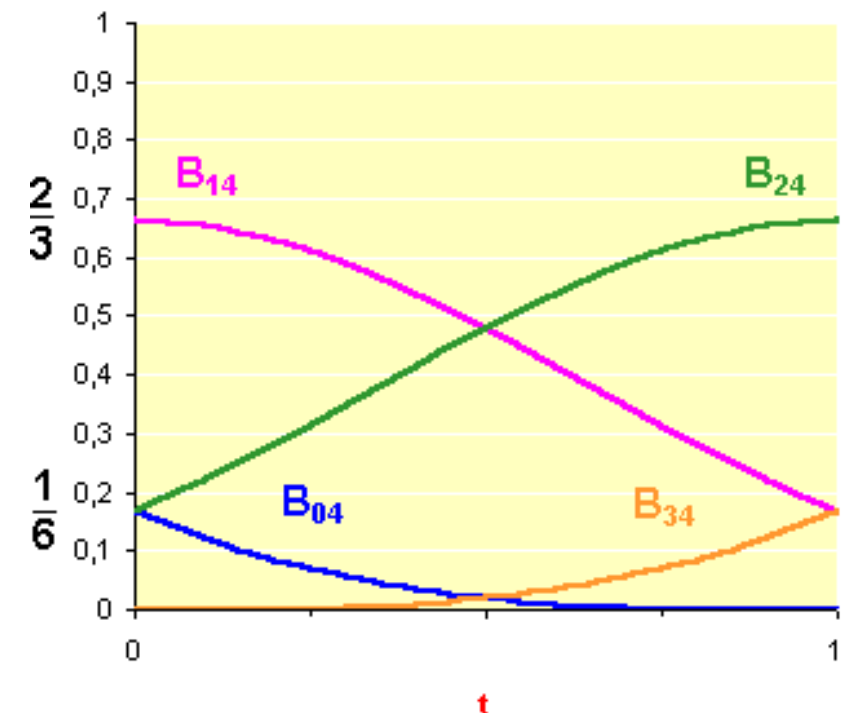
$$T \cdot M_{Bs} = [B_{04} \quad B_{14} \quad B_{24} \quad B_{34}]$$

$$B_{04}(t) = (-t^3 + 3t^2 - 3t + 1) / 6$$

$$B_{14}(t) = (3t^3 - 6t^2 + 4) / 6$$

$$B_{24}(t) = (-3t^3 + 3t^2 + 3t + 1) / 6$$

$$B_{34}(t) = t^3 / 6$$



Conclusão:

Início da curva $\Rightarrow$ vizinhança de P_1

Final da curva $\Rightarrow$ vizinhança de P_2

M.Próspero

Propriedades: C^0

Sejam dados os seguintes vetores da geometria, geradores dos troços Q_3 e Q_4 :

$$G_{Bs_3} = \begin{bmatrix} P_0 \\ P_1 \\ P_2 \\ P_3 \end{bmatrix} \quad G_{Bs_4} = \begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \\ P_4 \end{bmatrix}$$

Sendo

$$T \cdot M_{Bs} = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} -t^3 + 3t^2 - 3t + 1 & 3t^3 - 6t^2 + 4 & -3t^3 + 3t^2 + 3t + 1 & t^3 \end{bmatrix}$$

e considerando o intervalo $0 \leq t \leq 1$ para cada troço, por substituição obter-se-á:

$$Q_3(1) = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 4 & 1 \end{bmatrix} G_{Bs_3}$$

$$Q_4(0) = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 1 & 4 & 1 & 0 \end{bmatrix} G_{Bs_4}$$

$$Q_3(1) = Q_4(0)$$

Conclusão:  Junção dos troços num mesmo ponto, implicando continuidade C^0

M. Próspero

Propriedades: C^1

Primeira derivada:

$$\frac{d}{dt} \mathbf{T} \cdot \mathbf{M}_{Bs} = \frac{1}{2} [-t^2 + 2t - 1 \quad 3t^2 - 4t \quad -3t^2 + 2t + 1 \quad t^2]$$

Considerando o intervalo $0 \leq t \leq 1$ para cada troço, por substituição obter-se-á:

$$\frac{d}{dt} Q_3(1) = \frac{1}{2} [0 \quad -1 \quad 0 \quad 1] G_{Bs_3}$$

$$\frac{d}{dt} Q_4(0) = \frac{1}{2} [-1 \quad 0 \quad 1 \quad 0] G_{Bs_4}$$

$$\frac{d}{dt} Q_3(1) = \frac{d}{dt} Q_4(0)$$

Conclusão:  Continuidade C^1 no ponto de junção dos troços

M. Próspero

Propriedades: C^2

Segunda derivada:

$$\frac{d^2}{dt^2} \mathbf{T} \cdot \mathbf{M}_{Bs} = [-t + 1 \quad 3t - 2 \quad -3t + 1 \quad t]$$

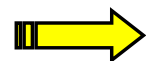
Considerando o intervalo $0 \leq t \leq 1$ para cada troço, por substituição obter-se-á:

$$\frac{d^2}{dt^2} \mathbf{Q}_3(1) = [0 \quad 1 \quad -2 \quad 1] \mathbf{G}_{Bs3}$$

$$\frac{d^2}{dt^2} \mathbf{Q}_4(0) = [1 \quad -2 \quad 1 \quad 0] \mathbf{G}_{Bs4}$$

$$\frac{d^2}{dt^2} \mathbf{Q}_3(1) = \frac{d^2}{dt^2} \mathbf{Q}_4(0)$$

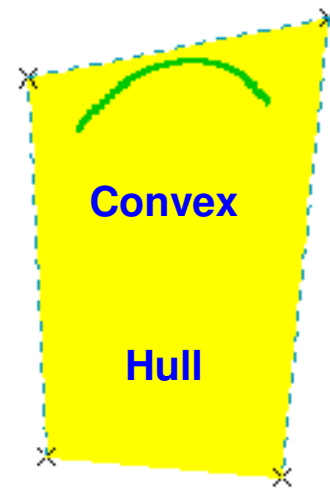
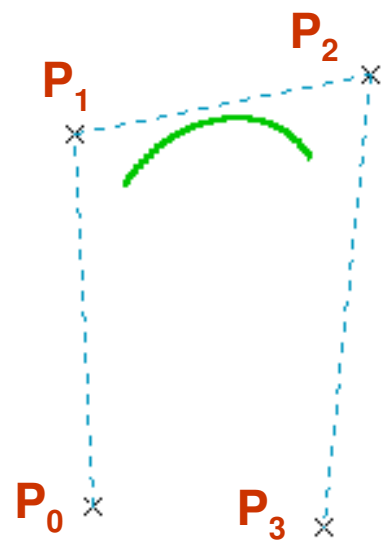
Conclusão final:



Continuidade C^2 no ponto de junção dos troços

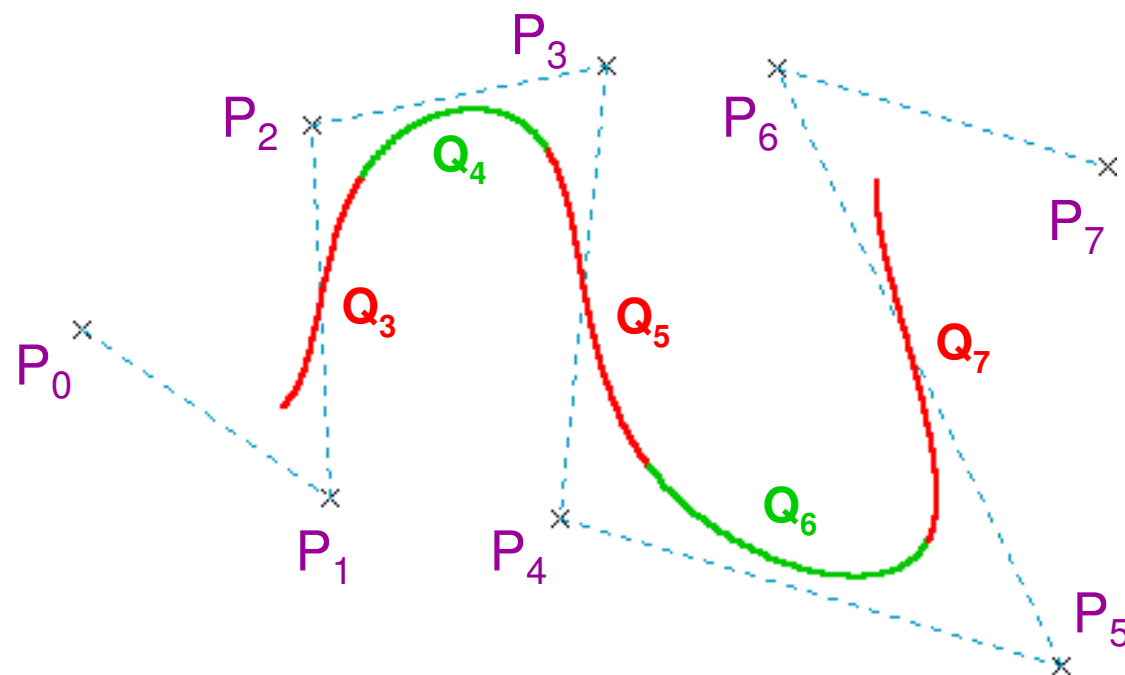
M. Próspero

Exemplos de curvas B-spline em 2D



$$\sum_{i=0}^m B_{in}(t) = 1$$

$$B_{in}(t) \geq 0$$

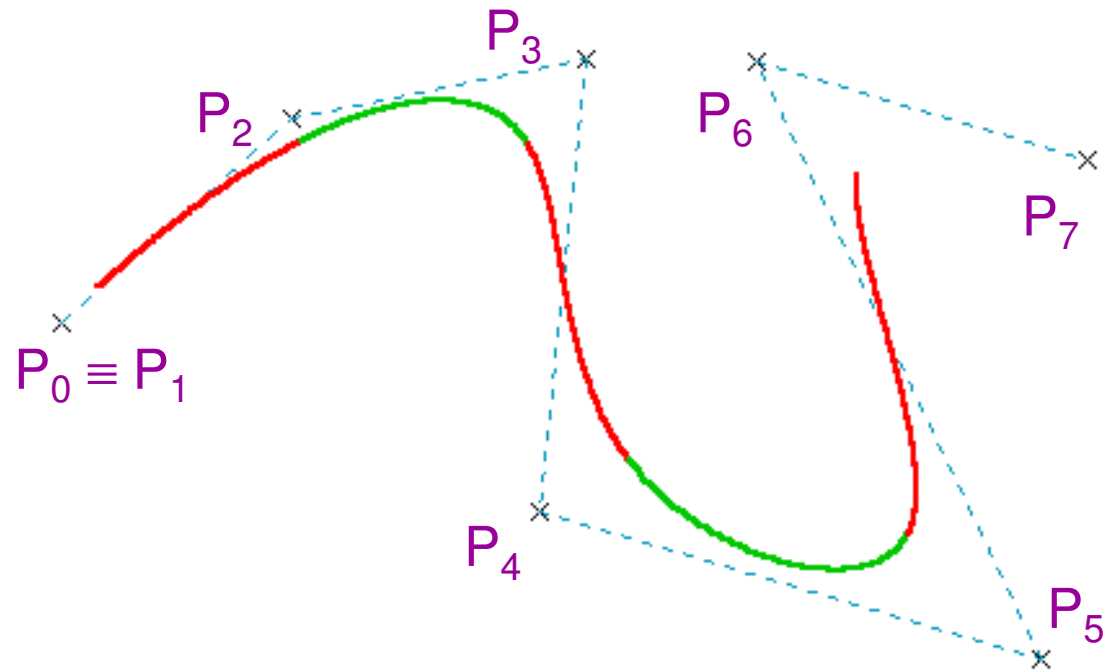


$$G_{Bsi} = \begin{bmatrix} P_{i-3} \\ P_{i-2} \\ P_{i-1} \\ P_i \end{bmatrix}$$

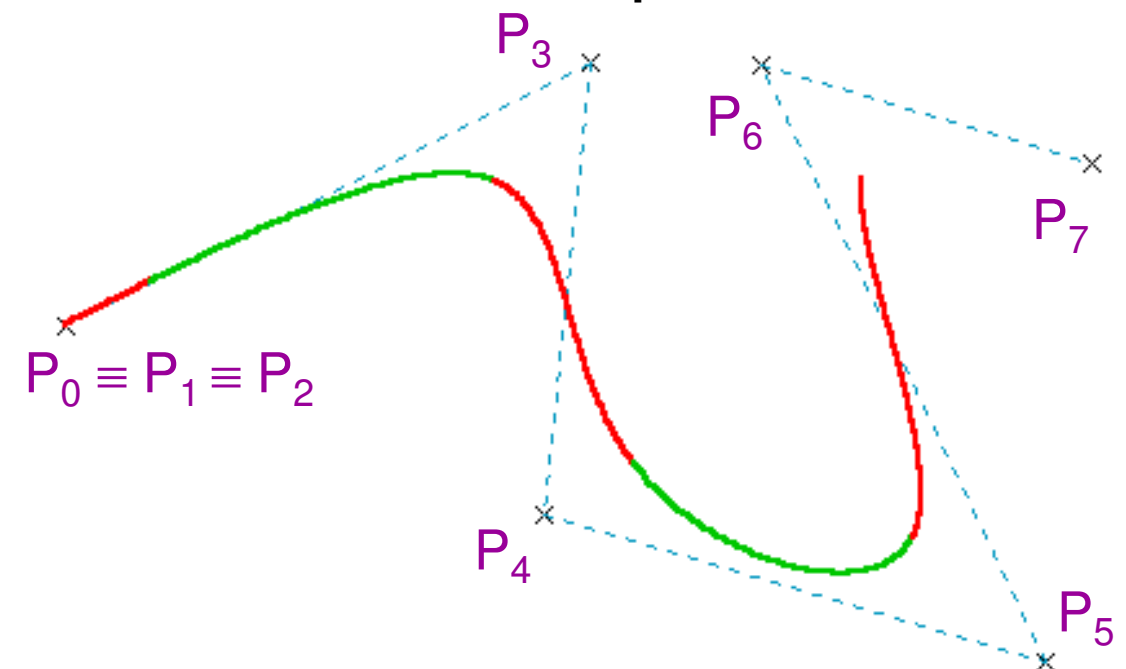
M.Próspero

Grau de multiplicidade de um ponto

Ponto com Grau de Multiplicidade 2 :

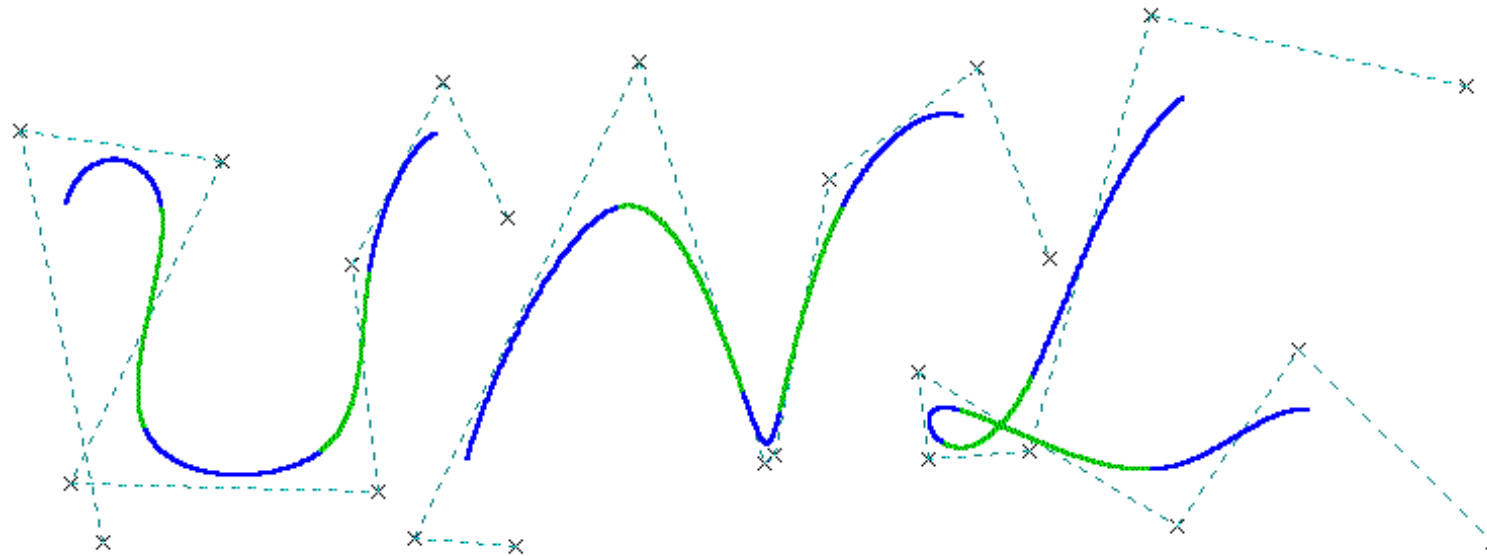


Ponto com Grau de Multiplicidade 3 :

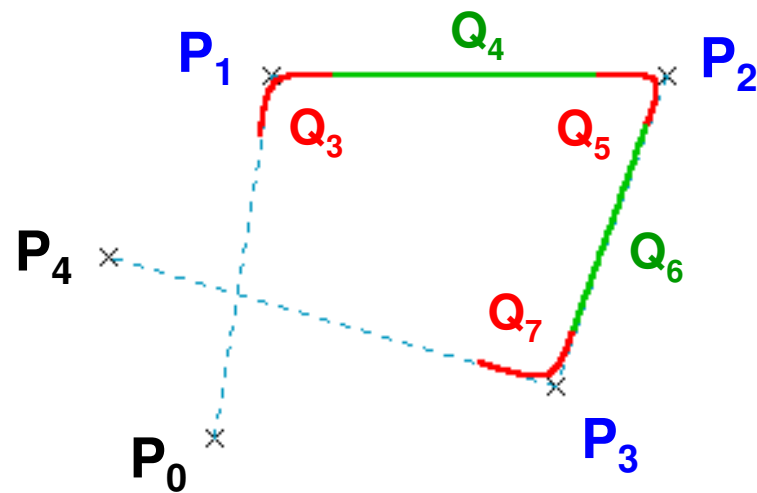


M.Próspero

Outros exemplos (1)



Pontos com
Grau de Multiplicidade 2 :



$$G_{Bs3} = \begin{bmatrix} P_0 \\ P_1 \\ P_1 \\ P_2 \end{bmatrix}$$

$$G_{Bs4} = \begin{bmatrix} P_1 \\ P_1 \\ P_2 \\ P_2 \end{bmatrix}$$

$$G_{Bs5} = \begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_2 \\ P_3 \end{bmatrix}$$

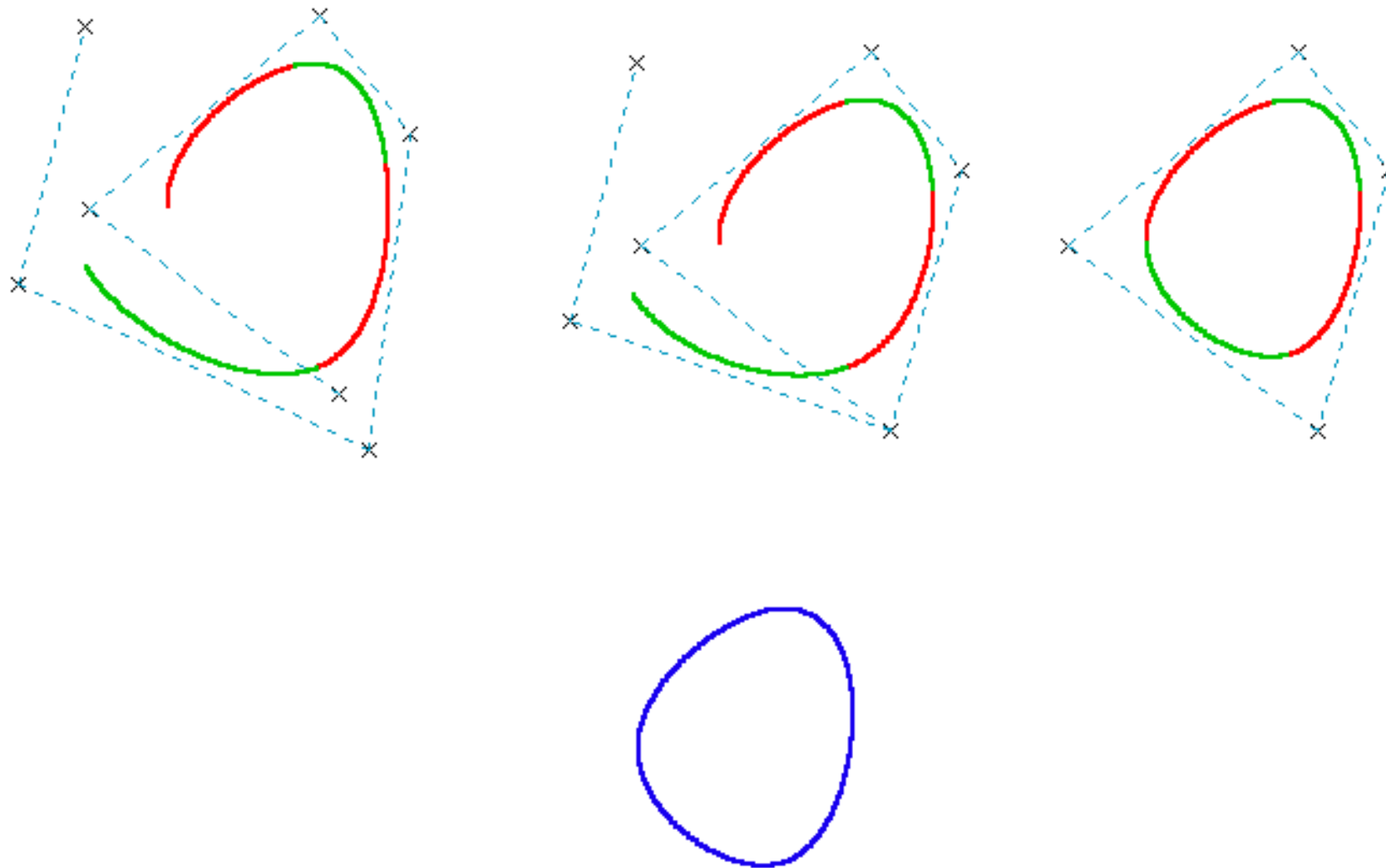
$$G_{Bs6} = \begin{bmatrix} P_2 \\ P_2 \\ P_3 \\ P_3 \end{bmatrix}$$

$$G_{Bs7} = \begin{bmatrix} P_2 \\ P_3 \\ P_3 \\ P_4 \end{bmatrix}$$

M.Próspero

Outros exemplos (2)

Construção de uma curva fechada :



M.Próspero

Continuidade e Interpolação

◆ Efeito dos graus de multiplicidade dos pontos de controlo:

- Multiplicidade 1 → continuidade $C^2 G^2$
- Multiplicidade 2 → continuidade $C^2 G^1$
- Multiplicidade 3 → continuidade $C^2 G^0$
- Multiplicidade 3 → interpola esse ponto de controlo

Interpretação
geométrica:
continuidade da
curvatura

◆ Haverá alternativa à interpolação no(s) extremo(s) de uma curva sem ser pelo aumento do grau de multiplicidade do(s) ponto(s), permitindo manter continuidade de classe $C^2 G^2$ com futuros troços adjacentes?

- Sim, por criação de novo(s) ponto(s) de controlo dito(s) “fantasma(s)”

M.Próspero

Pontos de controlo “fantasmas”

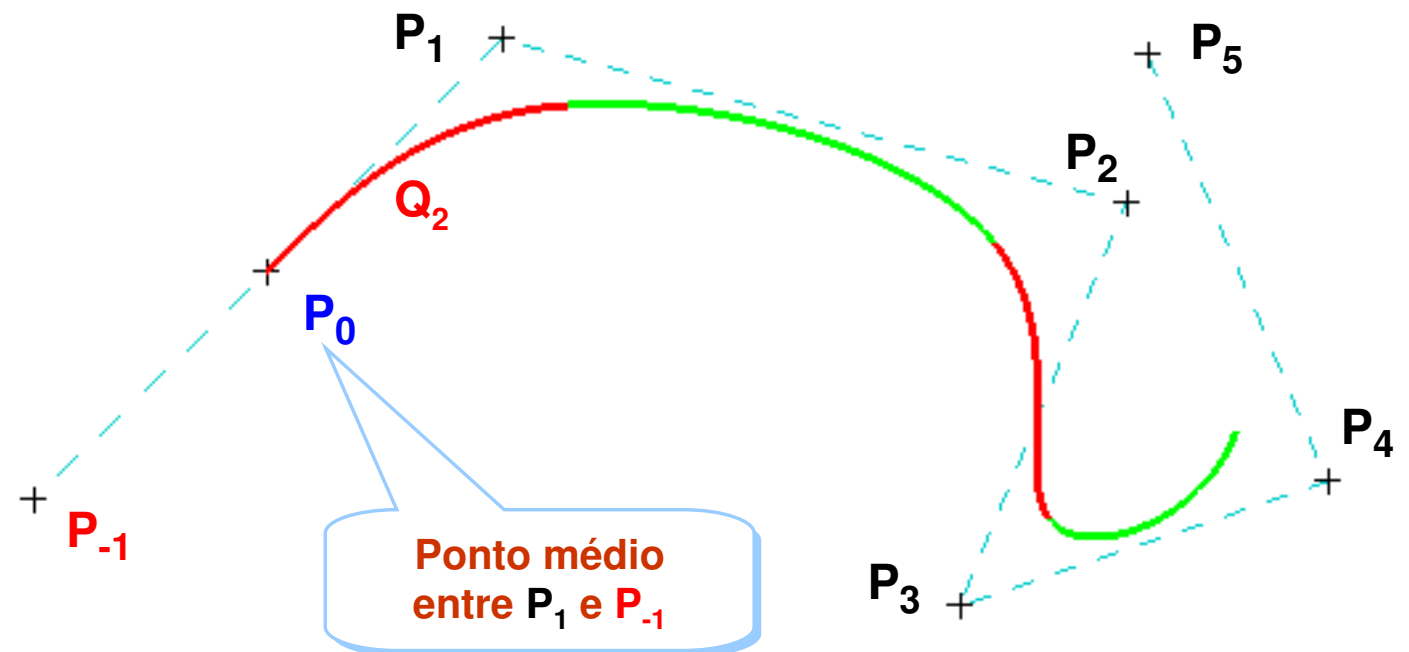
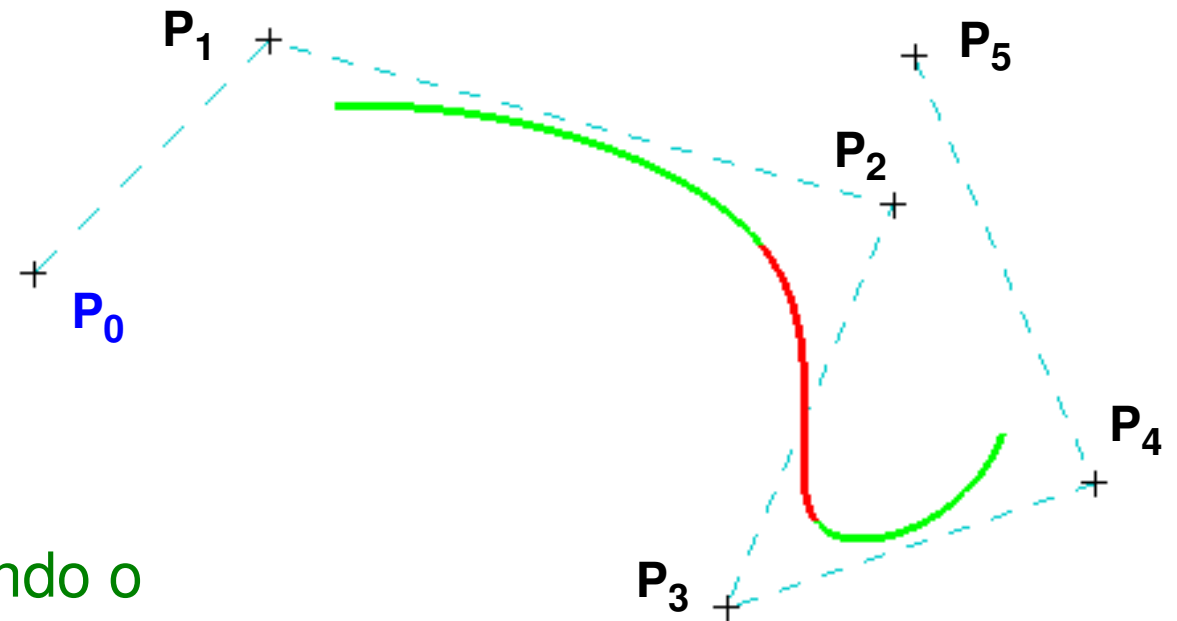
Admitindo que se quer interpolar P_0 :

Resolve-se matematicamente encontrando o ponto “fantasma” P_{-1} que verifique a condição

$$Q_2(t=0) = T \cdot M_{Bs} \cdot \begin{bmatrix} P_{-1} \\ P_0 \\ P_1 \\ P_2 \end{bmatrix} = P_0$$

$$(P_{-1} + 4P_0 + P_1) / 6 = P_0$$

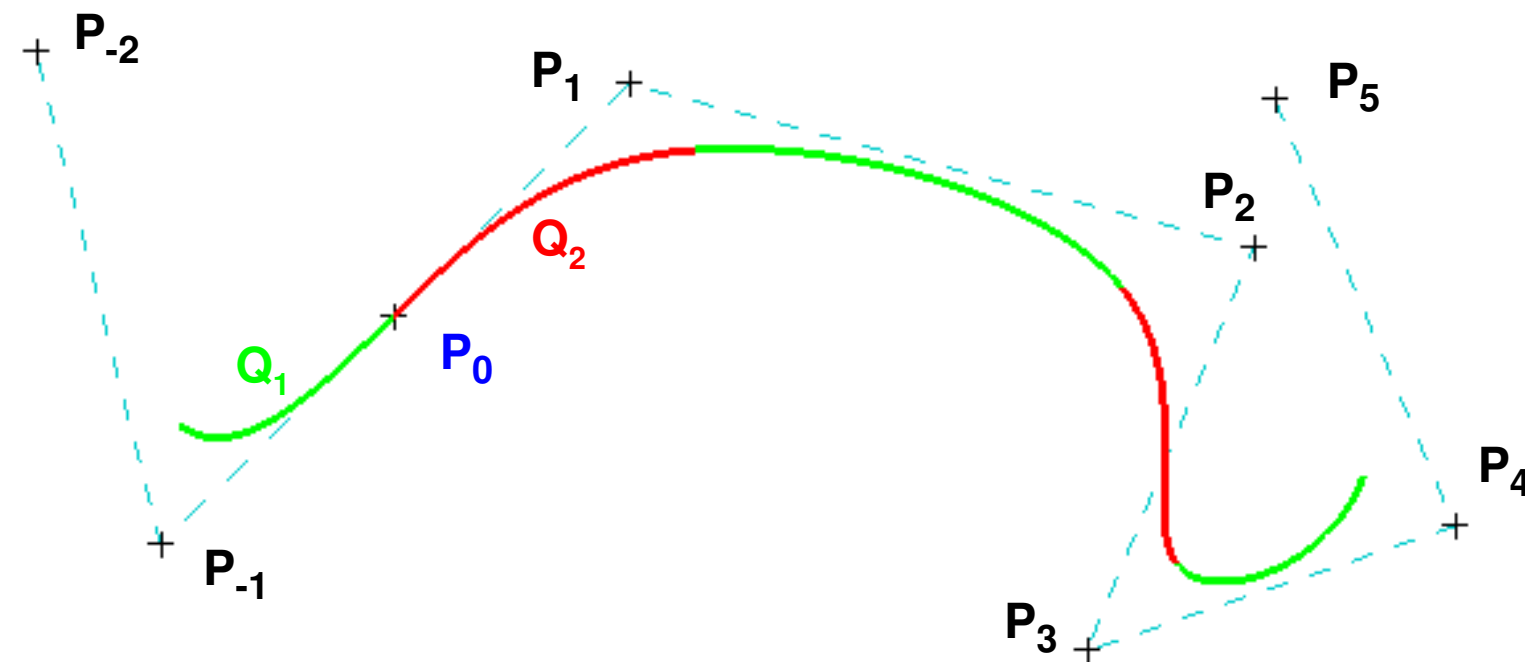
$$P_{-1} = 2P_0 - P_1$$



M.Próspero

Junção com interpolação

Construção de um troço Q_1 adjacente a Q_2 , que também irá interpolar P_0 , mantendo-se continuidade C^2 em todas as junções de troços da curva (o que não seria possível se P_0 tivesse grau de multiplicidade superior a 1):



Conclusão: O método para interpolação pode ser utilizado na junção de dois troços já existentes se se condicionarem geometricamente três dos respectivos pontos de controlo.

M. Próspero

Curvas de Catmull-Rom

ou Splines de Overhauser

$$Q(t) = T \cdot M_{CR} \cdot G_{CR}$$

$$M_{CR} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -1 & 3 & -3 & 1 \\ 2 & -5 & 4 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Blending Functions:

$$T \cdot M_{CR} = [B_{04} \quad B_{14} \quad B_{24} \quad B_{34}]$$

$$B_{04}(t) = (-t^3 + 2t^2 - t) / 2$$

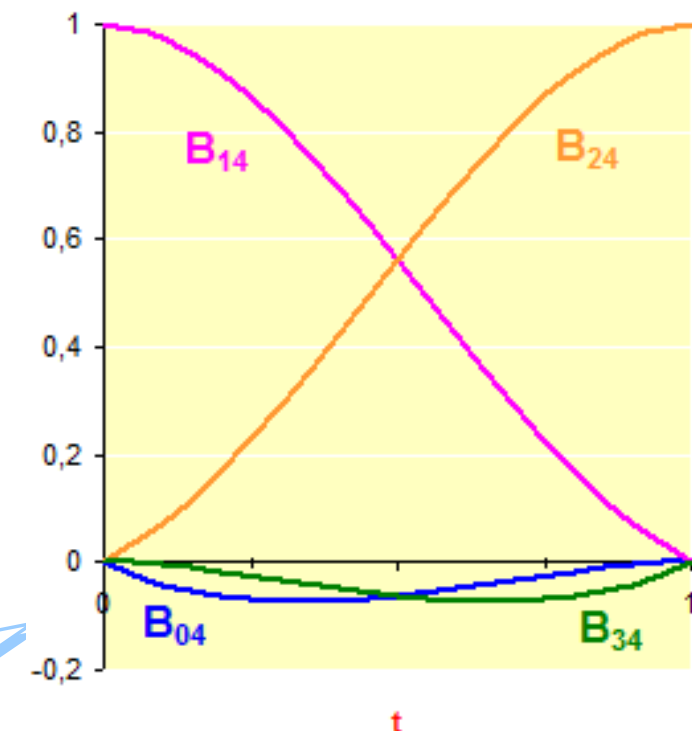
$$B_{14}(t) = (3t^3 - 5t^2 + 2) / 2$$

$$B_{24}(t) = (-3t^3 + 4t^2 + t) / 2$$

$$B_{34}(t) = (t^3 - t^2) / 2$$

As curvas não gozam da propriedade de *convex hull*

O vetor de geometria G_{CR} é igual ao de B-spline (G_{Bs})



M.Próspero

Propriedades

Considerando o intervalo $0 \leq t \leq 1$ para cada troço:

$$Q_i(0) = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 \end{bmatrix} G_{CR_i} = P_{i-2}$$

$$Q_i(1) = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 \end{bmatrix} G_{CR_i} = P_{i-1}$$

$$Q_{i+1}(0) = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 \end{bmatrix} G_{CR_{i+1}} = P_{i-1}$$

$$Q_i(1) = Q_{i+1}(0)$$

Interpolação de pontos de controlo e, no mínimo, C^0

$$\frac{d}{dt} T \cdot M_{CR} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -3t^2 + 4t - 1 & 9t^2 - 10t & -9t^2 + 8t + 1 & 3t^2 - 2t \end{bmatrix}$$

$$\frac{d}{dt} Q_i(1) = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} G_{CR_i} = \frac{P_i - P_{i-2}}{2}$$

$$\frac{d}{dt} Q_{i+1}(0) = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} G_{CR_{i+1}} = \frac{P_i - P_{i-2}}{2}$$

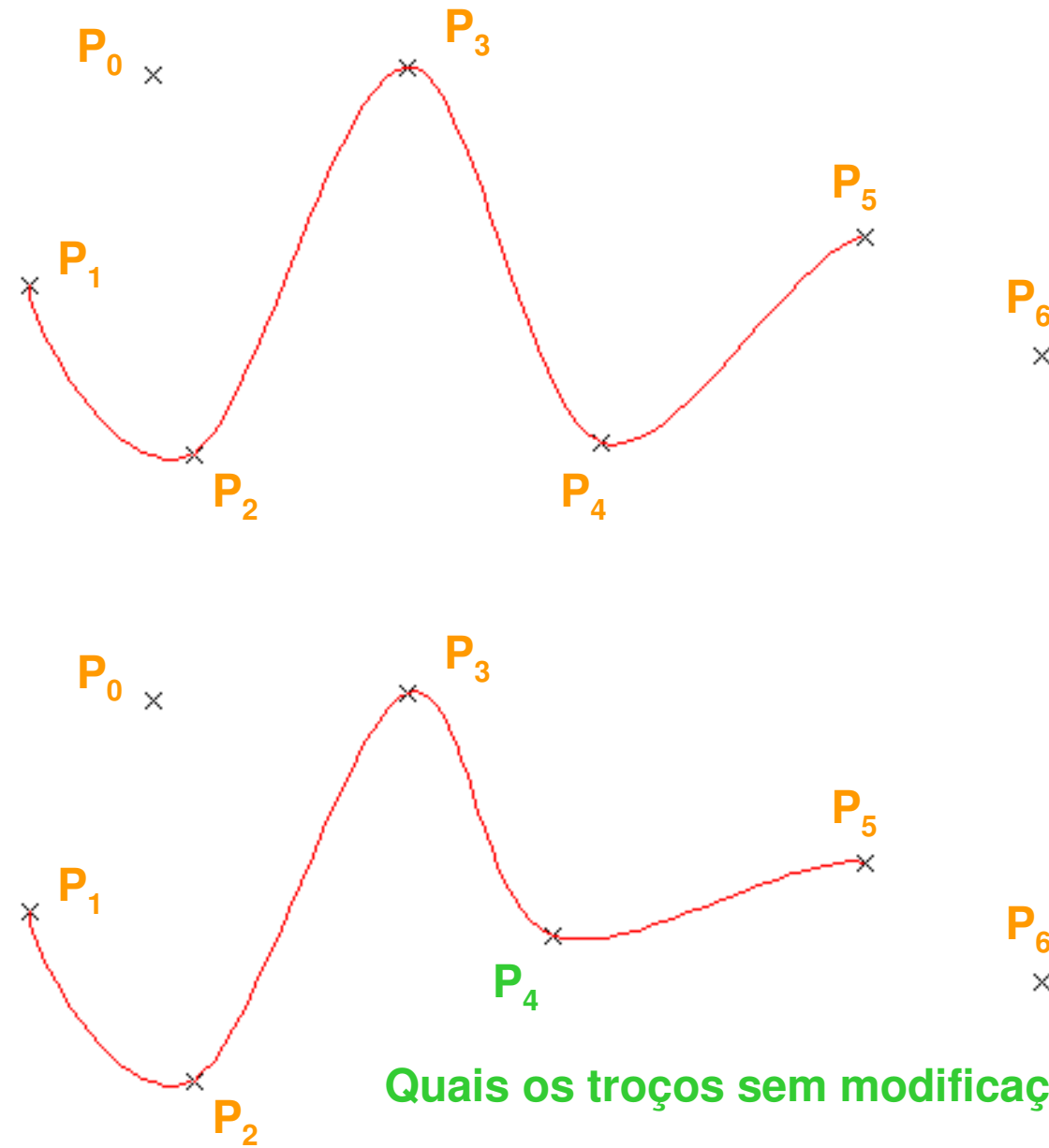
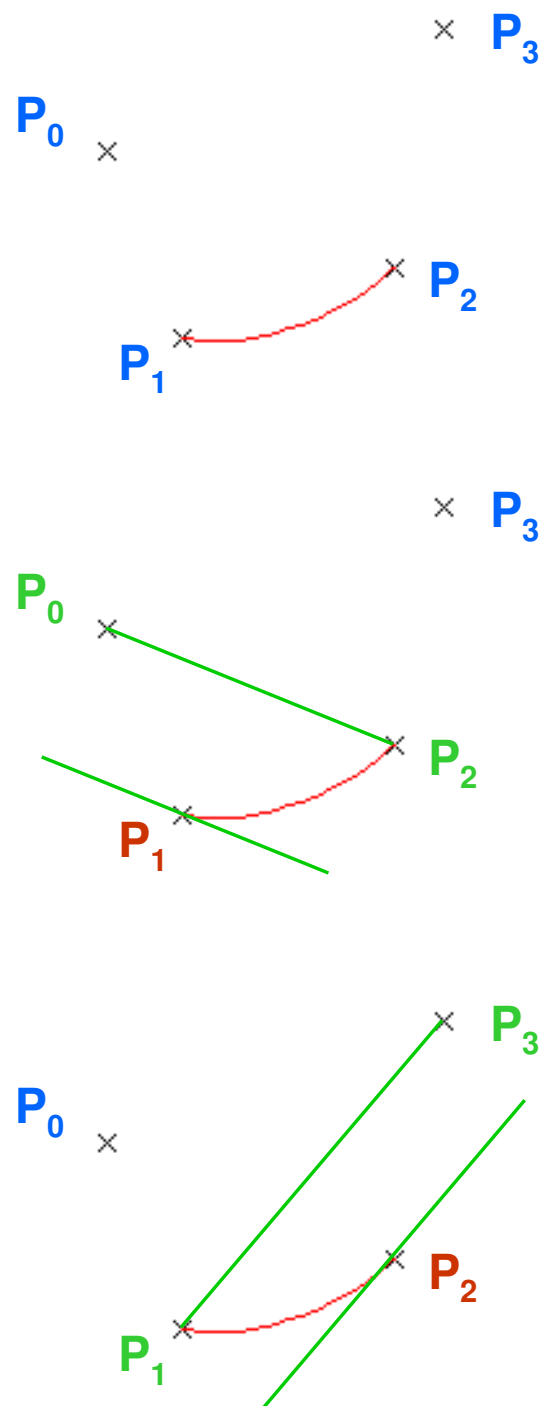
$$\frac{d}{dt} Q_i(1) = \frac{d}{dt} Q_{i+1}(0)$$

Continuidade C^1

M.Próspero

Exemplos

Direção dos vetores tangentes



M.Próspero

Conversão entre curvas cúbicas

Se for construído (ou se já existir num determinado sistema) um avaliador para um certo tipo de curvas cúbicas, é possível usá-lo com qualquer outra forma de curva cúbica desde que se proceda a uma conversão entre curvas.

É o que se passa com os avaliadores (eficientes) para curvas de Bézier já existentes em PostScript e em OpenGL.

PROBLEMA:

Dada a curva $Q(t) = T \cdot M_{Bs} \cdot G_{Bs}$

encontrar G_B tal que $Q(t) = T \cdot M_B \cdot G_B$

M.Próspero

Conversão para curva de Bézier

Solução:

$$\mathbf{M}_B \cdot \mathbf{G}_B = \mathbf{M}_{Bs} \cdot \mathbf{G}_{Bs}$$

$$\mathbf{G}_B = \mathbf{M}_B^{-1} \cdot \mathbf{M}_{Bs} \cdot \mathbf{G}_{Bs}$$

em que

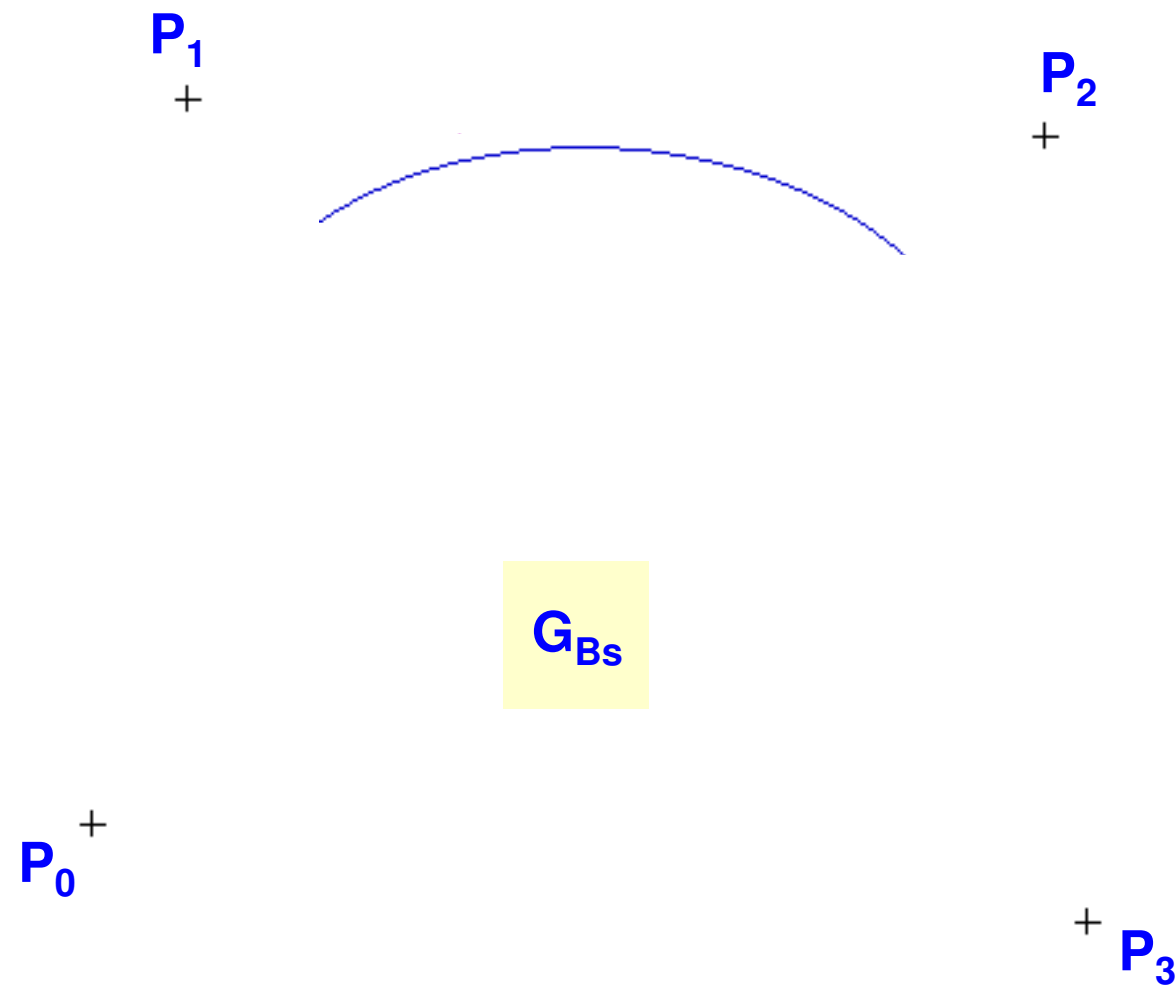
$$\mathbf{M}_B^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1/3 & 1 \\ 0 & 1/3 & 2/3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Conclusão:

Qualquer curva cúbica pode ser convertida numa curva cúbica de Bézier

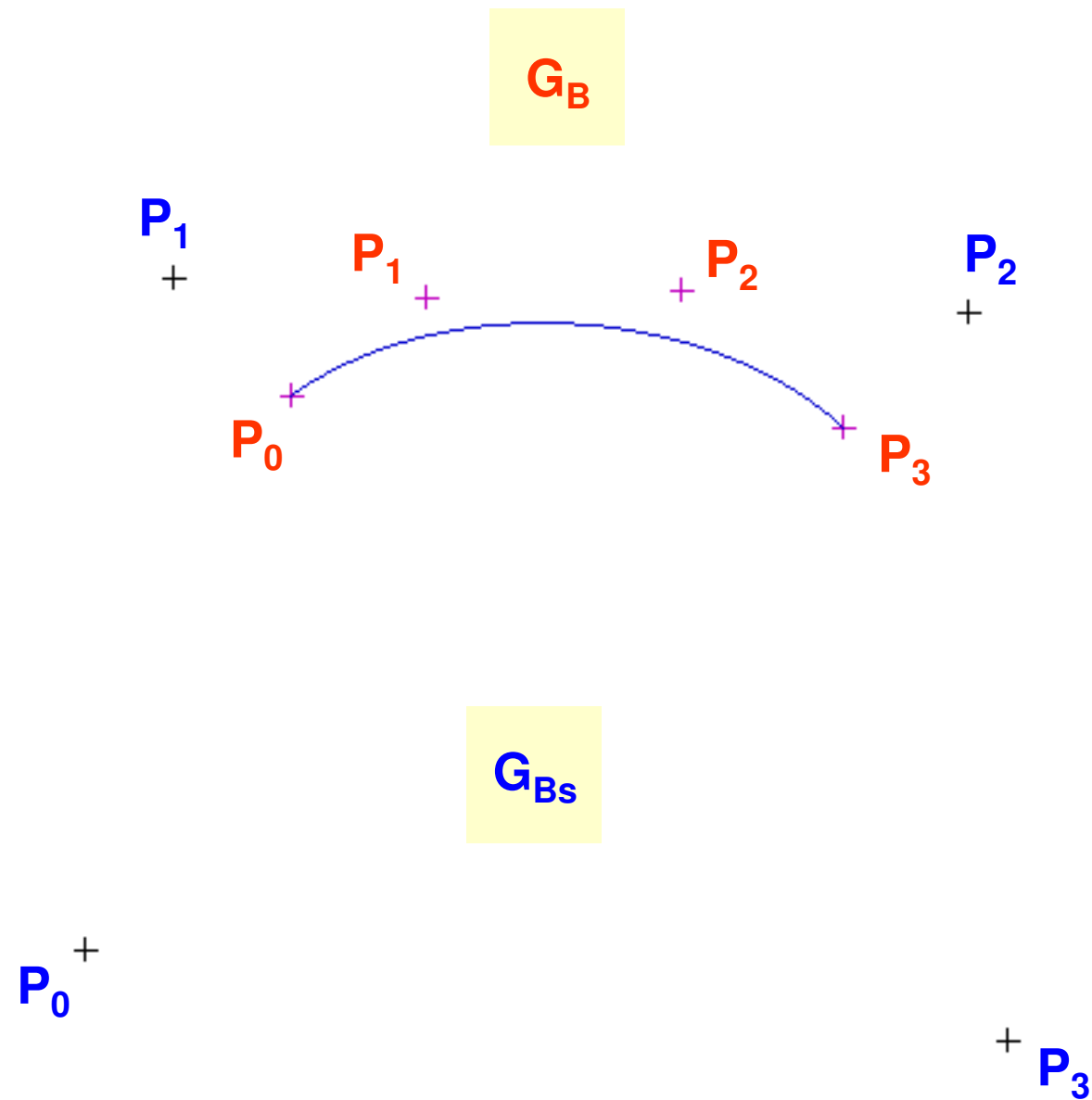
M.Próspero

Exemplo de conversão B-spline→Bézier



M. Próspero

Exemplo de conversão B-spline→Bézier



M.Próspero