

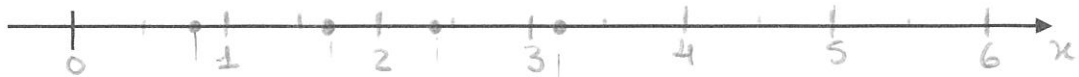
Física para Informática 2010/2011

Ficha de Trabalho sobre Cinemática

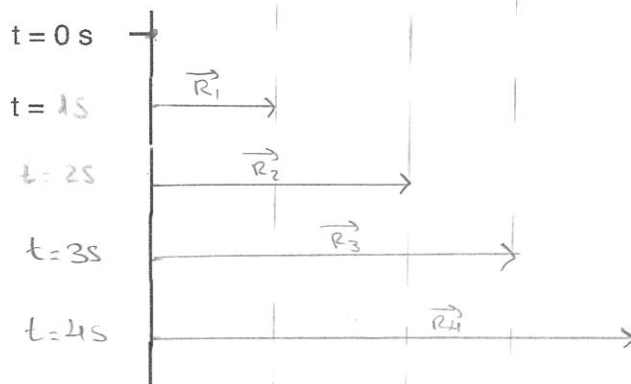
17-02-2011

1. Vamos começar por observar o movimento de um robot que se desloca com velocidade constante. Uma das formas de representar o movimento é através de um diagrama do movimento: um esquema em que a posição de um objecto é representada em instantes sucessivos, normalmente a intervalos de tempo constantes.

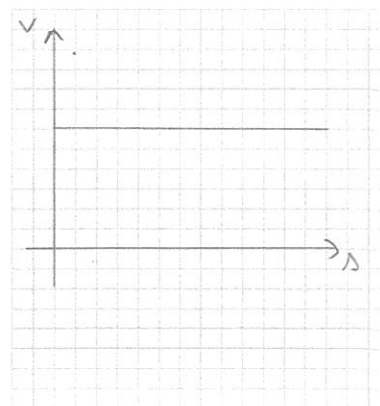
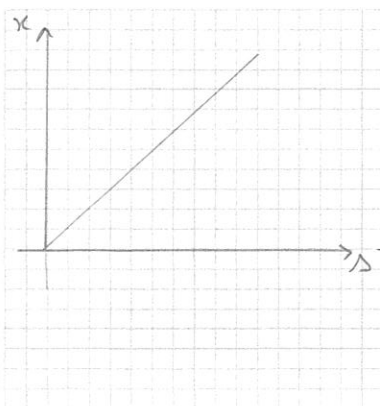
1.1 Primeiro passo: construir o diagrama do movimento do robot:



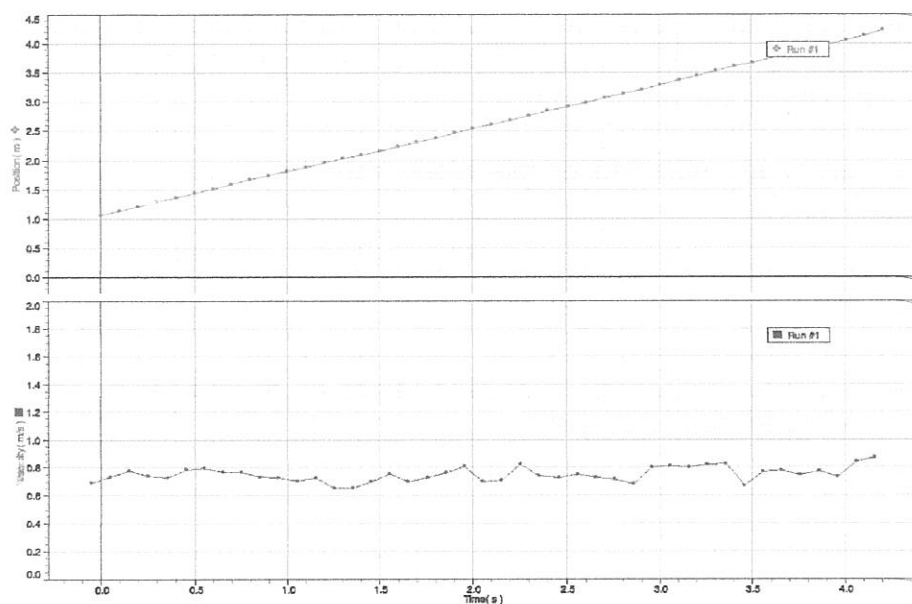
1.2 Segundo passo: vamos representar o vector posição do robot para os vários instantes de tempo marcados no diagrama do movimento:



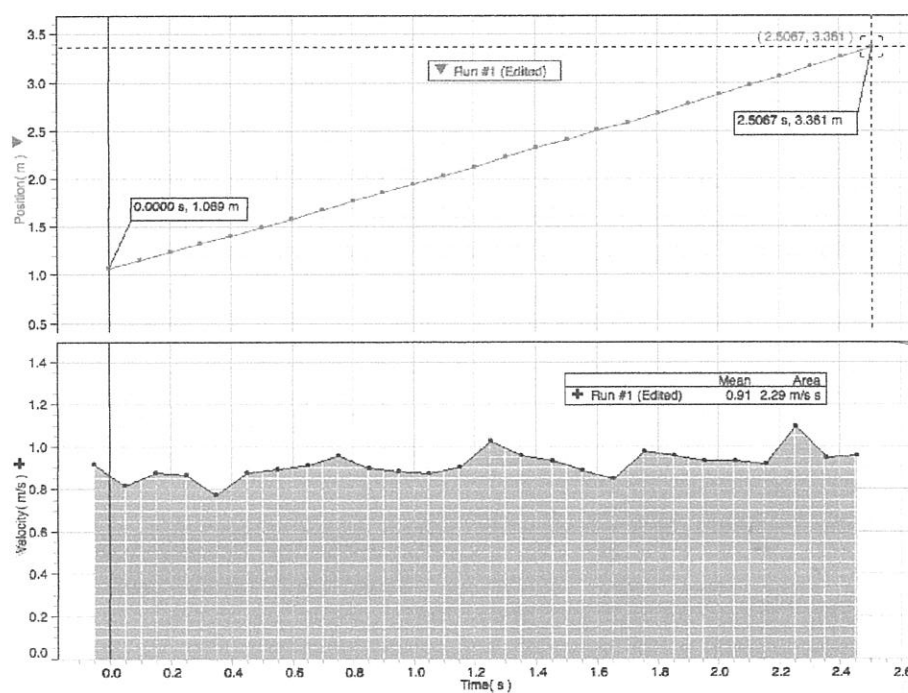
1.3 Podemos descrever o movimento usando diversas formas, para além do diagrama do movimento: verbalmente, matematicamente e graficamente. Terceiro passo: faça um gráfico em que represente qualitativamente a posição e noutro a velocidade do robot:



1.4 Agora vamos voltar a observar o robot a deslocar-se em linha recta e com velocidade constante, mas desta vez um sonar irá acompanhar a nossa observação. O sonar determina a distância do objecto (o robot) ao sensor (o próprio sonar). O programa de aquisição de dados mostra-nos a posição do robot em função do tempo. A origem do eixo da distância é o próprio sonar. A partir destes dados, o programa de aquisição de dados constrói o gráfico da posição em função do tempo. A partir dos deslocamentos o programa constrói também o gráfico da velocidade. Devemos obter algo parecido com isto:



1.5 Se repetirmos a aquisição iremos obter dados quantitativamente um pouco diferentes, mas qualitativamente iguais:



$$\text{DESLOCAMENTO} = P_f - P_i$$

$$V_m = \frac{\Delta x}{\Delta t}$$

VELOCIDADE $\Rightarrow$ Grandeza vectorial

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$$

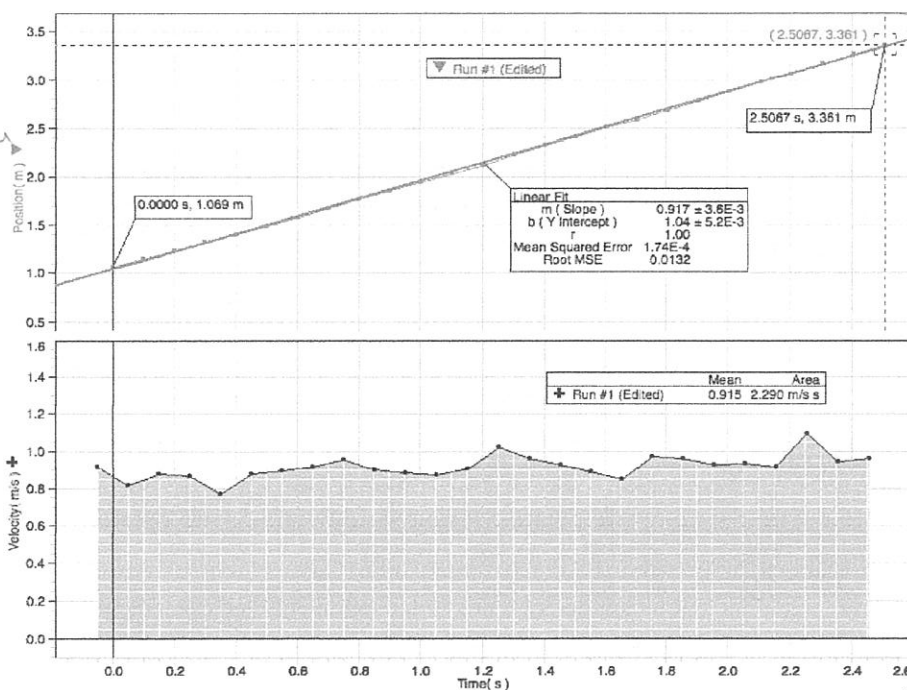
1.6 A posição inicial do robot é $x_1 = 1,07$ m. A posição final é $x_2 = 3,36$ m. Qual foi o deslocamento do robot? $3,36 - 1,07 = 2,29$

1.7 Repare agora no gráfico da velocidade. Podemos observar que a velocidade efectivamente não varia (para além das pequenas oscilações devidas à resolução do sonar usado para determinar a posição do robot) Quanto vale a área sob a linha que representa a velocidade, entre os instantes 0,0 s e 2,5 s (desenhada a cinzento)? Área = Deslocamento $0,91 \times 2,5 = 2,27$
2,29

1.8 Será coincidência? Qual é a relação entre a área debaixo da linha que representa a velocidade no gráfico $v(t)$ e o deslocamento? Iguais

1.9 O valor médio da velocidade entre os instantes 0,00 s e 2,51 s é igual a 0,915 m/s. Qual é a relação entre o deslocamento do carrinho, a velocidade média e o tempo que o robot levou a ir de x_1 até x_2 ? $V_m = \frac{\Delta x}{\Delta t}$

1.10 Num movimento com velocidade constante, o gráfico da posição em função do tempo é uma recta: a posição varia linearmente com o tempo. Vamos ver a relação entre os parâmetros da recta que melhor representa os dados da posição e a velocidade.



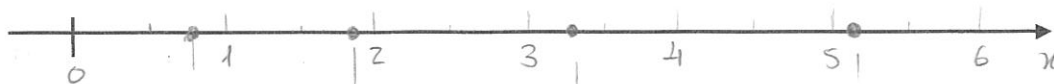
1.11 No caso do movimento que observámos, a ordenada na origem da recta que representa a posição vale $(1,04 \pm 0,01)$ m e o declive é igual a $(0,917 \pm 0,004)$ m/s. No gráfico da velocidade observamos que o valor médio da velocidade é igual a 0,915, o que coincide com o declive da recta que representa a posição, dentro da incerteza experimental.

Constatamos, deste modo, que num movimento uniforme (com velocidade constante), a velocidade é o declive da recta que representa a posição em função do tempo; por outras palavras, a velocidade é a derivada em ordem ao tempo da posição:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$$

2. Agora vamos mudar de meio de transporte. De um carrinho telecomandado é do que precisamos. Observemos a fase do movimento em que o motor acelera o carrinho.

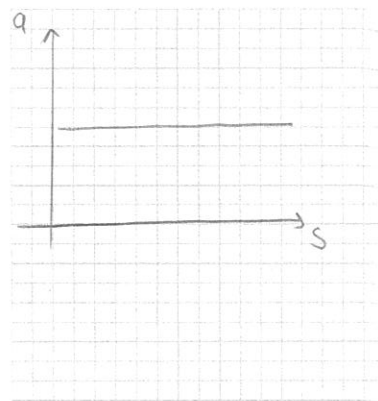
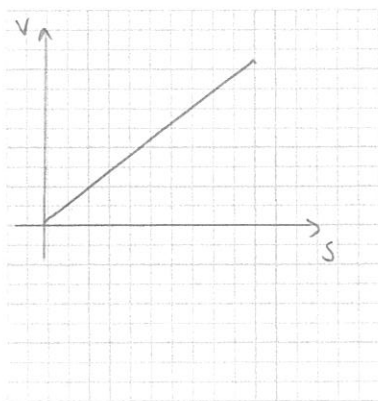
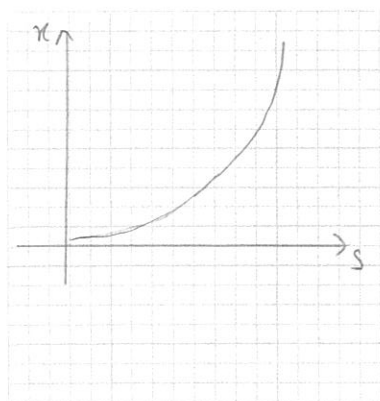
2.1 Primeiro passo: construir o diagrama do movimento do carro telecomandado:



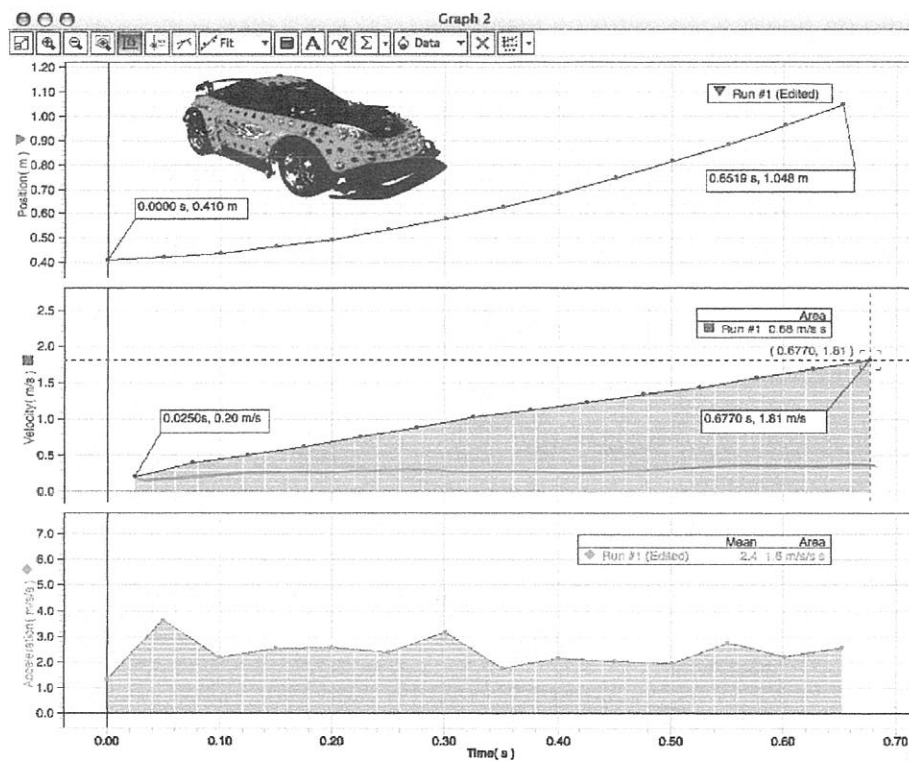
2.2 Segundo passo: vamos representar o vector posição do carro para os vários instantes de tempo marcados no diagrama do movimento:



2.3 Podemos descrever o movimento usando diversas formas, para além do diagrama do movimento: verbalmente, matematicamente e graficamente. Terceiro passo: faça um gráfico em que represente qualitativamente a posição, noutra a velocidade e no terceiro a aceleração do carrinho:



2.4 Agora vamos voltar a observar o carrinho a deslocar-se em linha recta, com velocidade variável. Desta vez o sonar também acompanha a nossa observação. O programa de aquisição de dados mostra-nos a posição do carrinho em função do tempo. A partir destes dados, o programa de aquisição de dados constrói o gráfico da posição em função do tempo. A partir dos deslocamentos o programa constrói também o gráfico da velocidade. Desta vez temos um terceiro gráfico: a aceleração. É calculada pelo programa, já vamos ver como. O gráfico que se segue é um exemplo de uma aquisição de dados:



2.6 Observe o gráfico da posição. Qual parece ser a forma da curva que representa a posição no gráfico $x(t)$ neste movimento com velocidade variável? Parábola

2.7 A posição inicial do carrinho é $x_1 = 0,410$ m. A posição final é $x_2 = 1,048$ m. Qual foi o deslocamento do carrinho? 0,638

2.8 Repare agora no gráfico da velocidade. Podemos observar que a velocidade não se manteve constante, aumentou com o tempo. Quanto vale a área sob a linha que representa a velocidade, entre os instantes 0,025 s e 0,677 s (desenhada a cinzento)? $0,652 \times 1,61 + 0,65 \times 0,2 = 0,6$

2.9 Será coincidência? Talvez não... Qual é a relação entre a área debaixo da linha que representa a velocidade no gráfico $v(t)$ e o deslocamento? Área = Deslocamento. Mesmo num movimento não uniforme!

2.10 Acabamos de constatar novamente um relação interessante entre a área no gráfico da velocidade e a variação da posição. Será que relação idêntica existe se olharmos para os gráficos da aceleração e da velocidade? Nesta experiência, a velocidade inicial do carrinho foi $v_1 = 0,20$ m/s. A velocidade final foi $v_2 = 1,81$ m/s. A variação da velocidade foi igual a 1,61 m/s

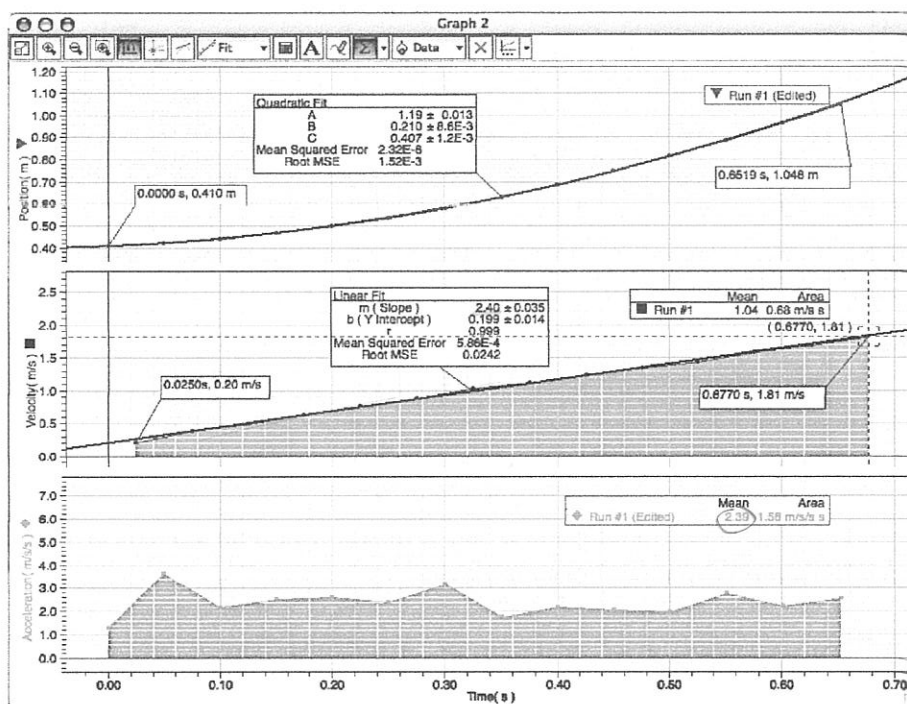
2.11 A área sob a linha que representa a aceleração no gráfico $a(t)$ é igual a 1,56 m/s². O que podemos concluir? Qual a relação entre esta área e a variação da velocidade do carrinho? $\Delta v = \text{Área da aceleração}$

2.12 Parece haver aqui um padrão... a velocidade é obtida a partir da posição, a área sob a linha que representa a velocidade é igual à variação da posição... a aceleração é obtida a partir da velocidade, a área sob a linha que representa a aceleração é igual à variação da velocidade! Porque será que isto acontece? O que haverá de fundamental na relação entre estas grandezas que conduza a estas relações?

21-02-2011

2.13 O valor médio da aceleração entre os instantes 0,00 s e 0,60 s é igual a 2,39 m/s². Qual é a relação entre a variação da velocidade do carrinho, a aceleração média e o tempo que o carrinho levou a ir de x1 até x2 ? $a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{1,60}{0,65} = 2,47 \text{ m/s}^2$

2.14 Num movimento com aceleração constante, o gráfico da velocidade em função do tempo é uma recta: a velocidade varia linearmente com o tempo. Vamos ver a relação entre os parâmetros da recta que melhor representa os dados da velocidade e da aceleração.



2.15 Neste movimento com aceleração não nula, a ordenada na origem da recta que representa a velocidade vale (0,199±0,014) m/s e o declive é igual a (2,40±0,04) m/s². No gráfico da aceleração observamos que o valor médio da aceleração é igual a 2,39, o que coincide com o declive da recta que representa a velocidade, dentro da incerteza experimental.

Constatamos, deste modo, que num movimento uniformemente acelerado (com aceleração constante), a aceleração é o declive da recta que representa a velocidade em função do tempo; por outras palavras, a aceleração é a derivada em ordem ao tempo da velocidade:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$$

$$\vec{v} = \frac{d\vec{x}}{dt}$$

2.16 Olhemos novamente para o gráfico da posição. A posição é representada por uma parábola: $x = At^2 + Bt + C$. Os parâmetros A, B e C são os que constam do gráfico. Num movimento com aceleração constante, a relação matemática entre a posição a velocidade e a aceleração é:

$$x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2$$

1,19

2.17 Então, o parâmetro A, que vale $(1,19 \pm 0,02) \text{ m/s}^2$, deve ser igual a metade da aceleração, ou seja, $2,39 \text{ m/s}^2 / 2 = 1,195 \text{ m/s}^2$. Estes dois valores são concordantes

2.18 O parâmetro B, que vale $(0,210 \pm 0,009) \text{ m/s}$, representa a velocidade inicial - a ordenada na origem no gráfico $v(t)$: 0,19. Estes dois valores também são concordantes pois os dois intervalos experimentais sobrepõem-se.

2.19 O movimento do carrinho decorreu com velocidade variável, representada no gráfico $v(t)$. Cada ponto deste gráfico representa uma velocidade instantânea. Também podemos descrever o movimento através da velocidade média a que o carrinho se deslocou.

$$\overline{v(t)} = \frac{\int v(t) dt}{\Delta t} = \frac{\int d\vec{r}}{\Delta t} = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}$$

$$v_m = \frac{\Delta x}{\Delta t} \quad a_m = \frac{\Delta v}{\Delta t}$$

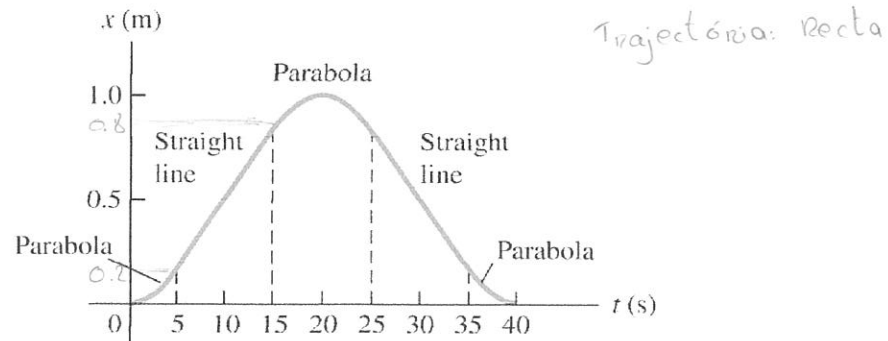
$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} \Rightarrow \vec{v} dt = \frac{d\vec{r}}{dt} \cdot dt \Rightarrow \int_{t_1}^{t_2} \vec{v} dt = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} d\vec{r} \Rightarrow \left[\vec{r} \right]_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1 = \underline{\underline{\Delta \vec{r}}} = \underline{\underline{\text{Área}}}$$

$$\left(\hat{e}_x \int v_x dt + \hat{e}_y \int v_y dt \right)$$

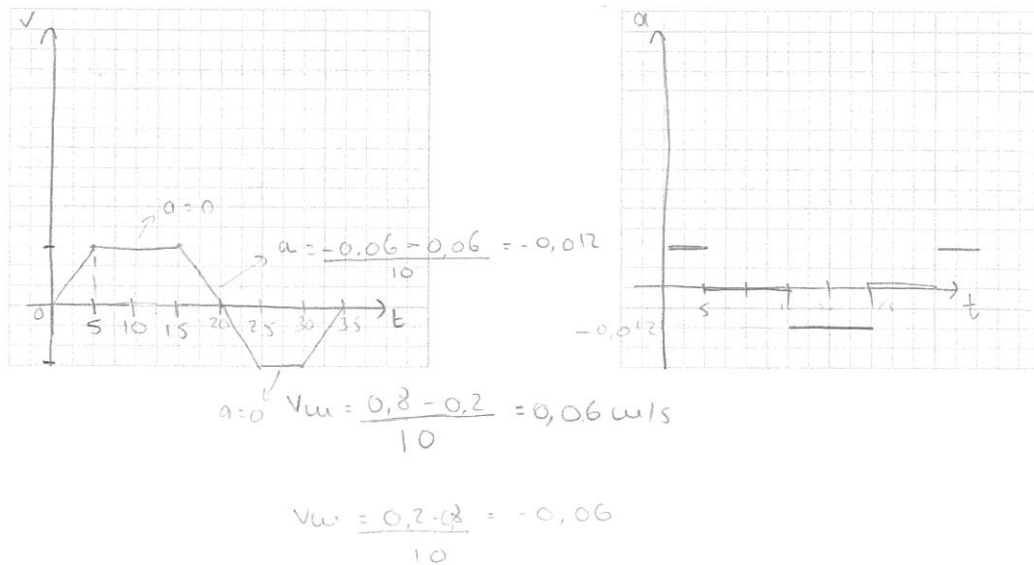
2.20 Qual a velocidade média do carrinho entre os instantes de tempo 0,025 s e 0,677 s?

2.21 Como neste movimento a aceleração é constante, o valor médio e o valor instantâneo da aceleração são _____. Se não fossem, como poderíamos calcular a aceleração média?

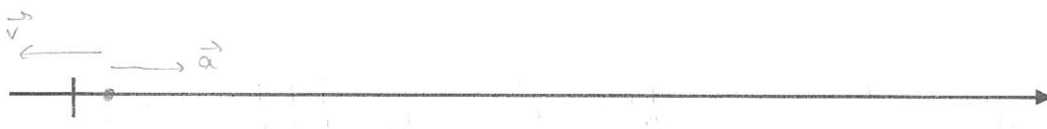
3. Problema: vai e vem. A figura mostra a coordenada de uma aranha que se desloca lentamente ao longo do eixo OX.



a) Faça um gráfico da velocidade e outro da aceleração da aranha em função do tempo.



b) Represente a posição da aranha ao longo do eixo OX nos instantes de tempo $t = 2,5 \text{ s}$, $t = 10 \text{ s}$, $t = 20 \text{ s}$, $t = 30 \text{ s}$ e $t = 37,5 \text{ s}$. Represente, qualitativamente, os vectores velocidade e aceleração nestes mesmos instantes.



4. Outro problema a uma dimensão: um corpo em queda livre. Desta vez vamos fazer algo ainda mais giro: medir um tempo com... uma régua!

Força semelhante à aceleração

24-02-2011

5. Mais um problema (difícil...): a cabeça de uma cascavel pode acelerar a 50 m/s^2 durante um ataque. Se um carro conseguisse acelerar de igual modo, quanto tempo levaria a atingir a velocidade de 100 km/h , partindo do repouso? E se um velocista conseguisse acelerar como a cascavel durante os primeiros 30 m de uma corrida, e depois mantivesse a velocidade constante, em quanto tempo correria os 100 m ?

$$100 \text{ km/h} = \frac{100 \cdot 1000 \text{ m}}{3600 \text{ s}} = \frac{1000}{36} \text{ m/s} = 27,8 \text{ m/s}$$

$$a = \frac{v_{\text{máx}}}{\Delta t} \Rightarrow \Delta t = \frac{1000}{36} = 0,56 \text{ s}$$

M.U.A. $\left\{ \begin{array}{l} v = v_0 + at \\ x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} at^2 \end{array} \right.$

$$30 \text{ m} = \frac{1}{2} \times 50 t^2 \Rightarrow t^2 = \frac{30 \times 2}{50} \Rightarrow t = \sqrt{\frac{60}{50}} = 1,095 \text{ s} \rightarrow 2,37 \text{ s}$$

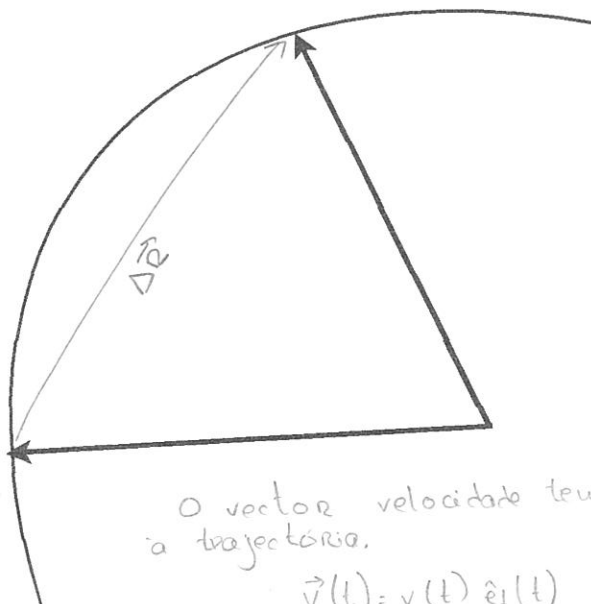
$$v = 50 \times 1,095 = 54,8 \text{ m/s}$$

$$x = x_0 + v_0 t \Rightarrow 100 = 30 + 54,8 t \Rightarrow t = 1,28 \text{ seg}$$

6. Duas DIMENSÕES! Duas situações típicas: os projecteis e o movimento circular. Começemos por este último.

$$\Delta \vec{r} = \vec{r}(t + \Delta t) - \vec{r}(t)$$

$$v_{\text{máx}} = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}$$



O vector velocidade tem direcção tangente à trajectória.

$$\vec{v}(t) = v(t) \hat{e}_t(t)$$

6.1 De que modo é que conseguimos passar da velocidade média para a velocidade instantânea?

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} \Rightarrow \vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$$

6.2 Concluimos algo importantíssimo acerca do vector velocidade: é sempre tangente à trajectória, independentemente da forma da trajectória!

6.3 O sistema de coordenadas intrínseco é representado por dois versores:

$\hat{t}$ ou $\hat{e}_t$ tem direcção tangente à trajectória e aponta no sentido positivo

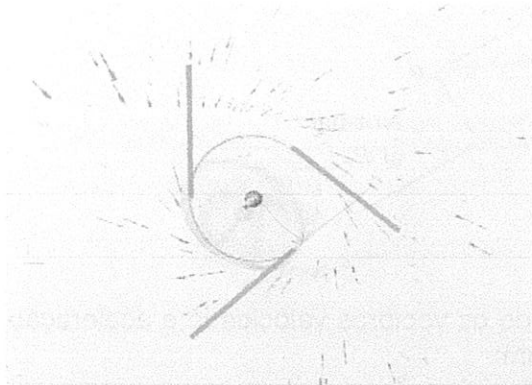
$\hat{n}$ ou $\hat{e}_n$ tem direcção perpendicular à trajectória e aponta para o centro da trajectória

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt} (v(t) \hat{e}_t(t)) \Rightarrow \vec{a} = \frac{dv(t)}{dt} \hat{e}_t(t) + \frac{d\hat{e}_t(t)}{dt} v(t)$$

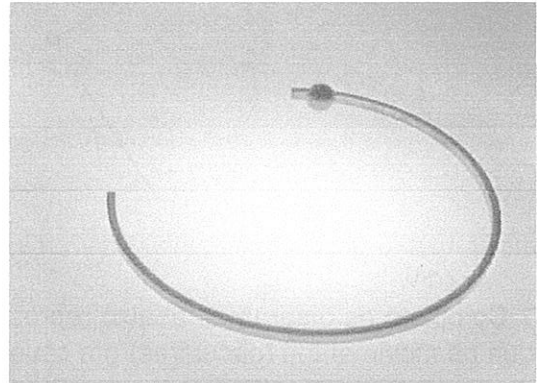
6.4 Usando o sistema de coordenadas intrínseco, o vector velocidade escreve-se de uma forma absolutamente geral e muito simples:

$$\vec{v}(t) = v(t) \hat{e}_t$$

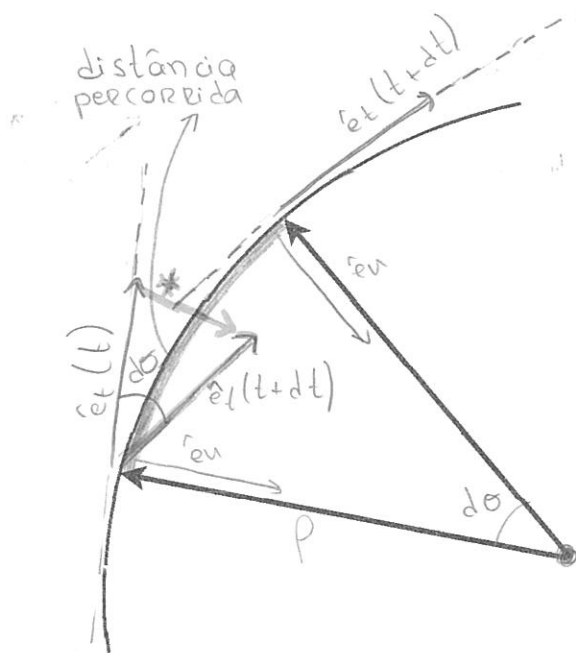
6.5 A velocidade é mesmo tangente à trajectória!



Efeito centrífugo

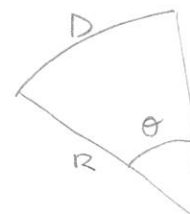


6.5 E a aceleração? Qual o problema que enfrentamos ao derivar a expressão acima em ordem ao tempo?



$$* = d\hat{e}_t(t)$$

Se uma linha é perpendicular a um lado e outra linha é perpendicular a outro lado, o ângulo formado pelos lados é igual ao ângulo formado pelas 2 linhas



$$\Delta = R \times \theta$$

$$d\hat{e}_t = d\theta \hat{e}_n = \frac{ds}{\rho} \hat{e}_n$$

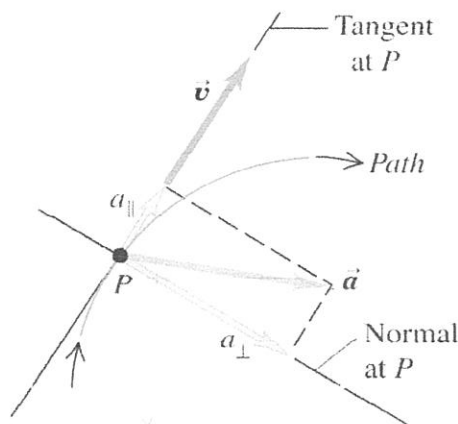
$$\vec{a} = \frac{dv(t)}{dt} \hat{e}_t(t) + \frac{v(t)^2}{\rho(t)} \hat{e}_n(t)$$

acel. tangencial

acel. normal

6.6 Repare na figura abaixo. Como podemos caracterizar este movimento, tendo em conta os vectores velocidade e aceleração representados? Movimento curvilíneo, não uniforme, se a perpendicular não existisse ele seria retilíneo

$a_{\perp}$ - centrípeta
 $a_{\parallel}$ - tangencial

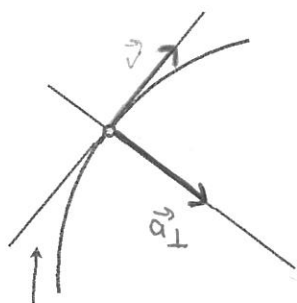


-2011

6.7 Complete os diagramas abaixo representando os vectores velocidade e aceleração por forma a que os movimentos (circulares) em causa sejam:

- movimento uniforme
- movimento acelerado
- movimento retardado

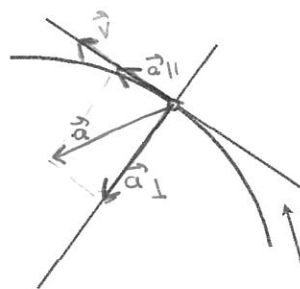
vector velocidade é sempre tang. à trajetória.



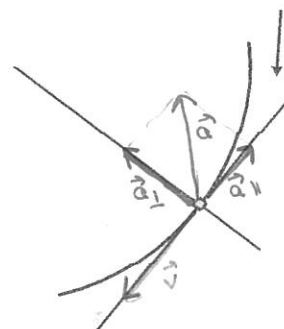
aceleração tangencial nula.

a)

mov. com velocidade de mag. constante



b)



c)

6.8 Andamos todos às voltas!

A Terra tem raio igual a 6380 km e executa uma rotação completa em 24 horas.

a) Qual é a aceleração centrípeta de um objecto no equador da Terra? Expresse a resposta em unidades de m/s^2 e de g .

b) Se a aceleração centrípeta no equador fosse maior do que g , os objectos seriam ejectados da Terra e voariam para o espaço. Qual deveria ser o período máximo de rotação da Terra para que isso acontecesse?

$$\vec{a} = \frac{dv}{dt} \hat{t} + \frac{v^2}{r} \hat{n}$$

v - magnitude do vector velocidade

$$\text{perímetro} = 2\pi R = 2\pi \cdot 6380$$

$$a_c = \frac{v^2}{R} = \frac{(2\pi)^2 R}{T^2}$$

$$R = 6,38 \times 10^6$$

$$T = 24h \times \frac{60 \text{ min}}{1h} \times \frac{60s}{1 \text{ min}} = 86400$$

$$a_c = 0,0377 \text{ m/s}^2 \times \frac{1g}{9,8 \text{ m/s}^2} = 0,04g$$

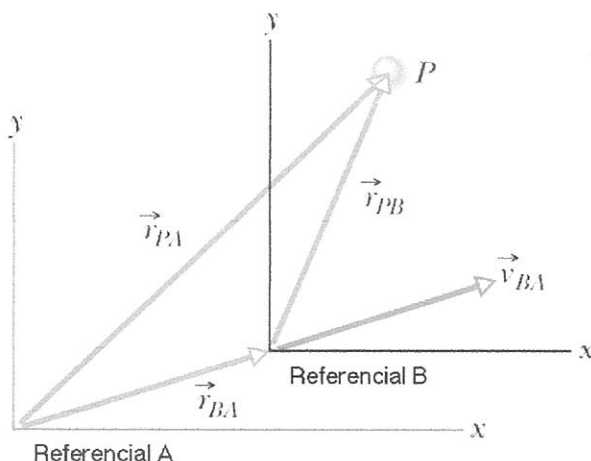
$$9,8 = \frac{(2\pi)^2 \cdot 6,38 \times 10^6}{T^2} \Rightarrow T = \sqrt{\frac{(2\pi)^2 \cdot 6,38 \times 10^6}{9,8}} = 5070 \text{ seg}$$

11

b)

7. Quando observamos e descrevemos um movimento, fazemo-lo sob o nosso ponto de vista. Aquilo que vemos e que descrevemos não é independente de estarmos nós próprios parados ou em movimento. Vejamos, com alguns exemplos, as implicações que isto tem.

7.1 Se quisermos descrever o movimento do ponto P em dois sistemas de referência, A e B, como escrevemos e como relacionamos os vectores posição, velocidade e aceleração nos dois referenciais?



Posição:

$$\vec{r}_{PA} = \vec{r}_{PB} + \vec{r}_{BA}$$

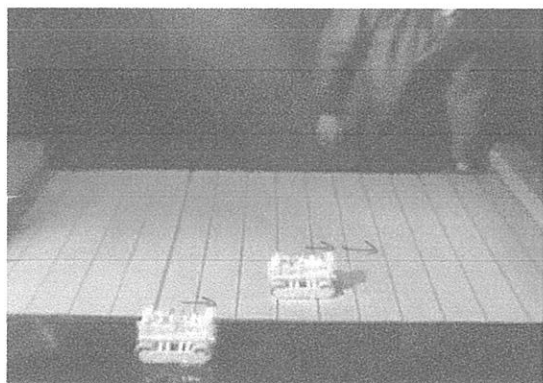
Velocidade:

$$\vec{v}_{PA} = \vec{v}_{PB} + \underbrace{\vec{v}_{BA}}_{\text{constante}}$$

Aceleração:

$$\vec{a}_{PA} = \vec{a}_{PB}$$

7.2 Vamos ao cinema! Ver dois buldozers :-)



$$\begin{aligned} \vec{v}_{B2H} &\rightarrow \\ \vec{v}_{B2P} &\rightarrow \quad \vec{v}_{PH} \rightarrow \\ \vec{v}_{B2H} &= \vec{v}_{B2P} + \vec{v}_{PH} \end{aligned}$$

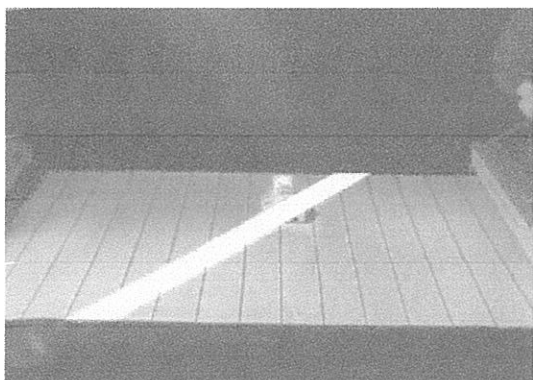
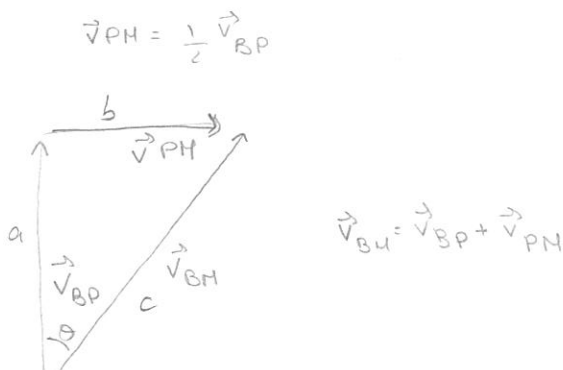
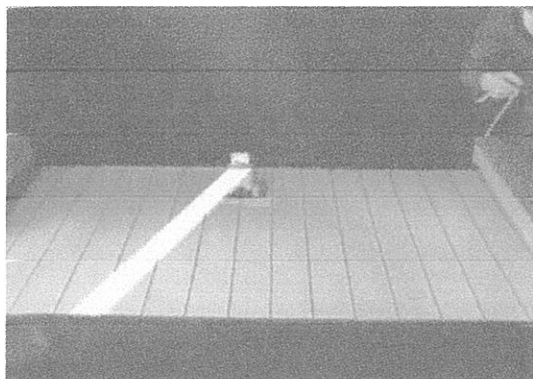
$$\begin{aligned} \vec{v}_{B2H} &\leftarrow \\ \vec{v}_{PH} &\rightarrow \quad \vec{v}_{B2H} \leftarrow \\ \vec{v}_{B2H} &= \vec{v}_{B2P} + \vec{v}_{PH} \end{aligned}$$

• NULO

Relativamente à mesa o B2 está parado, mas relativamente à passadeira não.

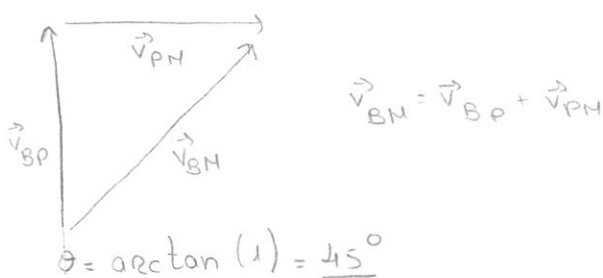
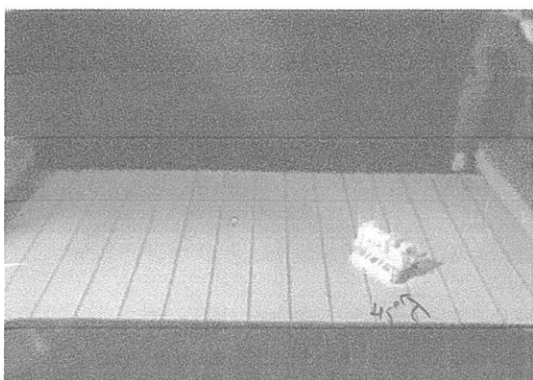
3-3-2011

7.3 Continuamos com a maquinaria pesada, a deslocar-se num plano (ou seja, a duas dimensões)



$$\theta = \arctan\left(\frac{\|\vec{v}_{PM}\|}{\|\vec{v}_{BP}\|}\right) = \arctan(0,5) = \underline{\underline{27^\circ}}$$

$\vec{v}_{PM} = \vec{v}_{BP}$



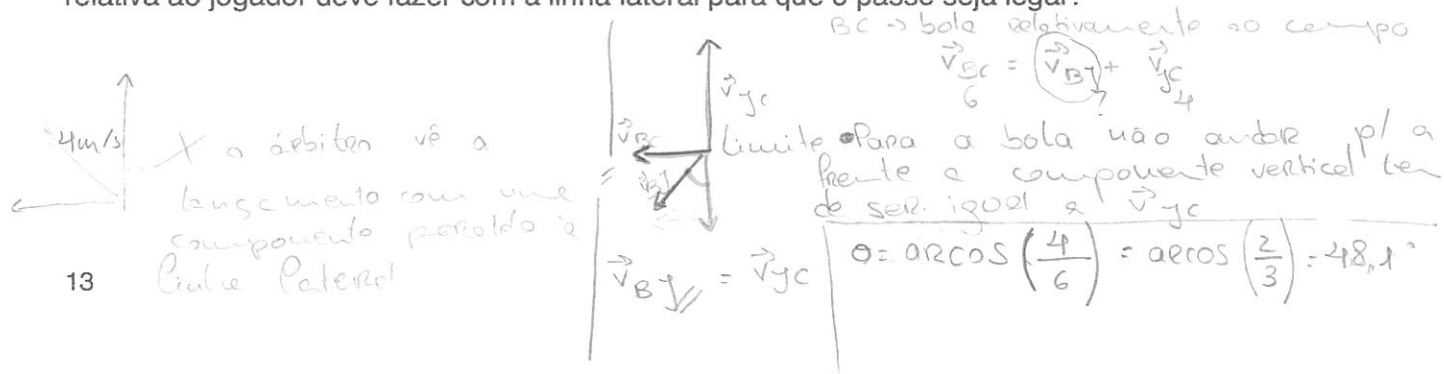
$\vec{v}_{BM} = \vec{v}_{BP} + \vec{v}_{PM}$

$\|\vec{v}_{PM}\| = \sin 45^\circ \times \|\vec{v}_{BP}\| = 0,7 \times \|\vec{v}_{BP}\|$

• a velocidade da passadeira tem de ser 7 décimos da velocidade de B.

7.3 Um problema com outro tipo de "buldozer"

No rugby, um jogador pode passar a bola legalmente a um colega desde que o passe não seja para a frente, ou seja, desde que a velocidade da bola não tenha uma componente paralela à linha lateral do campo e dirigida para a baliza adversária. Supondo que um jogador corre paralelamente à linha lateral com uma velocidade de 4,0 m/s e que passa a bola a um colega atirando-a com uma velocidade de 6,0 m/s, qual é o maior ângulo que a velocidade da bola relativa ao jogador deve fazer com a linha lateral para que o passe seja legal?



$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} \Leftrightarrow \int_{\vec{v}_0}^{\vec{v}(t)} d\vec{v} = \int_{t_0}^t \vec{a} dt$$

$$\vec{V}_0 = v_{0x} \hat{e}_x + v_{0y} \hat{e}_y$$

→ No campo gravítico, a aceleração no eixo do x é nula.

$$\vec{a} = -g \hat{e}_y$$

$$\left[\vec{v} \right]_{v_0}^{\vec{v}(t)} = -g \hat{e}_y [t]_{t_0}^t$$

$$\Leftrightarrow \vec{v}(t) - v_0 = -g(t - t_0) \hat{e}_y$$

$$\Leftrightarrow \vec{v}(t) = v_0 - g(t - t_0) \hat{e}_y$$

$$\Leftrightarrow \vec{v}(t) = v_{0x} \hat{e}_x + (v_{0y} - g(t - t_0)) \hat{e}_y$$

→ A componente vertical da velocidade é que varia consoante o tempo.

A horizontal mantém-se constante.

Ambos são independentes.

$$\begin{cases} v_x = v_{0x} \\ v_y = v_{0y} - gt \end{cases} \quad \text{lançamento projectil}$$

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} \Leftrightarrow \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}(t)} d\vec{r} = \int_{t_0}^t \vec{v}(t) dt$$

$$\vec{r}_0 = r_0 \hat{e}_x + y_0 \hat{e}_y$$

$$\Leftrightarrow \vec{r}(t) - \vec{r}_0 = \int_{t_0}^t v_{0x} \hat{e}_x + (v_{0y} - g(t - t_0)) \hat{e}_y dt$$

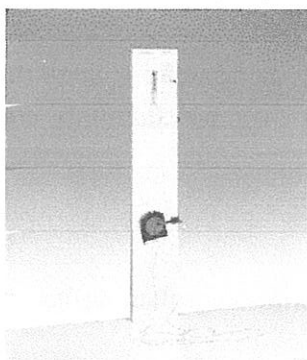
$$\Leftrightarrow \vec{r}(t) = \vec{r}_0 + [v_{0x} \hat{e}_x]_{t_0}^t + [v_{0y} \hat{e}_y]_{t_0}^t - \frac{g(t - t_0)^2}{2} \hat{e}_y$$

$$\vec{r}(t) = [r_0 + v_{0x}(t - t_0)] \hat{e}_x + [y_0 + v_{0y}(t - t_0) - \frac{g(t - t_0)^2}{2}] \hat{e}_y$$

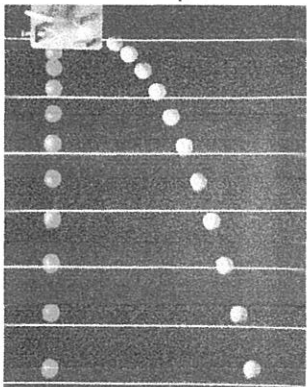
+ $\frac{g}{2} \dots$ (sem projectil)

8. Depois também há os projecteis. Mas... haverá algo de novo? Pode haver. Vectores e Integrais!

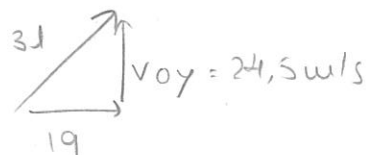
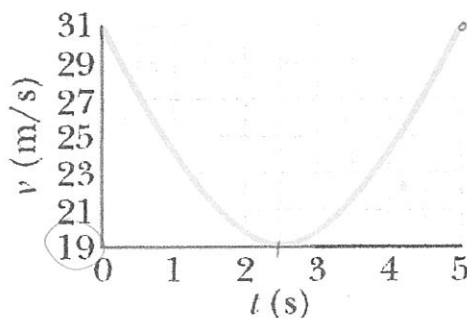
8.1 Tiro ao alvo ... infalível !



8.2 Ao mesmo tempo?



8.3 Hole-in-one! Um jogador de golfe dá uma tacada numa bola que estava parada no chão. O gráfico representa a norma do vector velocidade da bola em função do tempo, correspondendo o instante $t = 0$ s ao momento em que a bola é batida.



a) Qual a distância horizontal viajada pela bola até voltar a bater no chão?

$$\vec{r}(t) = [0 + v_{0x}(t)]\hat{e}_x + \dots$$

$$\vec{r}(5) = (19 \times 5)\hat{e}_x + \dots$$

b) Qual é a altura máxima acima do solo atingida pela bola?

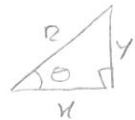
$$h = v_{0y} - gt$$

(Proxima quinta a le aula)

9. Hoje regressamos a casa em transporte público. Um comboio parte da estação e acelera até atingir a velocidade máxima, v_m , sujeito a uma aceleração que varia exponencialmente com o tempo (τ é uma constante):

$$a = \frac{v_m}{\tau} e^{-t/\tau}$$

Obtenha as equações da velocidade e da posição do comboio e represente-as graficamente.



$$\cos \theta = \frac{x}{R}$$

$$\sin \theta = \frac{y}{R}$$

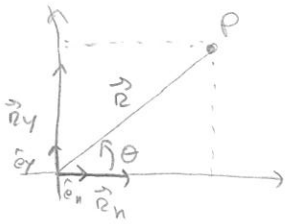
$$\vec{R} = \vec{R}_x + \vec{R}_y$$

$$\vec{R}_x = x \hat{e}_x$$

$$\vec{R}_y = y \hat{e}_y$$

Física para Informática 2010/2011

Ficha de Trabalho sobre Dinâmica do ponto material



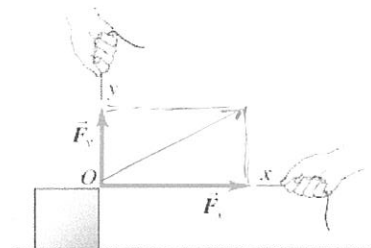
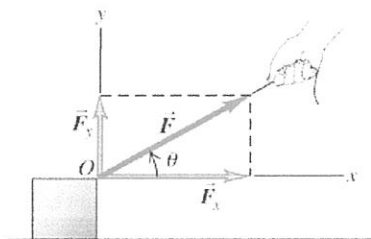
15-03-2011

1. A Dinâmica estuda e descreve o movimento atendendo às suas causas e com recurso a duas novas grandezas (para além das grandezas cinemáticas posição, velocidade e aceleração):

- Força: descrição quantitativa da interacção entre 2 corpos
- Massa: propriedade de um corpo

1.1 A Força é uma grandeza vectorial: possui magnitude, direcção e sentido. Às forças aplicam-se as operações com vectores: soma, subtracção, decomposição, produto escalar, produto vectorial.

1.2 Há alguma diferença (do ponto de vista da força resultante aplicada no bloco) entre estas duas situações? Não.



1.3 Unidade de Força: newton. Símbolo: N

1 newton é o valor da força que imprime a
1 corpo de massa
1 quilograma uma aceleração de
1 metro por segundo quadrado



1.4 Magnitudes típicas de algumas forças:

Atracção gravitacional da Terra pelo Sol	$3.5 \times 10^{22} \text{ N}$	Peso dos mais pequenos ovos de insecto	$2 \times 10^{-6} \text{ N}$
Space Shuttle durante a decolagem	$3.1 \times 10^7 \text{ N}$	Atracção eléctrica e-p num H	$8.2 \times 10^{-8} \text{ N}$
Peso de uma baleia azul	$1.9 \times 10^6 \text{ N}$	Peso de uma pequena bactéria	$1 \times 10^{-18} \text{ N}$
Força máxima de uma locomotiva	$8.9 \times 10^5 \text{ N}$	Peso do átomo de hidrogénio	$1.6 \times 10^{-26} \text{ N}$
Peso de uma pessoa de 100 kg	980 N	Peso de um electrão	$8.9 \times 10^{-30} \text{ N}$
Peso de uma maçã pequena	1 N	Interacção gravitacional e-p num H	$3.6 \times 10^{-47} \text{ N}$

$$F = m \times a$$

$$kg \quad m = \frac{1}{(9.8)}$$

$$m = 100 \text{ g}$$

1.5 Leis do Movimento: 3 Leis de Newton

- Leis fundamentais da natureza: não podem ser deduzidas nem provadas a partir de outros princípios

- Baseiam-se no estudo experimental do movimento dos corpos.

1.6 Lei 1

→ Se um corpo estiver sujeito a um conj. de forças nulas então mantém o seu estado de movimento

→ Esse estado só se altera se um conj. de forças não nulas actuar sobre ele.



Inércia: medida, qualitativa, da tendência de um corpo resistir a alterações do seu estado de movimento.

Referencial de inércia: aquele em que é válida a 1ª lei de Newton

1.7 Lei 2

A velocidade será cada vez maior.
Uma força cada vez maior,

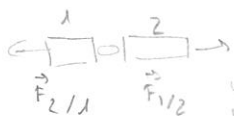
As forças são a causa, e a consequência é a aceleração.

$$\vec{a} = \frac{\sum \vec{F}}{m}$$



1.8 Lei 3

Ação / Reação



deslocar-se a mesma distância no mesmo Δt .

$$\vec{F}_{2/1} = -\vec{F}_{1/2}$$

Magnitudes iguais
Direção igual
Sentido diferente
Pontos de aplicações são diferentes, são aplicados em corpos diferentes



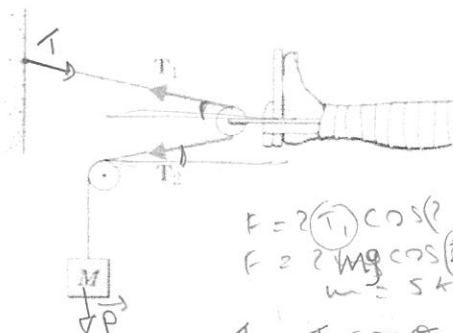
1.9 A figura mostra um sistema de tracção usado para exercer uma força na perna de um paciente que recupera de uma fractura. Se se pretender que a força exercida sobre a perna do paciente tenha magnitude igual a 92 N e as tensões T1 e T2 fizerem ambos ângulos de 20° com a horizontal, qual deve ser o valor da massa suspensa?

$P = T_1 = T_2$ porque o mov. está estático

Sobre a perna exerce a força:

$$\vec{F} = \vec{T}_1 + \vec{T}_2$$

$$F = T_1 \cos(2\theta) + T_2 \cos \theta$$



$$F = 2(T_1 \cos(2\theta))$$

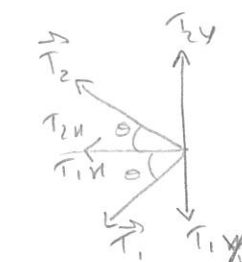
$$F = 2mg \cos(2\theta)$$

$$m = 5.48$$

$$T_{2y} = T_2 \sin \theta$$

$$T_{2x} = T_1 \cos \theta$$

$$T = P$$

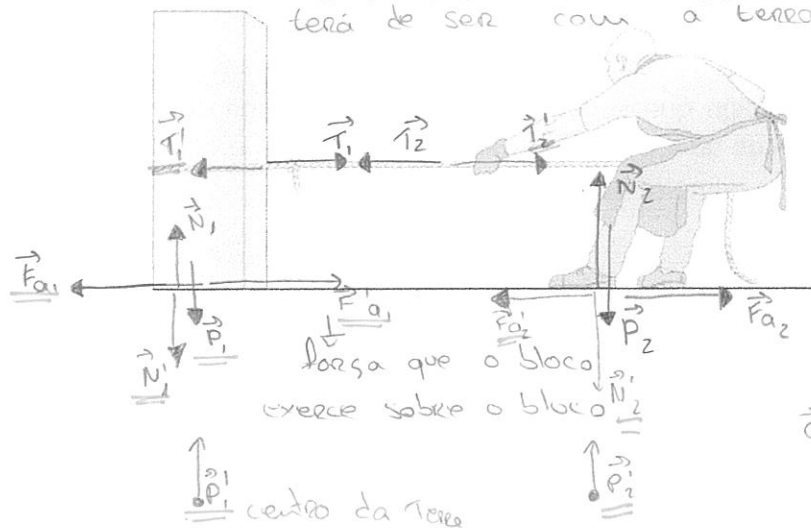


par de forças com a mesma magnitude
com a mesma direcção e sentido
diferentes, mesmos pontos de aplicação

17-03-2011

1.10 Representar as forças que actuam no bloco e no homem. Identificar os pares acção-reacção.

Se a Terra exerce $\vec{P}$ sobre o objecto, então a reacção
terá de ser com a Terra sobre o objecto

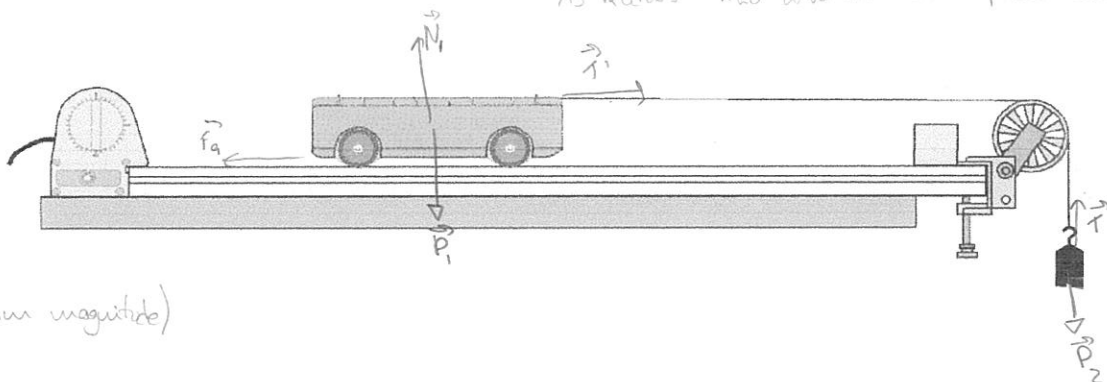


Não por AR as forças
actam sempre em
corpos diferentes.

$\vec{a} = \frac{\sum \vec{F}}{m}$ só forças que actuam
no mesmo corpo

2 Vamos estudar o movimento de um carrinho que se desloca em cima de uma calha. Na primeira fase do movimento, está sujeito a uma força que o acelera (um fio ligado a uma massa suspensa). Na segunda fase do movimento, após a massa tocar o chão, deixa de haver uma força (transmitida através do fio) a acelerar o carrinho.

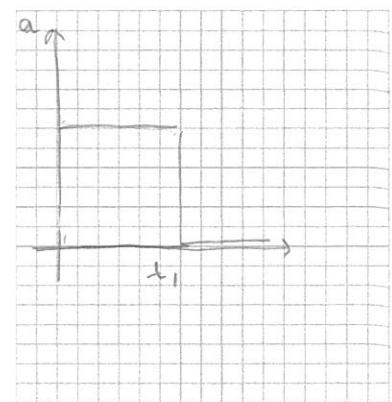
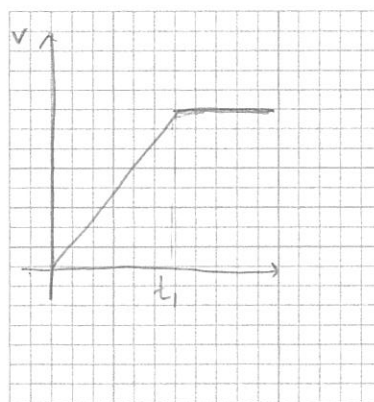
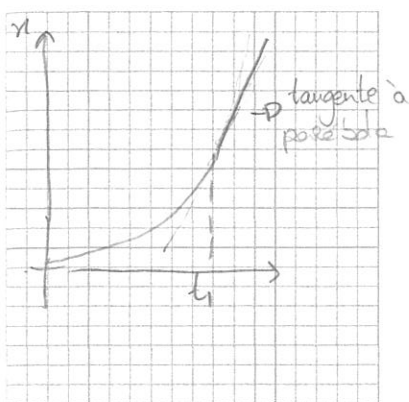
As rodas não anulam completamente o atrito.



$T' = T$ (mesma magnitude)

2.1 Represente as forças que actuam no carrinho e na massa suspensa.

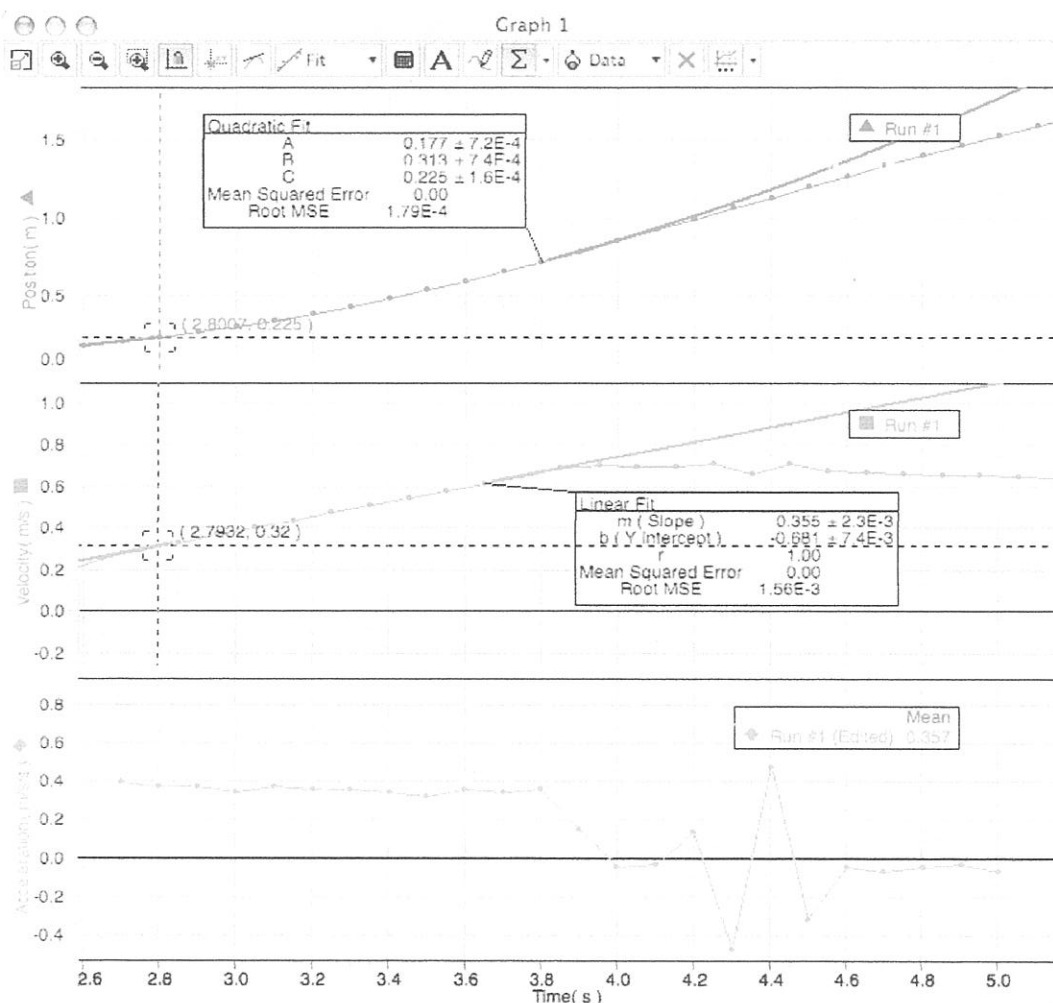
2.2 Faça um gráfico em que represente qualitativamente, para as duas fases do movimento, a posição, noutro gráfico a velocidade e no terceiro a aceleração do carrinho.



$$\|\vec{r}_0\| = N_R \|\vec{N}\|$$

2.3 Observando o movimento com um sensor de distância (sonar), o programa de aquisição de dados constrói os gráficos de posição (a origem é o próprio sensor), velocidade e aceleração em função do tempo.

1ª fase do movimento. O gráfico que segue é um exemplo de uma aquisição de dados desta situação em que já foram feitos os ajustes da posição e velocidade e calculado o valor médio da aceleração correspondentes à primeira fase do movimento.

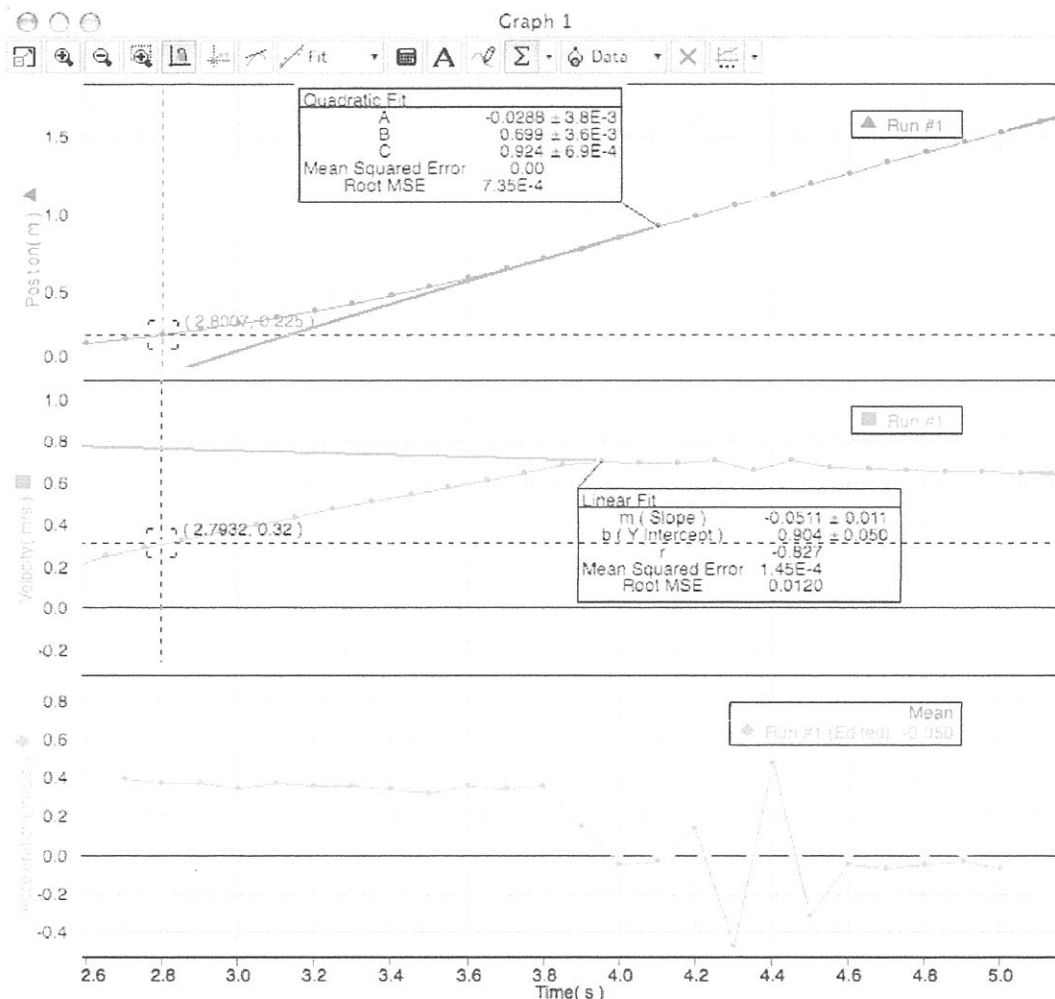


2.4 De forma idêntica à realizada anteriormente com o robot e o carrinho telecomandado, podemos confirmar as relações entre posição, velocidade e aceleração. Nota: o ajuste quadrático da posição é do tipo At^2+Bt+C e os parâmetros B e C representam a velocidade e a posição, respectivamente, no primeiro ponto usado no ajuste.

2.5 2ª fase do movimento. Quando a massa suspensa tocou no chão, deixou de haver uma força a puxar o carrinho. Como a reação normal (força exercida pela calha sobre as rodas do carrinho) compensa o peso do carrinho, a resultante das forças seria zero se não houvesse atrito.

2.6 Se não houvesse atrito, a aceleração seria zero, a velocidade constante e a posição variaria linearmente com o tempo. O gráfico da velocidade seria uma recta horizontal e o da posição uma recta de declive igual à velocidade.

2.7 O gráfico seguinte contém os ajustes à posição e velocidade e a média da aceleração na segunda fase do movimento.



2.8 Como é impossível evitar o atrito (neste caso, de rolamento), a aceleração é ligeiramente negativa: $-0,050 \text{ m/s}^2$. Podemos calcular o coeficiente de atrito de rolamento: quanto vale?

$$\|\vec{F}_a\| = \mu_R \|\vec{N}\|$$

$$F_a = \mu_R mg$$

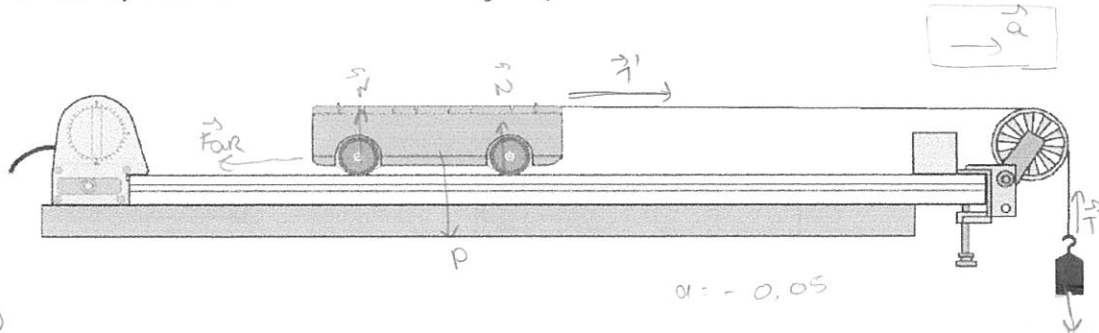
$$a = \frac{F_a}{m} = \frac{\mu_R mg}{m}$$

$$\mu_R = \frac{0.05}{9.8} = \underline{\underline{0.0051}}$$

2.9 A velocidade diminui lentamente: o declive da recta $v(t)$ é igual a $-0,051 \text{ m/s}^2$, igual à aceleração.

2.10 A representação gráfica da posição quase não se distingue de uma recta. Na realidade, é uma parábola, de concavidade virada para baixo, em que o coeficiente do termo t^2 ($A = 0,029 \pm 0,004 \text{ m/s}^2$) é igual a metade da aceleração.

2.11 Agora que já sabemos quanto vale a força de atrito de rolamento entre o carrinho e a calha, podemos calcular a força que o fio exerce sobre o carrinho na primeira fase do movimento. Para ajudar, vamos representar novamente as forças que actuam no carrinho:



$$m_c = 488g$$

$$\mu = 0,05$$

Para a eq. escrever, ter atenção ao sentido dos vetores.

$$\vec{a} = \frac{\sum \vec{F}}{m} \quad \Leftrightarrow \quad m\vec{a} = \vec{T}' + \vec{F}_{ar} \quad \Leftrightarrow \quad m\vec{a} = T' - F_{ar}$$

$$m\vec{a} \cdot \hat{e}_n = \vec{T}' \cdot \hat{e}_n + \vec{F}_{ar} \cdot \hat{e}_n$$

→ como os vetores são perpendiculares o seu produto escalar é igual a 0, $T' - F_{ar}$

$$ma = T' - F_{ar}$$

$$\Leftrightarrow T' = ma + F_{ar} \quad \Leftrightarrow T' = ma + \mu_R (mg) \quad \Leftrightarrow T' = m(a + \mu_R g)$$

$$\Leftrightarrow T' = 488(0,05 + 0,0051) = \underline{\underline{0,199N}}$$

2.12 Talvez fosse mais fácil pesar a massa suspensa... mas como só o que dá luta é que dá gozo, vamos determinar o valor da massa suspensa. Temos todos os dados necessários!

$$\vec{a} = \frac{\sum \vec{F}}{m} \quad \Leftrightarrow \quad m\vec{a} = \vec{T} + \vec{P} \quad \Leftrightarrow \quad -ma = 0,199 - mg \quad \Leftrightarrow \quad -ma + mg = 0,199 \quad \Leftrightarrow$$

$$m(a + g) = 0,199 \quad \Leftrightarrow \quad m = \frac{0,199}{-0,05 + 9,8} = 0,0204 \text{ kg}$$

22-03-2011

3. Qualquer objecto está, por norma, em contacto com outros objectos, seja o suporte no qual assenta ou o fluido (ar ou líquido) no qual está imerso. Quando esse objecto está em movimento, a sua superfície de contacto com os outros objectos também se desloca. À força que surge entre as superfícies em contacto e que se opõe ao movimento chama-se **atrito**.

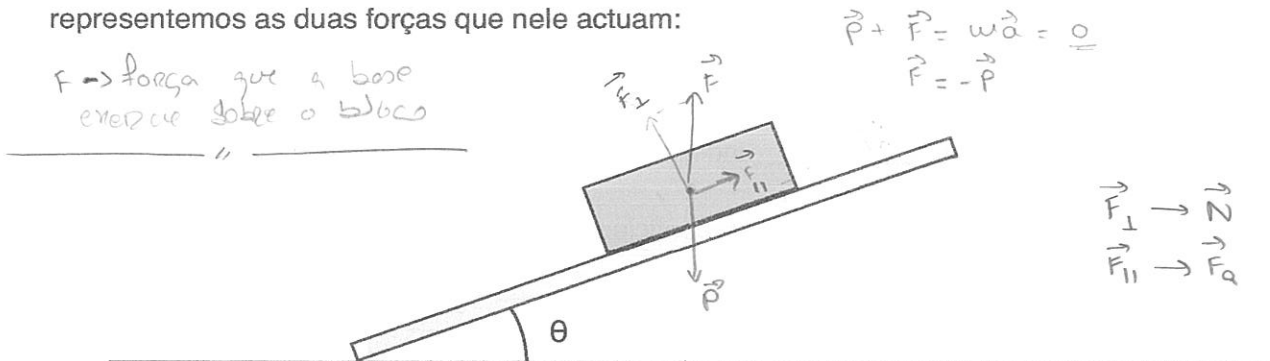
3.1 Vamos analisar as forças de atrito entre sólidos. Estas forças classificam-se em 3 tipos:

- atrito **estático**: não há movimento relativo entre as superfícies, mas existiria se não houvesse atrito
- atrito **cinético**: surge entre duas superfícies que deslizam uma relativamente à outra
- atrito de **rolamento**: ocorre quando um corpo rola sobre outro

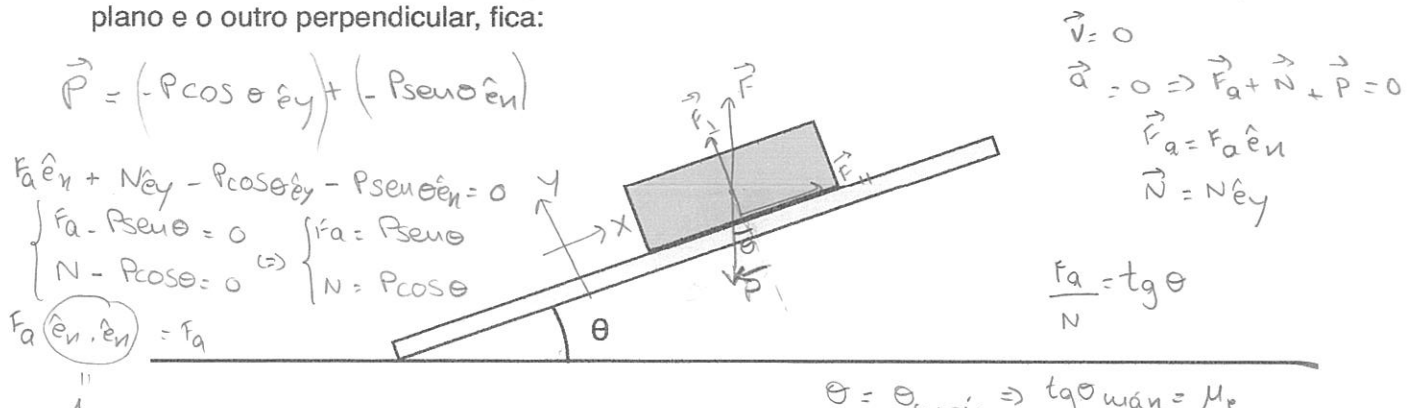
3.2 Vejamos um bloco que se desloca em cima da mesa. A força mínima necessária para colocar o bloco em andamento é igual a _____ N. Deste modo, a força de atrito estático máxima entre o bloco e a mesa é igual a _____ N.

3.3 Quando o bloco entra em andamento, a força mínima necessária para o manter em andamento diminui. Isto significa que a força de atrito, agora chamado cinético, diminuiu. Vale agora _____ N, pelo que o coeficiente de atrito cinético entre o bloco e a mesa é igual a _____

3.4 Consideremos agora um bloco, parado, assente num plano inclinado de um ângulo θ e representemos as duas forças que nele actuam:



3.5 Decompondo as duas forças segundo um sistema de eixos em que um dos eixos é paralelo ao plano e o outro perpendicular, fica:



$\theta = \theta_{\text{máx}} \Rightarrow \tan \theta_{\text{máx}} = \mu_e$
 acima deste ângulo o corpo entra em movimento

3.6 Por que nome são, normalmente, conhecidas essas forças?

$F_c + P = m a$
 $w^2 R + m g = m c$
 $F_a = F_c + P$



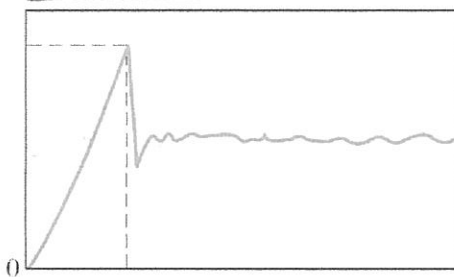
$\frac{v^2}{R}$
 $\frac{w^2 R}{g}$

3.7 Se aumentarmos o ângulo θ , existirá um ângulo crítico para o qual o bloco começará a escorregar. A razão entre as componentes tangencial e normal da força que o plano exerce sobre o bloco é igual a:

$$\frac{F_a}{N} = \tan \theta$$

3.8 A tangente do ângulo crítico é o coeficiente de atrito

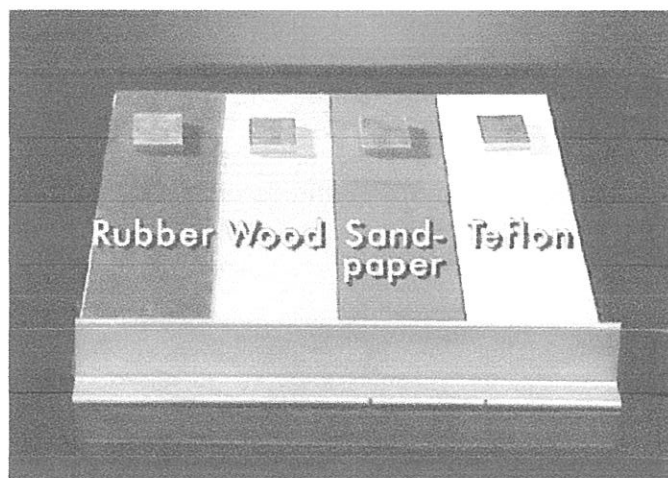
3.9 A força de atrito entre dois corpos sólidos depende das circunstâncias: se houver movimento relativo entre as superfícies de contacto, o atrito é dito cinético. Caso contrário, o atrito, se existir, é estático. O atrito estático não tem sempre o mesmo valor: varia entre o mínimo (zero) e o máximo que é representado pelo coeficiente de atrito estático.



3.10 A força de atrito é directamente proporcional ao peso do objecto em movimento.

3.11 A força de atrito é aproximadamente independente da área das superfícies em contacto

3.12 Vejamos um filme que mostra como o coeficiente de atrito depende da natureza das superfícies em contacto.



1,19	0,40	0,47	0,32
50°	22°	25°	18°

3.13 Problema 1. Um bloco de latão com 200 g está assente sobre uma superfície de madeira que faz um ângulo de 15° com a horizontal. Qual a magnitude da força de atrito que actua sobre o bloco de latão?

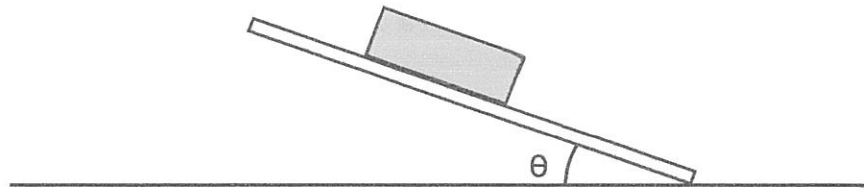
$$F_a = 0,51$$

$$N = 1,89 \text{ N}$$

$$F_a = P \sin \theta = 0,2 \times 9,8 \times \sin 15^\circ$$

$$N = P \cos \theta = 0,2 \times 9,8 \times \cos 15^\circ$$

24-03-2011



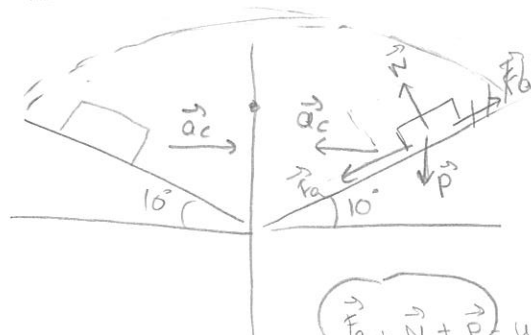
3.14 Problema 2. Um automóvel de 1362 kg de massa desloca-se a 87 km/h ao longo de uma curva com 152 m de raio. Sabendo que a estrada tem 10° de inclinação, determine a força de atrito e a força normal de reacção que a estrada exerce sobre os pneus.

força centrípeta é uma força resultante

$$\begin{cases} X & -N \sin \theta + F_a \cos \theta = -m \frac{v^2}{R} \\ Y & N \cos \theta + F_a \sin \theta - P = 0 \end{cases}$$

$$N = 14054 \text{ N}$$

$$F_a = -2836 \text{ N}$$



$$a_c = \frac{v^2}{R}$$

$$\vec{F}_a + \vec{N} + \vec{P} = m \vec{a} = m a_t \hat{t} + m a_c \hat{n}$$

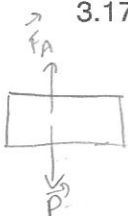
causa consequência

3.15 E o rolamento?

Quando uma superfície rola sobre outra, sem deslizamento, o contacto entre as superfícies origina forças que dificultam o movimento e causam perda de energia. A essas forças chama-se, genericamente, atrito de rolamento.

3.16 O que se passa quando um corpo sólido se desloca dentro de um fluido, como o ar ou a água? Também existe atrito! Sobre o corpo actua uma força de atrito, também conhecida como força de arrasto, de sentido oposto ao do movimento e que depende da velocidade a que o corpo se desloca.

3.17 A altas velocidades: a força de atrito é proporcional ao quadrado da velocidade:



$$F_a = \frac{1}{2} C A \rho v^2$$

$\rho = \text{densidade}$

3.18 A baixas velocidades: a força de atrito é proporcional à velocidade:

$$F_a = b \eta v$$

↓
viscosidade do meio

9 Esfera: $b = 6\pi R$
↓
constante geométrica

Para o caso especial de uma esfera de raio R a constante b é igual a $6\pi R$

3.19 Como a força de atrito aumenta com a velocidade, parece que pode aumentar indefinidamente... será?

Vejam os o que se passa com um corpo em queda livre no ar. A força de atrito aumenta à medida que a velocidade de queda aumenta. Mas a velocidade só aumenta enquanto a resultante das forças for diferente de zero:

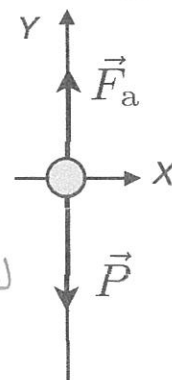
$$\vec{P} + \vec{F}_A = m\vec{a}$$

Quando a velocidade tiver um valor suficientemente grande para que a F_a tenha a mesma magnitude do peso:

$$a = 0 \Rightarrow P = F_a$$

$$mg = \frac{1}{2} C_A \rho v_T^2 \Rightarrow v_T = \sqrt{\frac{2mg}{C_A \rho}}$$

Quanto maior a dimensão, maior será a v_T terminal



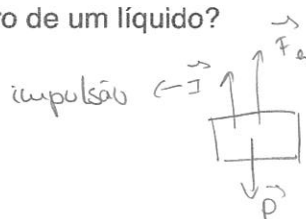
3.20 Velocidades terminais:

Objecto	Massa / kg	Área / m ²	Y_0 / m	v_T / (m/s)	v_T / (km/h)
Gota de chuva	4×10^{-6}	3×10^{-6}	21	65	232
Granizo	4×10^{-3}	3×10^{-4}	21	20	72
Águia	20	25	130	51	184
Homem	75	6	200	63	224

3.21 E no caso de um objecto (pequeno) a cair dentro de um líquido?

lento: $F_a = b\eta v$

rápido: $F_a = \frac{1}{2} C_A \rho v^2$



$$\vec{I} + \vec{F}_A + \vec{P} = m\vec{a}$$

$$m\eta g + b\eta v_T + mg = 0 \Rightarrow v_T = \frac{(m - m\eta)g}{b\eta}$$

$$-m\eta g - b\eta + mg = m \frac{dv}{dt} \Rightarrow \frac{dv}{dt} = -\frac{b\eta}{m} \left(v - \frac{(m - m\eta)g}{b\eta} \right) = -\frac{b\eta}{m} (v - v_T)$$

$$\Leftrightarrow \frac{dv}{v - v_T} = -\frac{b\eta}{m} dt \Rightarrow \int_{v - v_T}^v \frac{dv}{v - v_T} = -\frac{b\eta}{m} \int dt \Rightarrow \left[\ln(v - v_T) \right]_0^v = -\frac{b\eta}{m} [t]_0^t$$

$$\Leftrightarrow \ln(v - v_T) - \ln(-v_T) = -\frac{b\eta}{m} t \Rightarrow \ln\left(\frac{v - v_T}{-v_T}\right) = -\frac{b\eta}{m} t \Rightarrow \ln\left(\frac{v_T - v}{v_T}\right) = -\frac{b\eta}{m} t$$

$$\Rightarrow \frac{v_T - v}{v_T} = e^{-\frac{bv_T}{m} t}$$

$$\Rightarrow v = v_T \left(1 - e^{-\frac{bv_T}{m} t}\right)$$

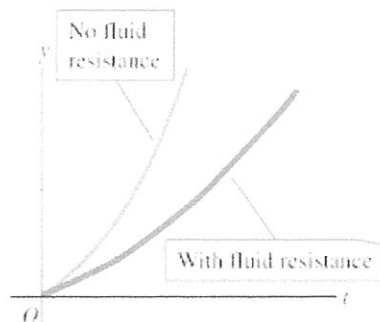
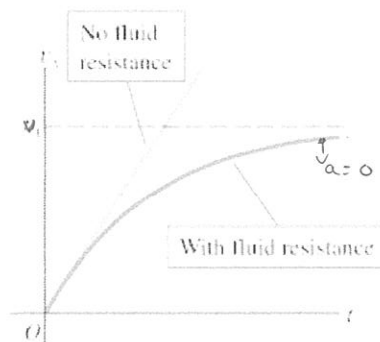
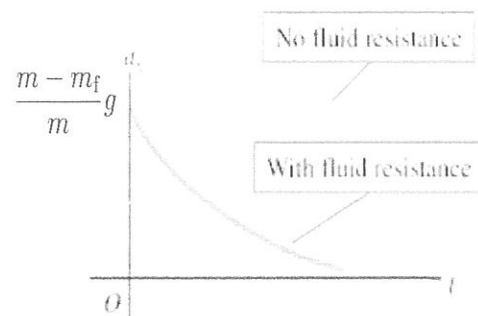
$t = 0 \Rightarrow v = 0$
 $t \rightarrow \infty \Rightarrow v = v_T$

por derivação

$$a = \frac{m - m_T}{m} g e^{-\frac{bv_T}{m} t}$$

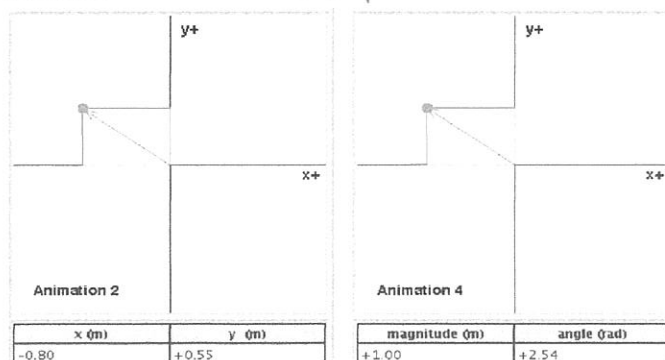
permutação

$$y = v_T \left[t - \frac{m}{bv_T} \left(1 - e^{-\frac{bv_T}{m} t}\right) \right]$$



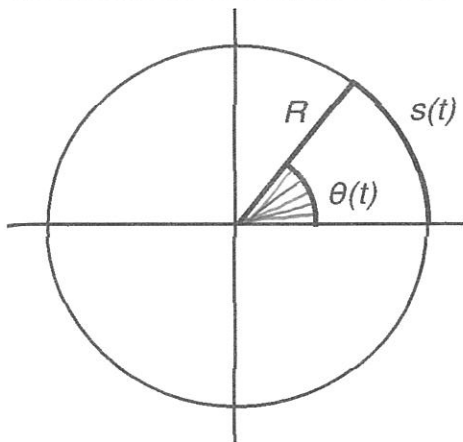
4. Estivemos a analisar movimentos rectilíneos. Vamos agora estudar o movimento circular.

4.1 Como descrever a posição de um ponto material, ou de um ponto de um corpo rígido, que efectua um movimento circular? *coordenadas polares*



http://pessoa.fct.unl.pt/jcs/Physlets/contents/mechanics/rotations/illustration10_1.html

4.2 Movimento circular em coordenadas angulares (polares)



$$\underbrace{s(t)}_{\text{espaço percorrido}} = \underbrace{\theta(t)R}_{\text{deslocamento angular}}$$

Velocidade linear

$$v(t) = \frac{ds(t)}{dt}$$

Velocidade angular

$$\omega(t) = \frac{d\theta(t)}{dt}$$

$$v(t) = \omega(t)R$$

Aceleração tangencial

$$a_t(t) = \frac{dv(t)}{dt}$$

Aceleração angular

$$\alpha(t) = \frac{d\omega(t)}{dt}$$

a constante

$$v = v_0 + at$$

$$x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2$$

$$v^2 = v_0^2 + 2a(x - x_0)$$

alpha constante

$$\omega = \omega_0 + \alpha t$$

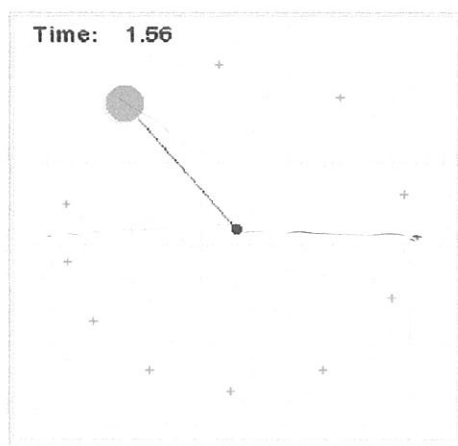
$$\omega R = \omega_0 R + \alpha R t$$

$$\theta = \theta_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2$$

$$\omega^2 = \omega_0^2 + 2\alpha(\theta - \theta_0)$$

$$a(t) = \alpha(t)R$$

4.3 Movimento de rotação com aceleração angular constante



set values and play resume pause step>> reset

$\theta = 3 + 2 * t + 0.5 * t^2$ (θ is in radians)

http://pessoa.fct.unl.pt/jcs/Physlets/contents/mechanics/rotations/ex10_2.html

Questão: Para $\theta_0 = 3,0$ rad, $\omega_0 = 2,0$ rad/s e $\alpha = -3,0$ rad/s², ao fim de quanto tempo é que o ponto vermelho passa na origem?

$t = 2,23$ seg.

$$0 = \theta_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2$$

$$2\pi = 3 + 2t - \frac{3}{2}t^2$$

4.4 É conveniente definir os vectores velocidade angular e aceleração angular:

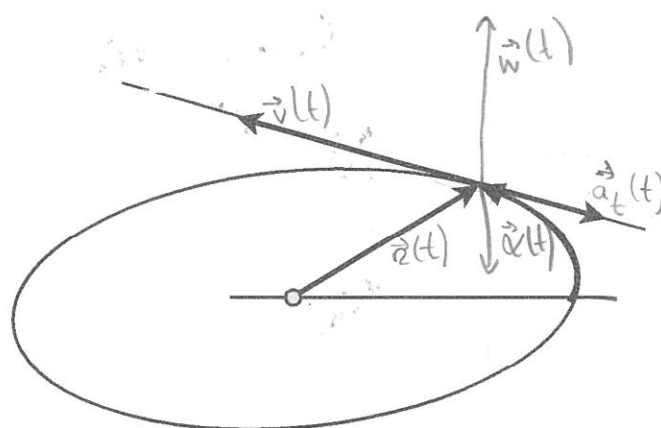
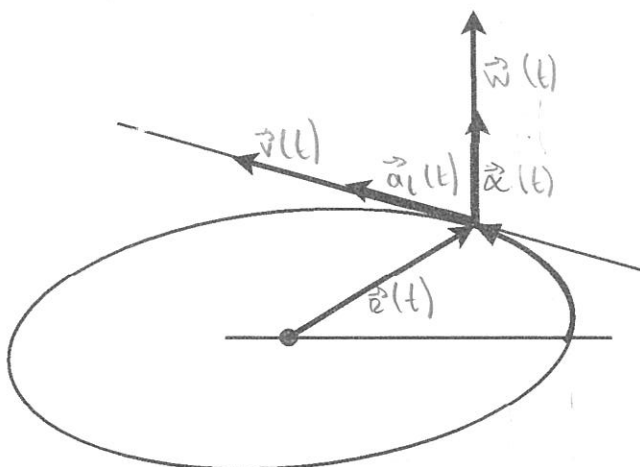
$$\vec{\omega}(t) \quad \vec{\alpha}(t) \quad \left. \vphantom{\begin{matrix} \vec{\omega}(t) \\ \vec{\alpha}(t) \end{matrix}} \right\} \text{ São vectores perpendiculares ao plano da trajectória}$$

São vectores perpendiculares ao plano da trajectória, tais que:

$$\vec{v}(t) = \vec{\omega}(t) \times \vec{r}(t) \quad \vec{a}_t(t) = \vec{\alpha}(t) \times \vec{r}(t)$$

$$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$$

$$c = a \times b \times \sin \theta$$



4.5 Já vimos como podemos expressar, num movimento circular, a aceleração em função dos versores tangente e normal à trajectória:

$$\vec{a} = \frac{dv}{dt} \hat{t} + \frac{v^2}{r} \hat{n}$$

4.6 Quando um corpo está sujeito a uma ou mais forças de modo a descrever uma trajectória circular, podemos decompor a resultante das forças nas suas componentes tangencial e normal à trajectória:

$$\sum \vec{F} = m\vec{a} = \left(m \frac{dv}{dt} \right) \hat{t} + \left(m \frac{v^2}{r} \right) \hat{n}$$

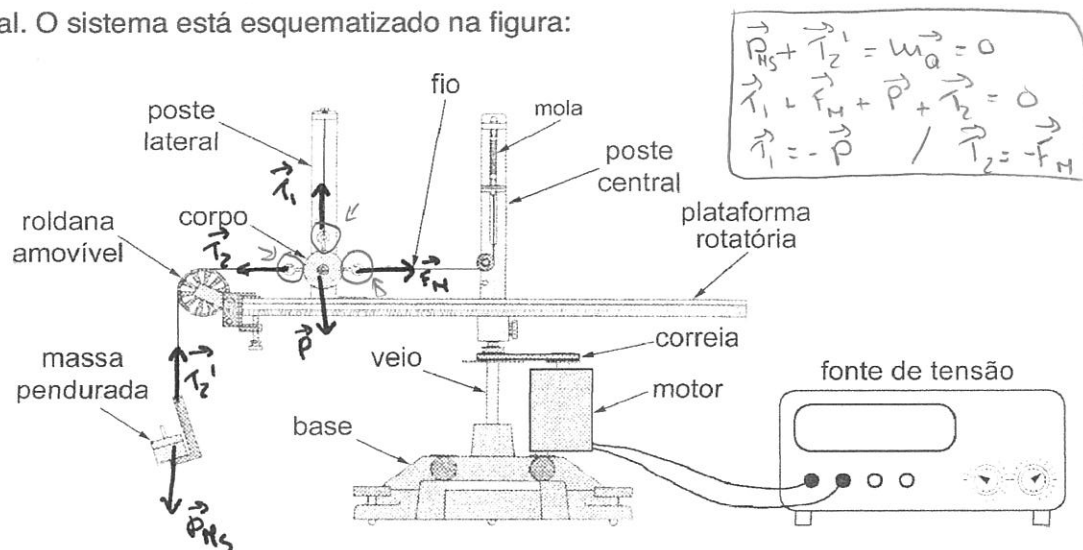
4.7 A componente normal à trajectória aponta para o centro da trajectória. Por isso, também se chama força centrípeta

4.8 A força centrípeta é :

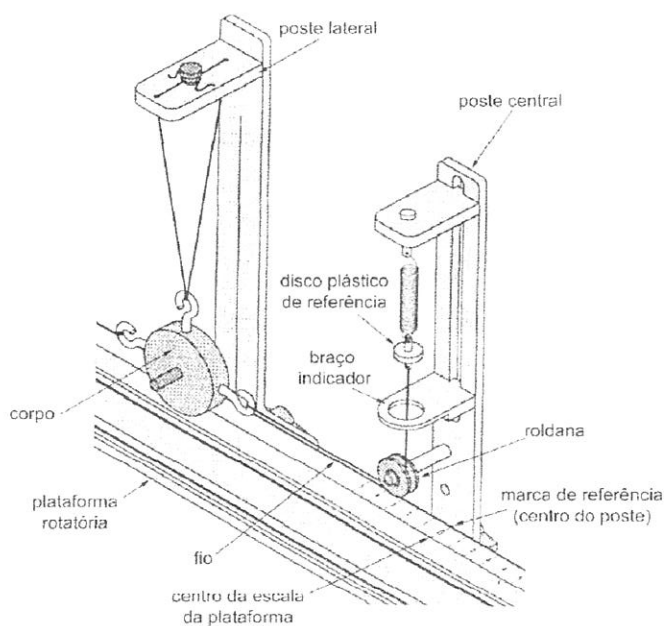
- uma força directamente aplicada. Por quem? _____
- uma força resultante.

aceleração é a consequência

4.9 Vamos agora usar um sistema experimental muito interessante e engenhoso que nos permite estudar o movimento circular e medir a força centrípeta a que um corpo está sujeito durante um movimento circular, sem realmente a medir. Depois poderemos comparar a velocidade angular do corpo medida na experiência com a prevista pela 2ª lei de Newton aplicada ao movimento rotacional. O sistema está esquematizado na figura:



4.10 Primeira tarefa: na situação representada acima, marcar as forças aplicadas no corpo. Na imagem da página seguinte temos uma vista ampliada e em perspectiva da zona central:



Neste esquema vemos que, junto à base da mola, existe um disco plástico de referência. O braço indicador é ajustável em altura: deve ser deslocado por modo a fazer coincidir o disco plástico de referência com a abertura no braço indicador.

4.11 Como o corpo se encontra em equilíbrio, a resultante das forças que actuam nele tem de ser nula. Isto permite-nos saber quanto vale a força exercida pela mola sobre o corpo: