

Computação Gráfica e Interfaces

2016-2017
Fernando Birra

Transformações Geométricas

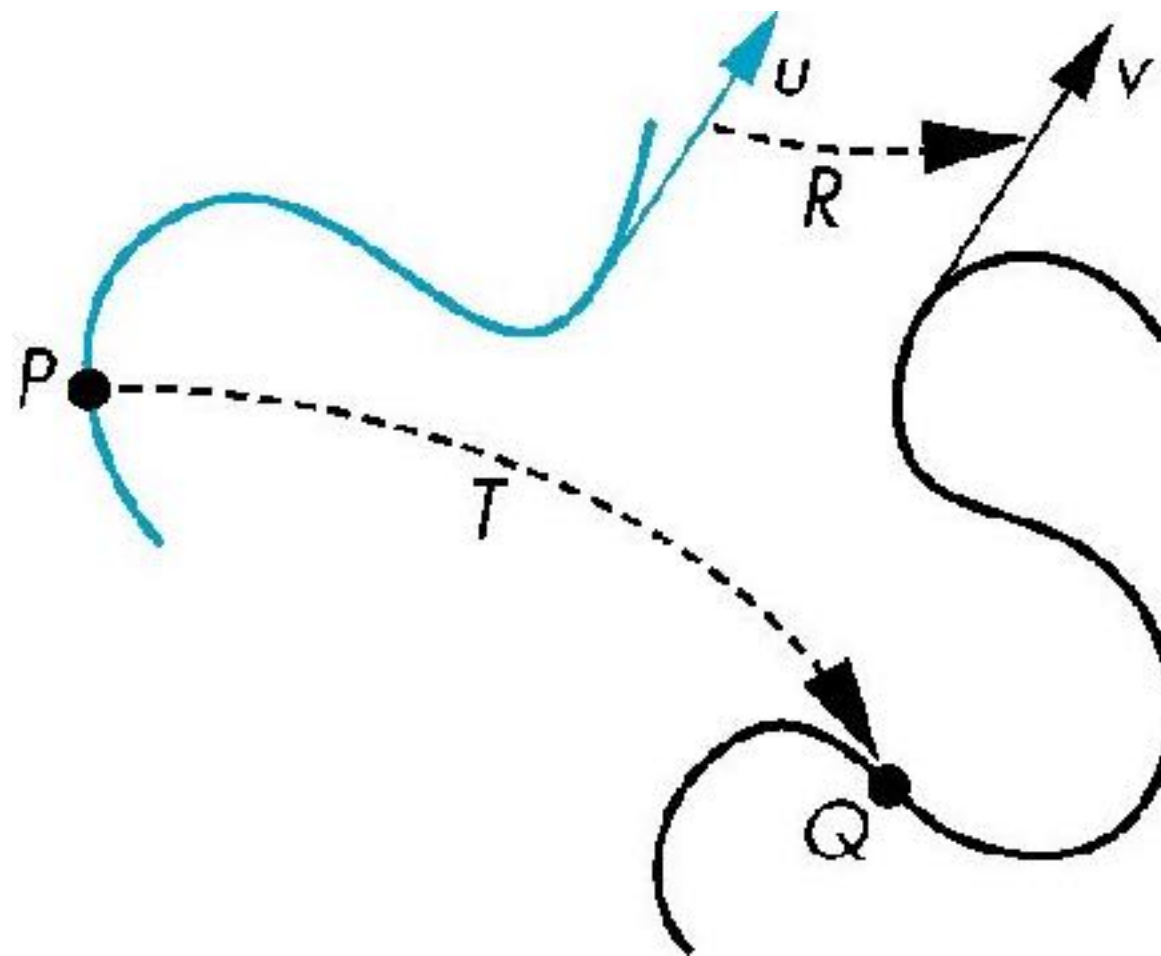
2016-2017
Fernando Birra

Objetivos

- Introduzir as transformações geométricas simples:
 - Translação
 - Rotação
 - Mudança de Escala
 - Deformação Transversa
- Derivar as respectivas matrizes de transformação com coordenadas homogéneas
- Aprender a usar a composição de transformações simples para deduzir transformações geométricas arbitrárias

Transformações Geométricas Genéricas

- Uma transformação geométrica qualquer transforma pontos e/ou vetores em outros pontos/vetores.

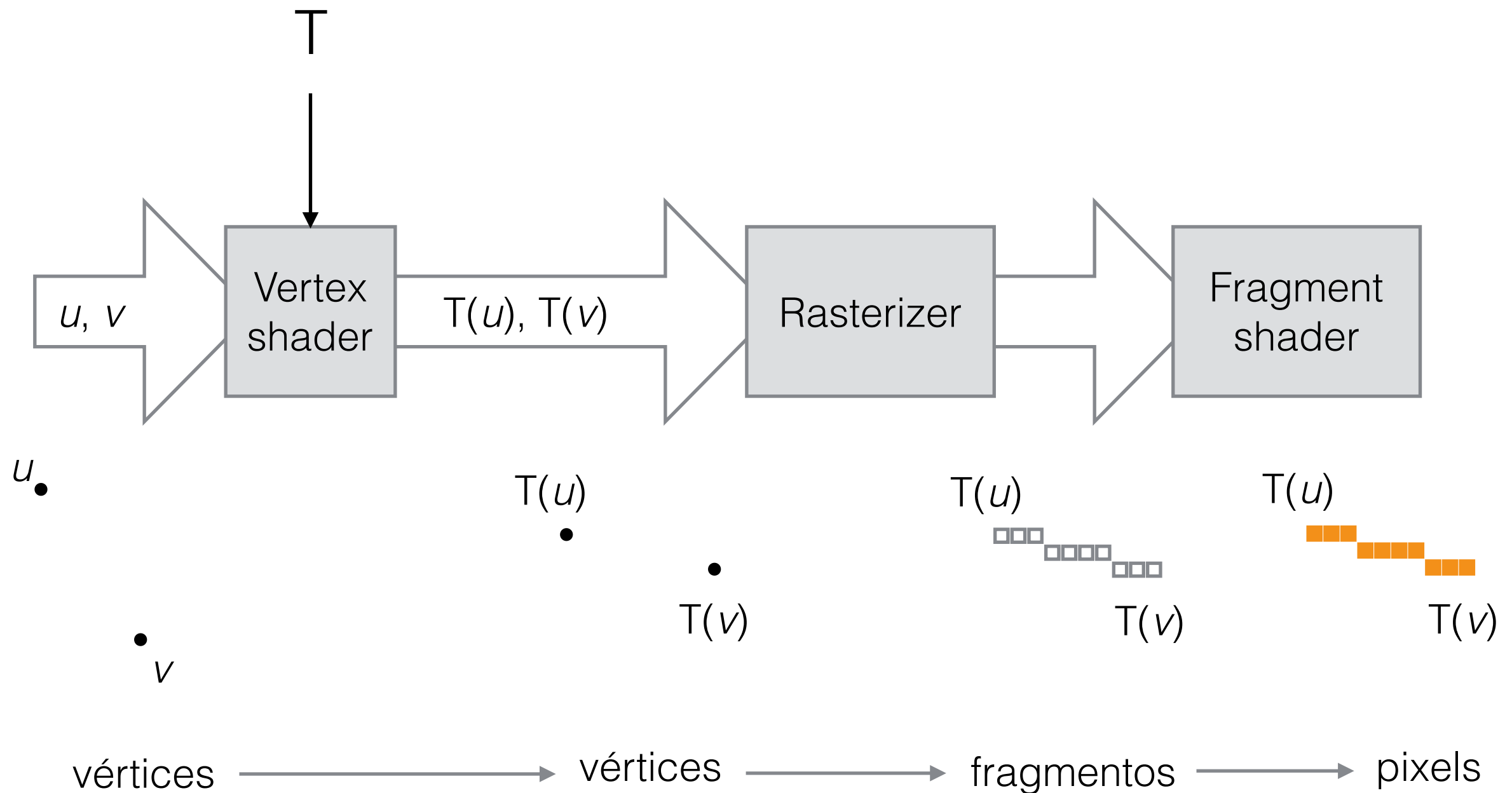


Transformações Afins

- Preservam as linhas
- As transformações mais importantes são transformações afins:
 - Transformações dos corpos rígidos (translação, rotação)
 - Mudança de escala e deformação transversa (shear)

Importância nos sistemas gráficos: Basta transformar os extremos duma linha e unirmos os pontos transformados com uma linha

Tratamento no Pipeline

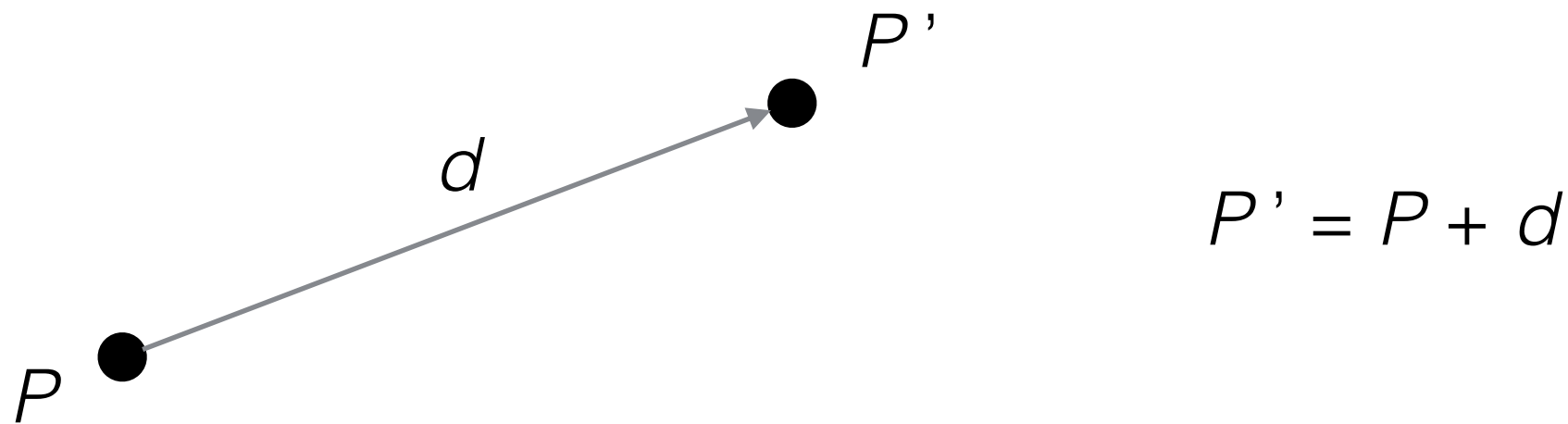


Notação

- P, Q, R : pontos num espaço afim
- u, v, w : vetores num espaço afim
- α, β, γ : escalares
- p, q, r : representações de pontos - array com 4 escalares em coordenadas homogéneas
- u, v, w : representações de vetores - array com 4 escalares em coordenadas homogéneas

Translação

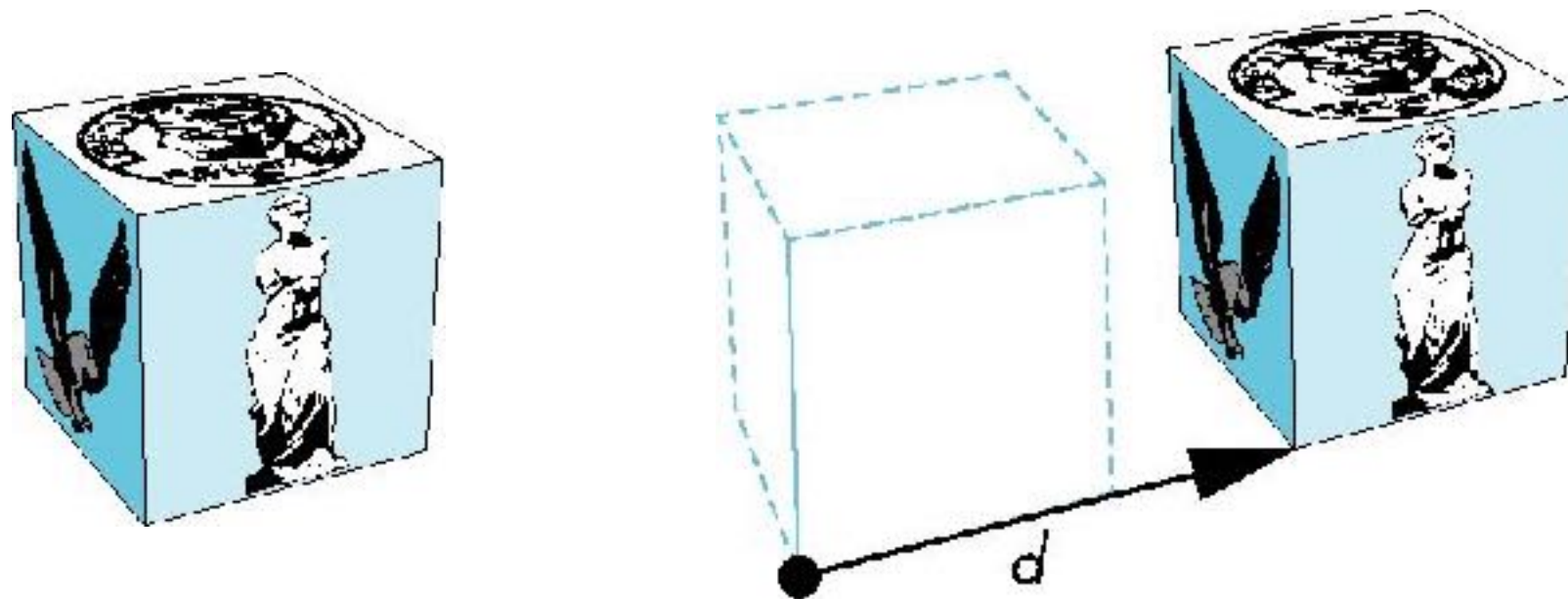
- Mover (transladar, deslocar) um ponto para uma nova localização.



- Deslocamento determinado por um vetor d
- 3 graus de liberdade

Translação

- Embora um ponto se possa mover para outra localização mais do que de uma forma, para um conjunto de pontos existe normalmente apenas uma forma.



objeto

translação: todos os pontos
deslocados dum mesmo vetor

Translação

- Usando a representação em coordenadas homogêneas num determinado referencial:

$$\mathbf{p} = [p_x \ p_y \ p_z \ 1]^T$$

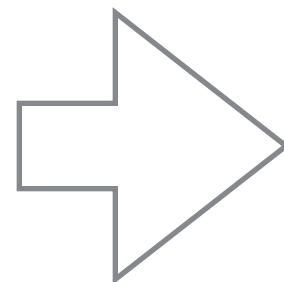
$$\mathbf{p}' = [p'_x \ p'_y \ p'_z \ 1]^T$$

$$\mathbf{d} = [d_x \ d_y \ d_z \ 0]^T$$

$$p'_x = p_x + d_x$$

$$p'_y = p_y + d_y$$

$$p'_z = p_z + d_z$$



Esta expressão é em 4D e
exprime o conceito:
ponto = ponto + vetor

$$\mathbf{p}' = \mathbf{p} + \mathbf{d}$$

Translação

(Matriz de Transformação)

- Também se pode representar uma translação usando uma matriz **T**, de 4x4, usando coordenadas homogêneas, de tal modo que:

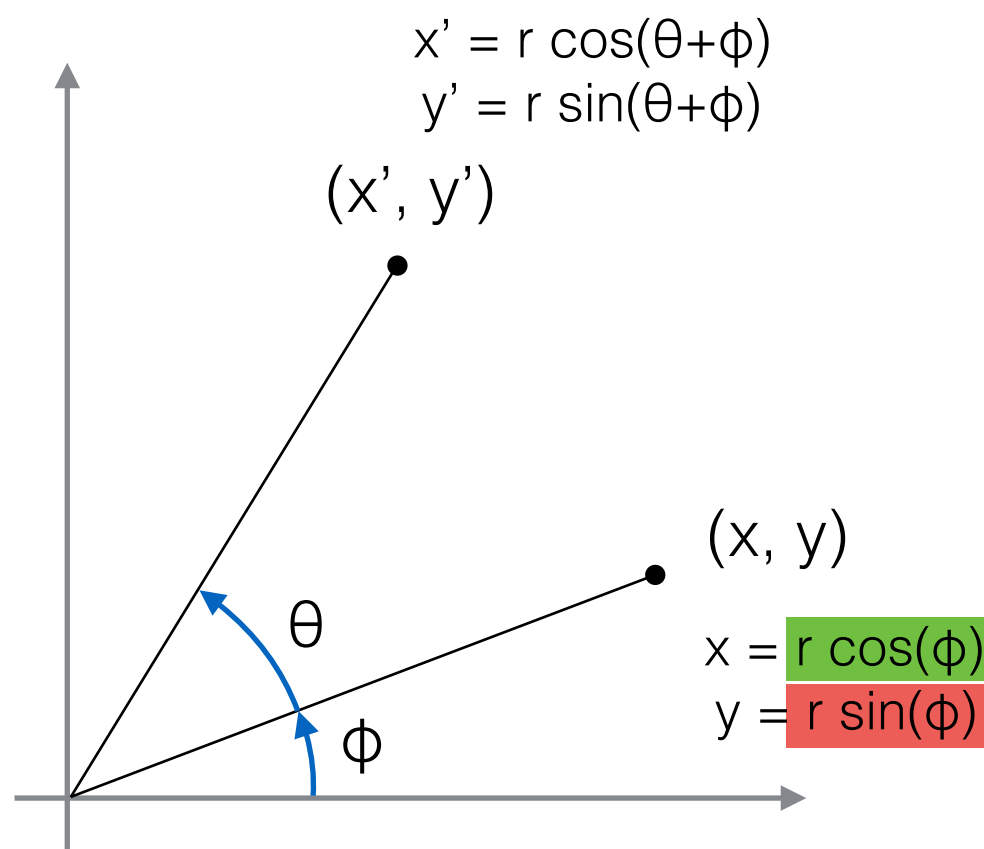
$$\mathbf{p}' = \mathbf{T}\mathbf{p}$$

$$\mathbf{M} = \mathbf{T}(d_x, d_y, d_z) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & d_x \\ 0 & 1 & 0 & d_y \\ 0 & 0 & 1 & d_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- A vantagem desta abordagem é que todas as transformações afins se podem exprimir desta forma, podendo várias transformações ser concatenadas e guardadas numa única matriz.

Rotação (2D)

- Considerando coordenadas polares de um ponto $P(r, \phi) = (r \cos(\phi), r \sin(\phi))$, na rotação em torno da origem de um ângulo θ , o raio mantém-se constante, aumentando o ângulo inicial em θ :



$$\begin{aligned} x' &= r \cos(\phi) \cos(\theta) - r \sin(\phi) \sin(\theta) \\ y' &= r \sin(\phi) \cos(\theta) + r \cos(\phi) \sin(\theta) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x' &= x \cos(\theta) - y \sin(\theta) \\ y' &= x \sin(\theta) + y \cos(\theta) \end{aligned}$$

Rotação em torno de Z (3D)

- Em 3D, a rotação em torno de Z deixa todos os pontos com o valor da coordenada Z inalterada.

- É equivalente à rotação 2D em planos de Z constante:

$$x' = x \cos(\theta) - y \sin(\theta)$$

$$y' = x \sin(\theta) + y \cos(\theta)$$

$$z' = z$$

- Em coordenadas homogêneas:

$$\mathbf{p}' = \mathbf{R}_z(\theta)\mathbf{p} \quad \mathbf{R} = \mathbf{R}_z(\theta) \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Matrizes de rotação em 3D

- De forma análoga:

Rotação em torno de X não altera a coordenada X

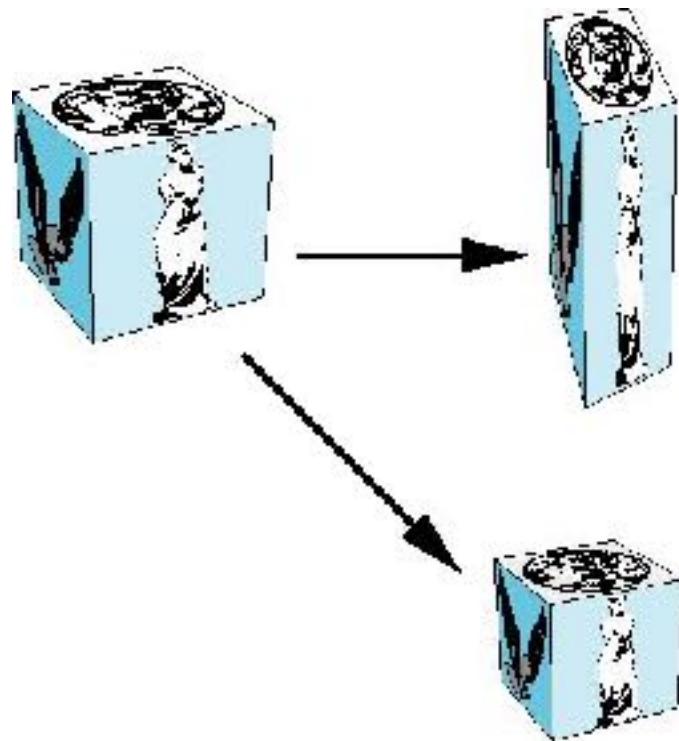
Rotação em torno de Y não altera a coordenada Y

$$R = R_x(\theta) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad R = R_y(\theta) \begin{bmatrix} \cos \theta & 0 & \sin \theta & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin \theta & 0 & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$R = R_z(\theta) \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Mudança de escala

- Expansão ou contração ao longo de cada um dos eixos, com o ponto fixo na origem



$$x' = S_x x$$

$$y' = S_y y$$

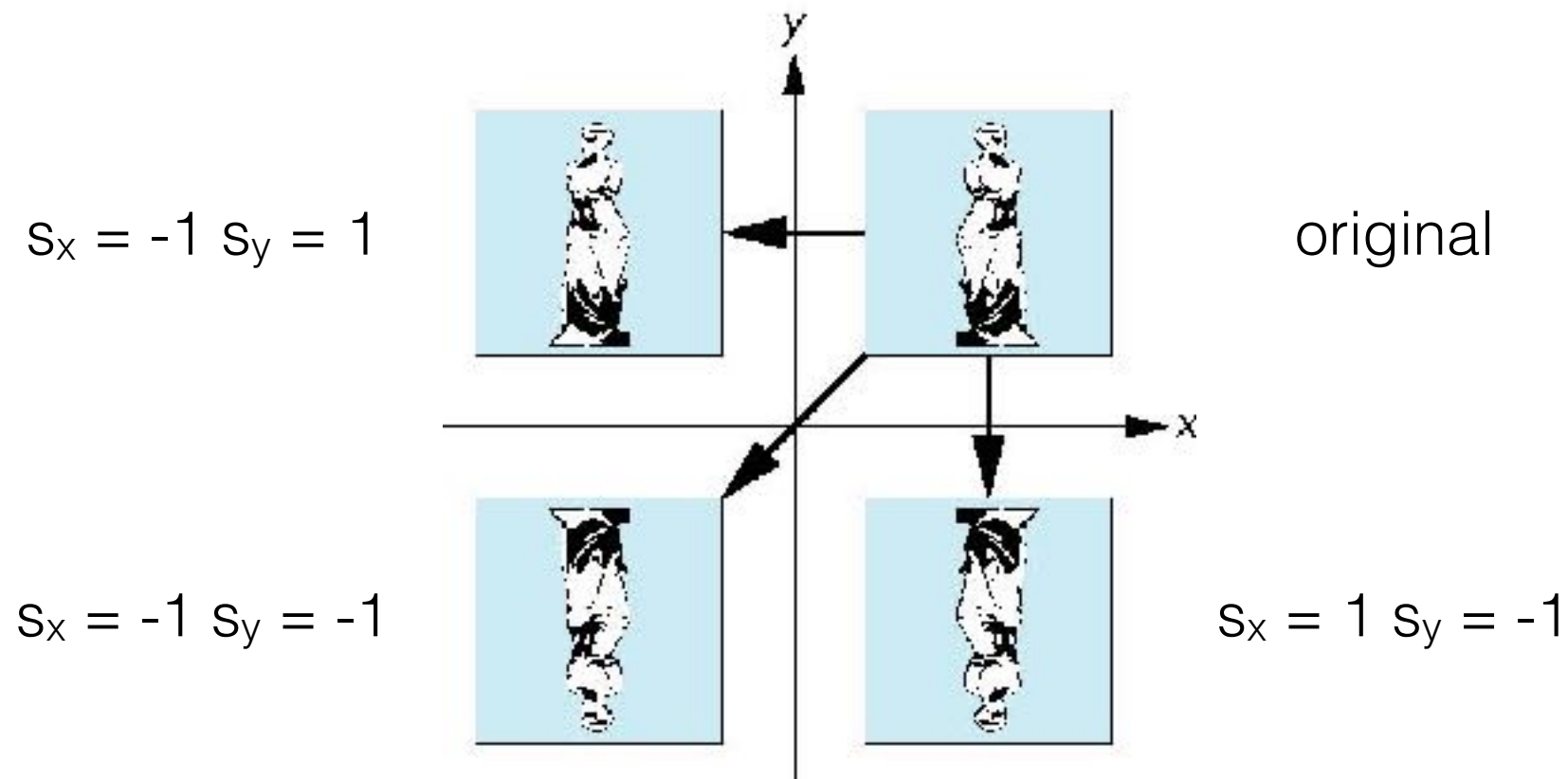
$$z' = S_z z$$

$$\mathbf{p}' = \mathbf{S}\mathbf{p}$$

$$\mathbf{S} = \mathbf{S}(s_x, s_y, s_z) = \begin{bmatrix} s_x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & s_y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & s_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Reflexões

- São um caso particular da mudança de escala (com fatores unitários negativos)



Transformações inversas

- As transformações inversas das transformações simples podem ser obtidas sem recorrer a fórmulas gerais:
- Translação: $\mathbf{T}^{-1}(d_x, d_y, d_z) = \mathbf{T}(-d_x, -d_y, -d_z)$
- Rotação: $\mathbf{R}^{-1}(\theta) = \mathbf{R}(-\theta)$
 $= \mathbf{R}^T(\theta)$, pq. $\sin(-\theta) = -\sin(\theta)$ e $\cos(-\theta) = \cos(\theta)$
- Escala: $\mathbf{S}^{-1}(s_x, s_y, s_z) = \mathbf{S}(1/s_x, 1/s_y, 1/s_z)$

Composição de transformações geométricas

- Podem formar-se transformações afins arbitrárias por composição das transformações simples: rotações, translação e mudança de escala
- Supondo que temos um conjunto grande de vértices $\mathbf{p}$, para transformar com uma composição de transformações simples $\mathbf{M}_n(\dots\mathbf{M}_2(\mathbf{M}_1\mathbf{p}))\dots$, o custo do cálculo de $\mathbf{M}=\mathbf{M}_n\dots\mathbf{M}_2.\mathbf{M}_1$, é negligenciável quando comparado com o custo $\mathbf{M}.\mathbf{p}$, para um grande número de vértices.
- O desafio é encontrar a composição certa para fazer o que se pretende numa dada aplicação.

Ordem de aplicação

- O produto de matrizes (a composição de transformações) é associativo, mas não é comutativo!

$$\mathbf{p}' = \mathbf{ABCp} = \mathbf{A(B(Cp))}$$

- Se se usassem vetores linha para representar os pontos, a transformação acima seria:

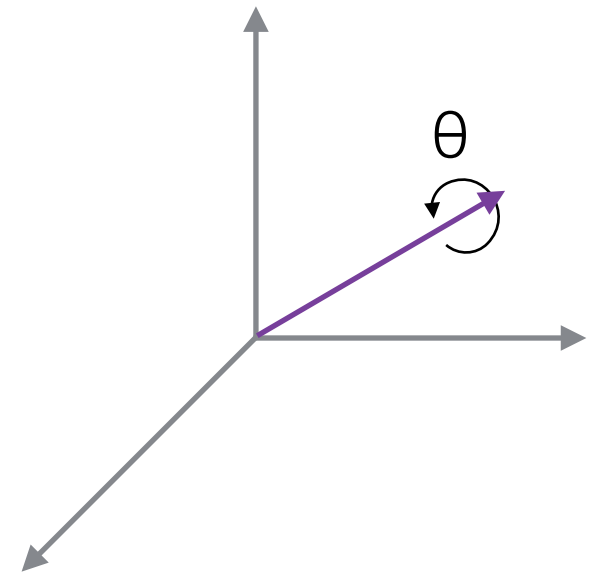
$$\mathbf{p}' = \mathbf{pC^TB^TA^T} = ((\mathbf{pC^T})\mathbf{B^T})\mathbf{A^T}$$

Rotação em torno de eixo arbitrário (que cruza a origem)

- Transformação complexa que pode ser decomposta em transformações simples
- Uma rotação de θ em torno dum eixo arbitrário pode ser decomposta em rotações em torno dos eixos x, y e z

$$\mathbf{R}(\theta) = \mathbf{R}_z(\theta_z) \mathbf{R}_y(\theta_y) \mathbf{R}_x(\theta_x)$$

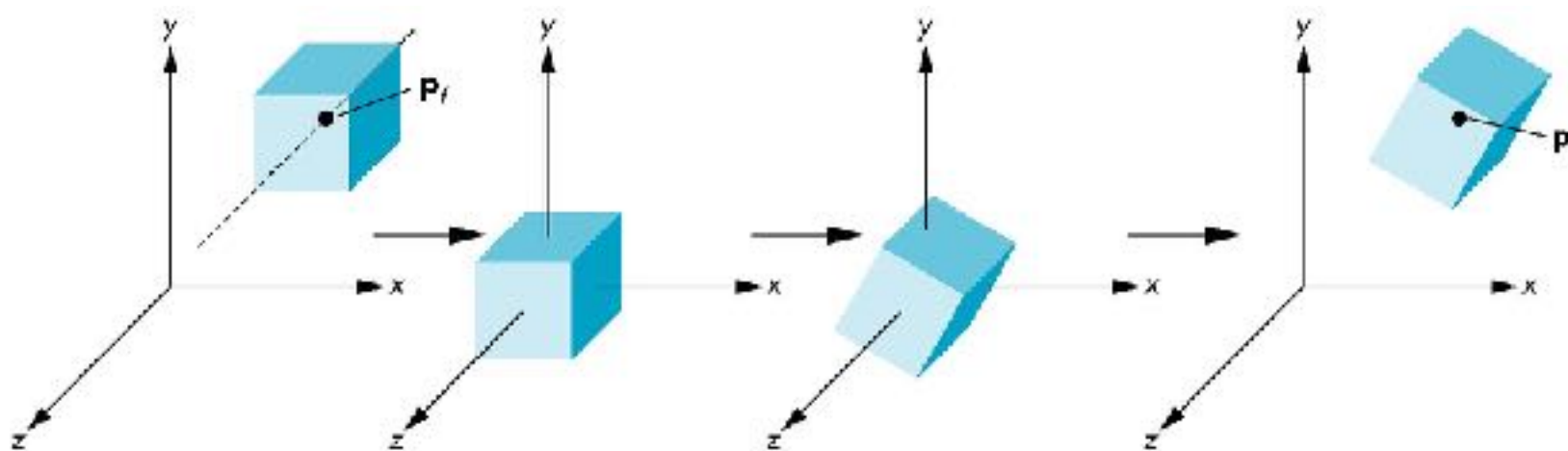
- Os ângulos θ_x , θ_y e θ_z denominam-se por ângulos de Euler.
- Embora as rotações não se possam trocar, é possível encontrar 3 outros ângulos de Euler, para outra ordem de aplicação das transformações, que produza o mesmo efeito.



Rotação em torno dum eixo que não passa na origem

- Usa-se o resultado anterior, mas com a seguinte alteração:
 1. Mover um ponto ($\mathbf{p}_f$) do eixo para a origem
 2. Rodar $\mathbf{R}(\theta)$
 3. Mover o ponto de volta para a sua posição inicial

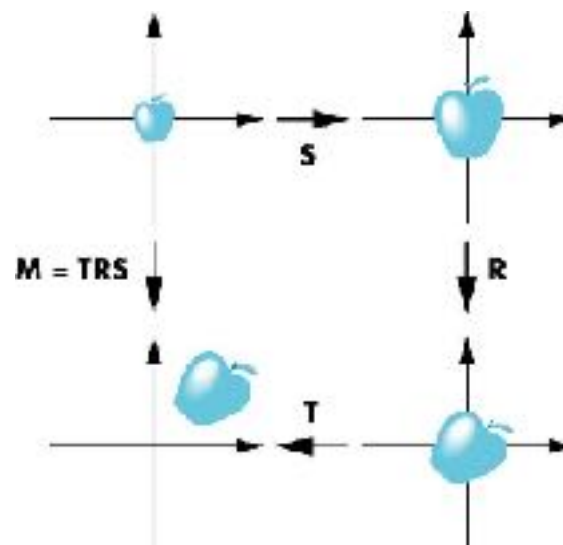
$$\mathbf{M} = \mathbf{T}(\mathbf{p}_f)\mathbf{R}(\theta)\mathbf{T}(-\mathbf{p}_f)$$



Transformações de instanciação

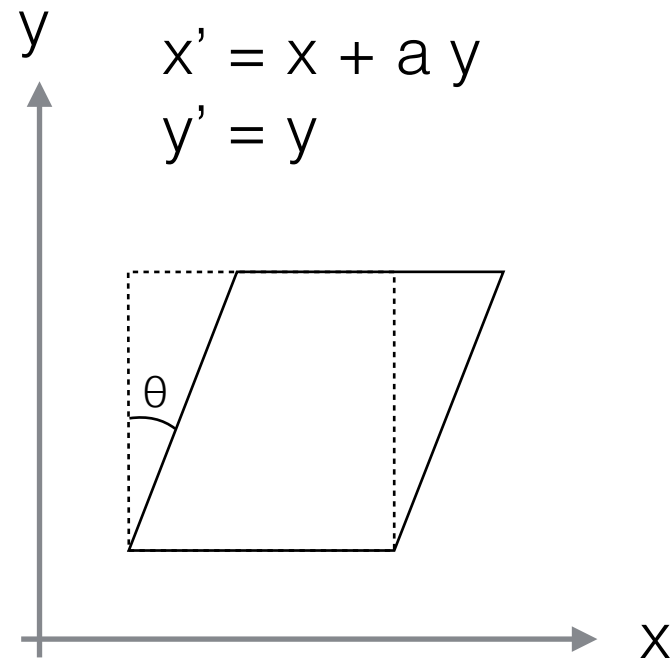
- Em modelação, os objetos primitivos estão normalmente centrados na origem, orientados com os eixos principais e com um determinado tamanho
- Aos vértices desses objetos “primitivos” aplicam-se transformações que seguem muitas vezes o padrão:

- Escala
- Orientação
- Posicionamento

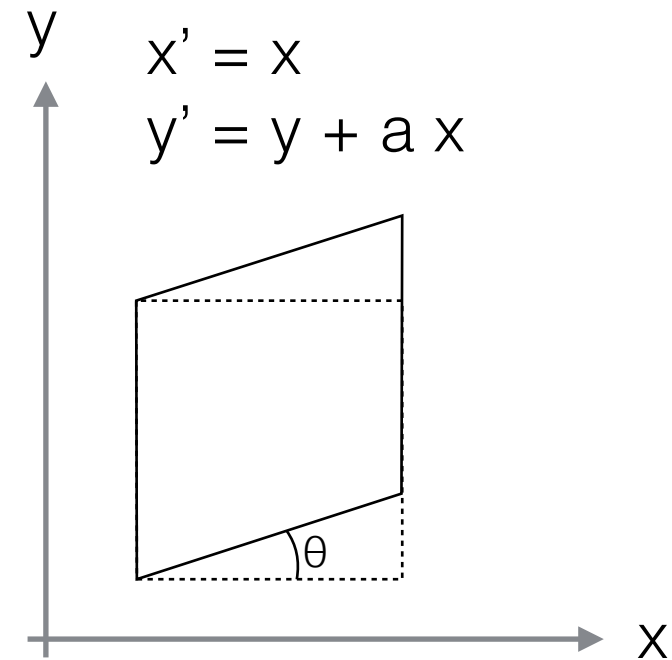


Transformação de
Instanciação

Deformação Transversa em 2D



$$a = \tan \theta$$



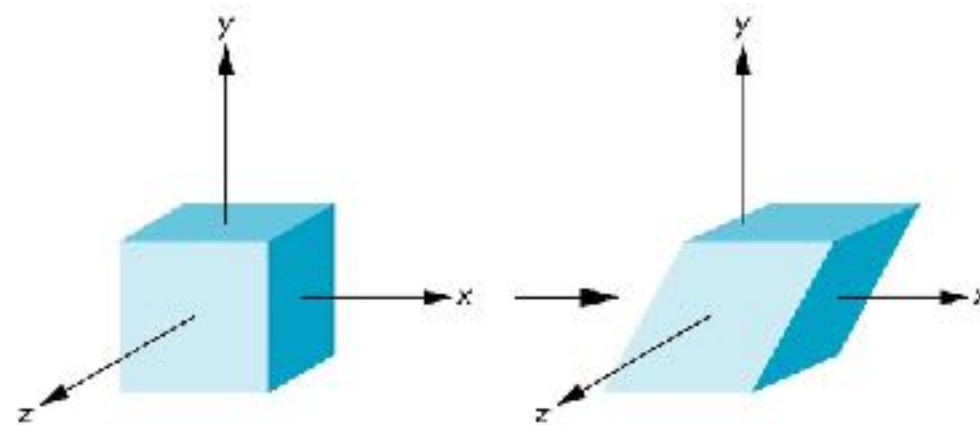
$$SH_y(\theta) = \begin{bmatrix} 1 & \tan \theta & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$SH_x(\theta) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \tan \theta & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Nota: usamos como índice o eixo que não sofre qualquer alteração

Deformação Transversa

- Exemplo dum caso particular em 3D



- A matriz de deformação transversa, para o caso geral, é dada por:

$$\begin{bmatrix} 1 & a & b & 0 \\ c & 1 & d & 0 \\ e & f & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$x' = x + ay + bz$$

$$y' = y + cx + dz$$

$$z' = z + ex + fy$$

Operações comutativas

- Apesar de, no caso geral, a ordem das transformações ser importante, em alguns casos pode trocar-se a ordem das operações visto serem comutativas:

- $\mathbf{S}(a, b, c) \mathbf{S}(d, e, f) = \mathbf{S}(d, e, f) \mathbf{S}(a, b, c) = \mathbf{S}(ad, be, cf)$

- $\mathbf{T}(a, b, c) \mathbf{T}(d, e, f) = \mathbf{T}(d, e, f) \mathbf{T}(a, b, c) = \mathbf{T}(a+d, b+e, c+f)$

- $\mathbf{R}_i(\theta) \mathbf{R}_i(\phi) = \mathbf{R}_i(\phi) \mathbf{R}_i(\theta) = \mathbf{R}_i(\theta+\phi), i \in \{x, y, z\}$

- $\mathbf{R}_x(\theta) \mathbf{S}(a, k, k) = \mathbf{S}(a, k, k) \mathbf{R}_x(\theta)$

- $\mathbf{R}_y(\theta) \mathbf{S}(k, a, k) = \mathbf{S}(k, a, k) \mathbf{R}_y(\theta)$

- $\mathbf{R}_z(\theta) \mathbf{S}(k, k, a) = \mathbf{S}(k, k, a) \mathbf{R}_z(\theta)$



Escala uniforme em dois dos eixos e rotação no 3º eixo