4.12 Agora vamos retirar a massa pendurada. O corpo adopta uma nova posição de modo a voltar a estar em equilíbrio (resultante das forças nula).

$\vec{T}_1' = \vec{T}_{1x}' + \vec{T}_{1y}'$ $\qquad \vec{F}_H' < \vec{F}_H \qquad T_1' > T_1 \qquad \boxed{\vec{T}_{1x}' + \vec{F}_H' = 0}$

4.13 *O nosso objecto é estudar o movimento circular, mas até agora tem estado tudo muito* parado… Vamos, com a ajuda do motor e da fonte de alimentação, colocar o corpo em rotação.

4.14 Ajustemos a velocidade de rotação da plataforma (e, portanto, do corpo) de modo a que o disco plástico de referência volte a estar alinhado com o braço indicador.

4.15 Nesta posição, acontecem duas coisas importantes:

- o fio que suporta o corpo está novamente na posição vertical e o centro de massa do corpo descreve uma trajectória circular com um raio igual à distância do centro do poste lateral ao eixo de rotação;
- a força que a mola está a exercer sobre o corpo é a mesma que na situação estática pois *o alongamento da mola é o mesmo.*

4.16 Vamos escrever a 2ª lei de Newton para esta situação, considerando apenas as forças (ou componentes de forças) no plano horizontal:

$\vec{T}_1 + \vec{F}_M + \vec{P} = \underline{m\vec{a}}$ $\qquad$ Só temos componente centripeta.

$|\vec{F}_M| = \frac{mv^2}{R} \Rightarrow \vec{F}_M = \frac{mv^2}{R}\hat{n}$ $\qquad \vec{F}_M = \vec{P}_{MS}$

4.17 Deste modo podemos expressar a velocidade angular prevista em função das massas dos corpos e do raio da trajectória circular:

$\boxed{v = wR}$

$F_M = m w^2 R$

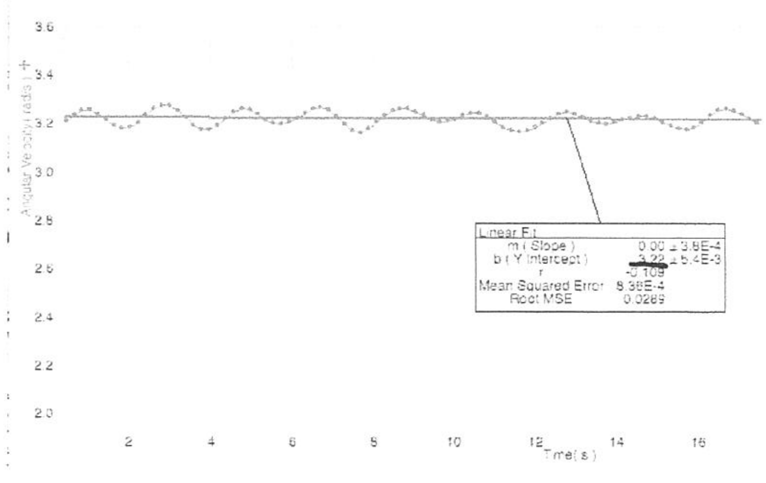
$w = \sqrt{\frac{P_{MS}}{mR}}$

$w = \sqrt{\frac{26{,}8 \times 9{,}8}{0.12 \times 210}} = 3{,}23$

$\boxed{W_{exp} = 3{,}22 \text{ rad/s}}$

4.18 A imagem seguinte corresponde a uma determinação da velocidade angular da plataforma para um raio de trajectória de 12,0 cm, um corpo de massa 210,0 g e uma massa pendurada de 26,8 g:

oscilação → desequilíbrio na plataforma



$F_A = \frac{1}{2} C A$

29-03-2011

4.19 Na experiência obtemos o seguinte valor médio para a velocidade angular: 3,22

Teoricamente, esperávamos obter a seguinte velocidade angular: 3,23

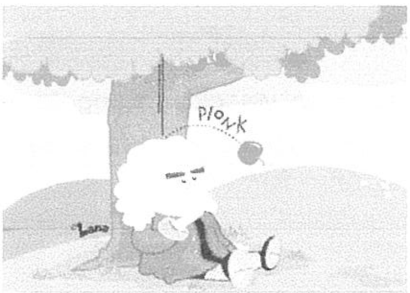
4.20 Podemos finalmente dizer que a experiência comprovou a segunda lei de Newton aplicada ao movimento rotacional?

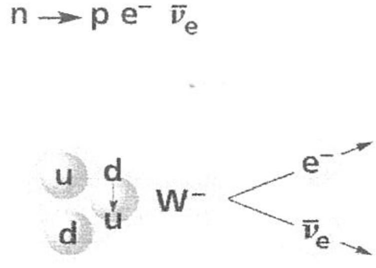
4.21 Fizemos a comparação entre o valor previsto e o valor experimental da velocidade angular. Também podíamos ter comparado a força centrípeta prevista (que é igual ao peso de massa pendurada) com a medida na experiência:

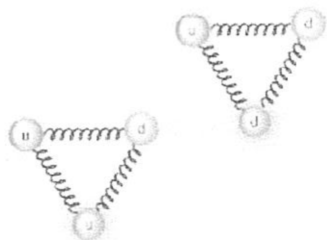
4.22 Os aviões conseguem voar devido à força de sustentação exercida pelo ar que é perpendicular ao plano das asas. Um pequeno avião que voa à velocidade de 240 km/h pretende efectuar uma curva de raio 1200 m num plano horizontal. A que ângulo com a horizontal deve o piloto inclinar o avião?

5. As forças fundamentais da natureza

gravitacional e electromagnética







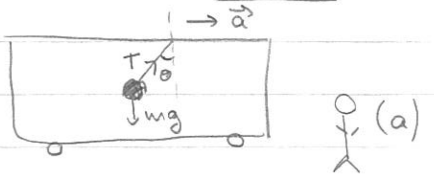
força nuclear fraca e forte

31-03-2011

FORÇAS FICTÍCIAS EM SISTEMAS LINEARES

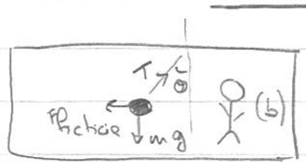
O observador inercial (a) vê:

$$\sum F_x = T\sin\theta = ma$$
$$\sum F_y = T\cos\theta - mg = 0$$

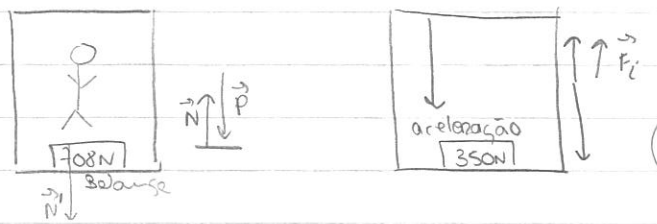


O observador não inercial (b) vê:

$$\sum F'_x = T\sin\theta - F_{\text{fictícia}} = 0$$
$$\sum F'_y = T\cos\theta - mg = 0$$



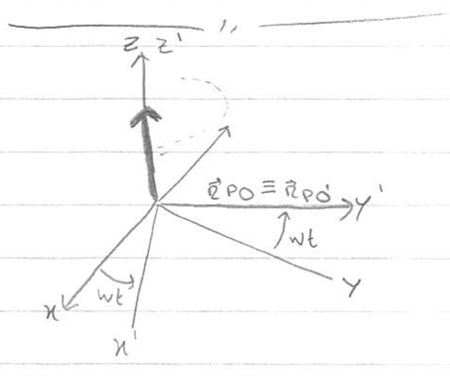
MOVIMENTO RELATIVO DE TRANSLAÇÃO NÃO UNIFORME

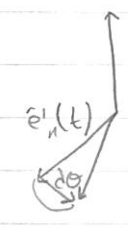


$$\vec{P} + \vec{N} + \vec{F}_i = 0$$

Num referencial inercial: $\vec{P} + \vec{N} = \boxed{m\vec{a}}$

$$N = P - ma$$





$$\|d\hat{e}'_x\| = d\theta = \omega\, dt$$

$$\frac{d\hat{e}'_x}{dt} = \vec{\omega} \times \hat{e}'_x$$

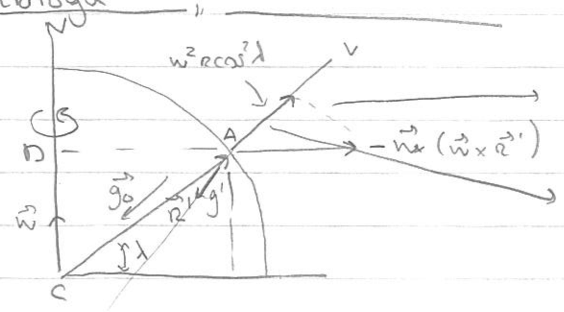
$$\frac{d\vec{r}_{PO}}{dt} = \frac{d\vec{r}'_{PO}}{dt}$$

$$\vec{v}_{PO} = \vec{v}_{PO'} + \vec{\omega} \times \vec{r}_{PO'}$$

$$\vec{a}_{PO} = \vec{a}_{PO'} + 2\vec{\omega} \times \vec{v}_{PO'} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{v}_{PO'})$$

$$\vec{a}' = \vec{a} - \underbrace{2\vec{\omega} \times \vec{v}'}_{\text{Coriolis}} - \underbrace{\omega' \times (\vec{\omega} \times \vec{r}')}_{\text{centrífuga}}$$

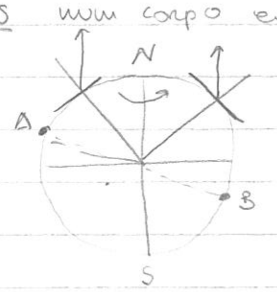
centrífuga

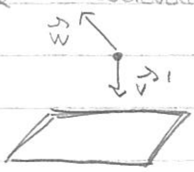


Causa uma deflexão em relação à vertical, para sul no hemisfério Norte

Causa uma diminuição no valor do $\vec{g}_0$

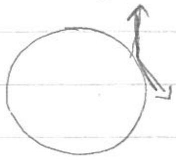
Coriolis   num corpo em queda observado na Terra





Desvio para Este

→ nas margens do rio



Física para Informática - 2010/2011

{Ficha de trabalho sobre Trabalho e Energia}

31 -03-2011

✓ 1. Nesta aula vamos introduzir diversos conceitos “novos”, como o trabalho realizado por uma força (ou uma resultante de forças), a energia cinética de um corpo, força conservativa, energia potencial, energia mecânica.

1.1 Comecemos por ver o que se obtém quando multiplicamos escalarmente por $\vec{v}$ ambos os membros da segunda lei de Newton...

$\hat{e}_x \cdot \hat{e}_x = 1 = \hat{e}_y \cdot \hat{e}_y$

$\hat{e}_x \cdot \hat{e}_y = 0$ perpendiculares

$\vec{F} \cdot \vec{v} = m \frac{d\vec{v}}{dt} \cdot \vec{v} \Leftrightarrow$ $\boxed{\vec{v} = v_x \hat{e}_x + v_y \hat{e}_y}$

$\boxed{\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{dv_x}{dt}\hat{e}_x + \frac{dv_y}{dt}\hat{e}_y}$ $\hat{e}_x$ e $\hat{e}_y$ vão-se anular

$$\Leftrightarrow \vec{F} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} = m \times \left(\frac{dv_x}{dt} v_x + \frac{dv_y}{dt} v_y\right) \Leftrightarrow \vec{F} \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{1}{2} m \times \frac{d}{dt} \underbrace{(v_x^2 + v_y^2)}_{v^2}$$

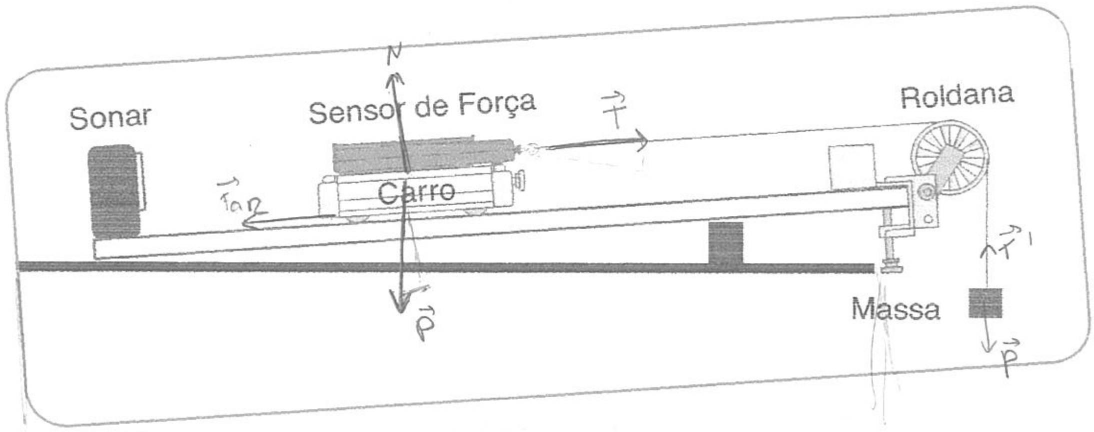
$$\frac{dv_x}{dt} \times v_x = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}(v_x^2) = \frac{1}{2} \times 2 \times v_x^{2-1} \times \frac{dv_x}{dt} \qquad \Leftrightarrow \frac{\vec{F} d\vec{r}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2} m v^2\right)$$

TRABALHO ENERGIA CINÉTICA

1.2 A equação diferencial a que chegamos permite-nos definir duas grandezas: a energia cinética e o trabalho de uma força (ou de uma resultante de forças). Continuando o cálculo (integrando entre dois instantes de tempo), chegamos ao **teorema trabalho-energia cinética: o trabalho *realizado pela resultante das forças que actuam num corpo é igual à*** variação da Energia Cinética **desse corpo.** Só podemos calcular o integral se F depender da posição.

$$\Rightarrow \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}_1} \vec{F} d\vec{r} = \int_{\vec{v}_0}^{\vec{v}_1} d\left(\frac{1}{2} m v^2\right) \qquad \boxed{\underbrace{W_{\vec{F}_{\vec{r}_0 \to \vec{r}_1}}}_{\text{trabalho resultante das forças}} = \frac{1}{2} m (v_1^2 - v_0^2) = \Delta E_c}$$

✓ 2. Vamos realizar uma experiência em que as forças exercidas sobre 2 corpos os colocam em movimento. Analisaremos a conversão de energia potencial em energia cinética e a transferência de energia entre corpos. A montagem é a seguinte:



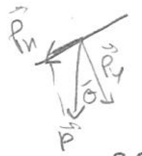
N → perpendicular ao plano

✓ 2.1 Comecemos por representar as forças que actuam no conjunto {carro+sensor de força} e na massa suspensa. A seguir, escrevamos a 2ª lei de Newton aplicada ao carro:

$$\boxed{\vec{T} + \vec{P} + \vec{F}_{ar} + 2\vec{N} = m\vec{a}}$$

2.2 Quando o carro é largado próximo do sonar, sobe a calha pois a resultante das forças segundo a direcção da calha aponta no sentido da roldana. Projectando as 4 forças que actuam no carro ao longo da direcção do movimento, a norma da força resultante vale:

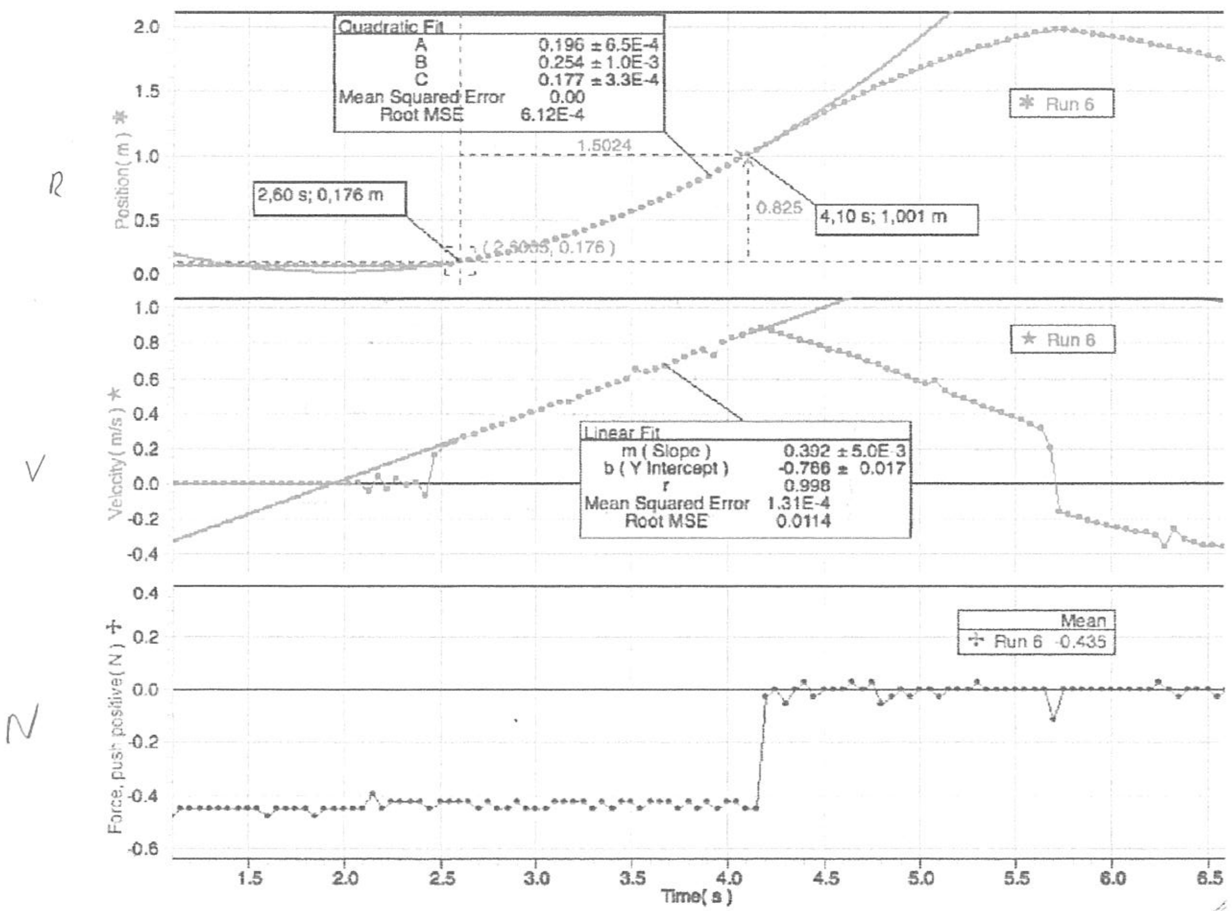
direcção da calha



$R =$

$$\begin{cases} \boxed{T - P\,\mathrm{sen}\,\theta - F_{ar} = ma} \\ \boxed{-P\cos\theta + 2N = 0} \end{cases}$$

2.3 O gráfico abaixo mostra um exemplo de uma aquisição de dados desta mesma situação. O sonar dá-nos a distância do carro ao próprio sonar, a velocidade é calculada a partir do deslocamento do carro em cada intervalo de tempo entre aquisições (0,05 s neste caso). O sensor de força mede a tensão no fio que une o conjunto {carro+sensor de força} à massa suspensa.



O movimento do carro, desde o momento em que é solto até bater na extremidade da calha, ocorre, aproximadamente, entre os instantes 2,0 s e 4,1 s.

05-04-2011

2.4 Para calcular o trabalho realizado pela resultante das forças que actuam sobre o carro, devemos calcular o valor de R. O valor médio da tensão no fio é 0,435 N (o sinal negativo é uma convenção do sensor: a força é negativa se puxar o sensor, positiva se o empurrar).

2.5 Alguns dados da experiência: a massa do conjunto {carro+sensor de força} é igual a 0,586 kg; o coeficiente de atrito de rolamento entre o carro e a calha é 0,0055; o ângulo de inclinação da calha é 1,82°. Podemos agora calcular o valor da força resultante:

$$R = \underbrace{T}_{0,435} - \underbrace{P\,\mathrm{sen}\,\theta}_{0,586\times 9,8\times \sin(1,82)} - \overset{0,0055\times m g}{F_{aR}} = 0,221\ \mathrm{N}$$

$F_{aR} = \mu_R m g$

2.6 A força resultante actua no conjunto ao longo de todo o percurso. Vamos considerar a distância percorrida entre os instantes 2,60 s e 4,10 s: o deslocamento é igual a 0,825 m. Finalmente, o trabalho realizado pela resultante das forças é:

angulo entre F e ΔS

$\int dW = \int \vec{F}\cdot d\vec{r} \Leftrightarrow W = F\cos\alpha \int dl$
$= F\,\Delta R\cos\alpha$

$\Delta S = 0,825$

$W = R \times \Delta S = 0,2\ \mathrm{J}$

2.7 Para calcular a variação da energia cinética do conjunto, necessitamos de conhecer a velocidade nos instantes 2,60 s e 4,10 s. No gráfico temos os coeficientes do ajuste linear à velocidade: $v = (0,392\,t - 0,766)$ m/s. Logo, a velocidade naqueles instantes vale:

v_1 (t=2,60s) = 0,2532

v_2 (t=4,10s) = 0,8412

A variação da energia cinética do conjunto é ΔEc = $\frac{1}{2} m (v_2^2 - v_1^2) = 0,2\ \mathrm{J}$

2.8 Comparando o trabalho realizado pela resultante das forças com a variação da energia cinética do conjunto, o que podemos concluir acerca da validade do teorema trabalho-energia cinética? Semelhantes

A diferença é entre 4%.

2.9 Podemos agora fazer uma análise dos balanços energéticos mais completa. Em primeiro lugar calculemos a variação da energia mecânica do conjunto {carro+sensor de força}. Já conhecemos a variação da energia cinética. A variação da energia potencial é:

$\Delta Ep = m\,g\,\Delta y = 0,150\ \mathrm{J}$

$\mathrm{sen}\,\theta = \frac{\Delta y}{\Delta R}$

$\Delta y = 0,825 \times \mathrm{sen}(1,82)$

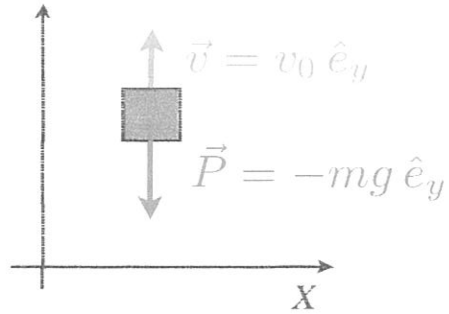
$\Delta y = 0,026$

2.10 Por que motivo é a energia potencial associada à força gravítica dada por $m\,g\,y$? Calculando o trabalho realizado pela força gravítica ao deslocar um objecto de massa m entre dois pontos de coordenadas y_0 e y:

$$W = \int_{y_0}^{y} \vec{P} \cdot d\vec{y} \qquad \vec{P} = -mg\hat{e}_y \qquad d\vec{y} = dy\,\hat{e}_y$$

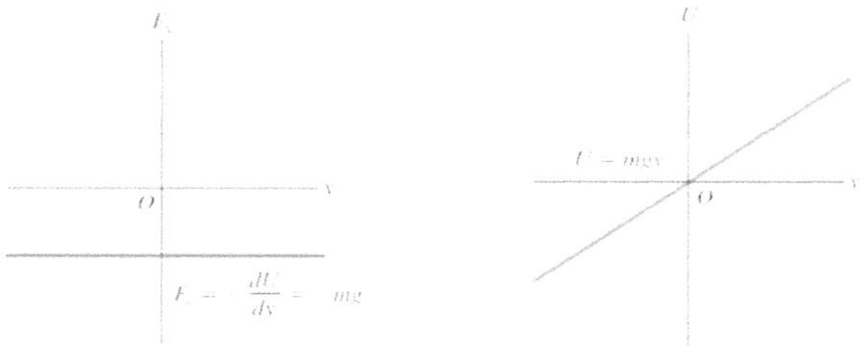
$$W = -mg \int_{y_1}^{y_2} dy = -mg(y_2 - y_1) = -\Delta E_{pg}$$

$E_{pg} = mgy$



2.11 Para forças conservativas — aquelas cuja acção **não** causa variação da energia mecânica — define-se energia potencial. A variação da energia potencial é, por definição, simétrica do trabalho realizado pela força conservativa:

$$dW_c = \vec{F}_c \cdot d\vec{r} = -dE_p$$



2.12 Usando o operador gradiente, a relação acima pode escrever-se:

$$\vec{F}_c = -\vec{\nabla} E_p$$

$\vec{\nabla} = \left(\hat{e}_x \frac{\partial}{\partial x} + \hat{e}_y \frac{\partial}{\partial y} + \hat{e}_z \frac{\partial}{\partial z}\right)$

$\vec{F}_x = \hat{e}_x \frac{\partial E_p}{\partial x}$

2.13 O trabalho realizado por uma força conservativa é:

- simétrico da variação da energia potencial
- independente da trajectória
- *nulo ao longo de uma trajectória fechada*
- reversível

2.14 Retomando a nossa experiência: somando a variação da energia cinética com a variação da energia potencial, obtemos a variação da **energia mecânica** do conjunto:

$\Delta Em = \Delta E_c + \underbrace{\Delta E_{pg}}_{\text{gravítica}} = 0{,}340\,J$

07 - 04 - 2011

2.15 Também podemos calcular as variações da energia cinética, da energia potencial e da energia mecânica da massa suspensa (m = 46,8 g):

$\Delta Ep = mgy = -0{,}378\,J$

$\Delta Ec = \frac{1}{2} m(v_1^2 - v_0^2) = 0.00476\,J$

velocidade do carro

$\Delta Em = \Delta E_p + \Delta E_c = -0{,}373\,J$

2.16 A variação da energia mecânica do sistema (carro+sensor de força+massa suspensa) é a soma das duas variações de energia mecânica já obtidas:

$\Delta E_{m_{c+sf}} = 0{,}340\,J$

ΔEm,sistema = $\Delta E_{m_{c+sf}} + \Delta E_{Mms} = -33\,mJ$

$\Delta E_{Mms} = 0{,}373\,J$

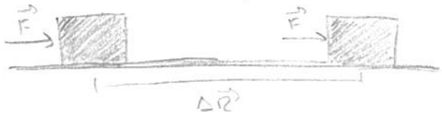
2.17 Porque será este valor negativo? Calculemos o trabalho realizado pela força de atrito de rolamento:

$$W_{\vec{f}_{\mathrm{a,rol}}} = \int_{x_0}^{x_1} \vec{f}_{\mathrm{a,rol}} \cdot \mathrm{d}\vec{r} = f_{\mathrm{a,rol}} \Delta x \underbrace{\cos(180°)}_{-1} = 0{,}0316\,N \times 0{,}825\,m \times -1 = -26\,mJ$$

$f_{a,rol} = \mu_{a,rol} \times 2N = 0{,}0316\,N$

2.18 Conclusão: **A variação da energia mecânica de um sistema é igual ao trabalho das forças dissipativas** (não conservativas).

3. A definição de trabalho não faz qualquer referência ao tempo durante o qual ocorre transferência de energia. Retomemos a expressão



$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2}mv^2\right) = \vec{F}(\vec{r}) \cdot \vec{v}$$

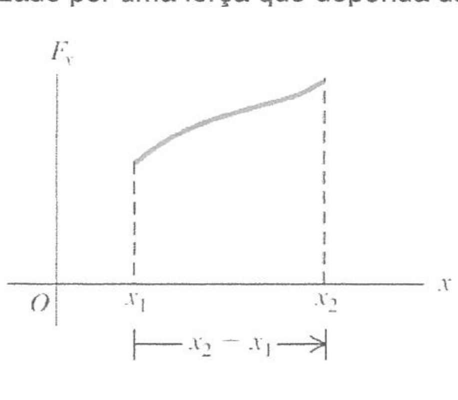
$\Leftrightarrow \frac{dEc}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{v} \Leftrightarrow \frac{dW}{dt} = P = \vec{F} \cdot \vec{v}$

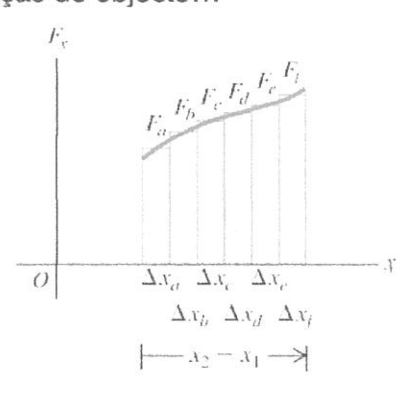
↳ resultante de forças

3.1 Potência:

$\boxed{P = \vec{F} \cdot \vec{v}}$ $\quad \frac{1J}{1s} = 1W \quad 1kWh = 1 \times 1000 \times \frac{1J}{1s} \times 1h \times \frac{3600s}{1h} = 3{,}6MJ$

4. No exemplo que acabamos de tratar, as forças eram constantes ao longo do movimento. Qual o trabalho realizado por uma força que dependa da posição do objecto…

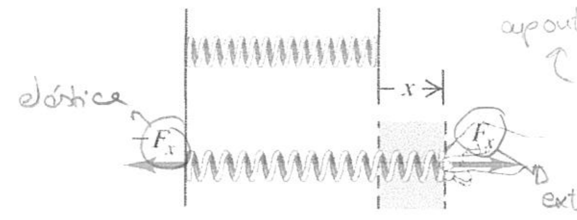




$W = \vec{F}_1 \cdot d\vec{R}_1 + \vec{F}_2 \cdot d\vec{R}_2 + \dots$

$W = \int \vec{F} \cdot d\vec{R}$

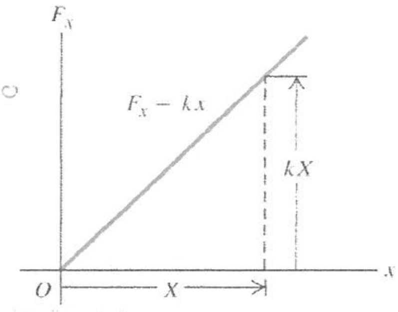
4.1 ... como por exemplo o trabalho realizado pela força elástica?



aponta sempre em sentido contrário.

$$\boxed{\vec{F}_{\text{elástica}} = -k\,\vec{x}}$$

restauradora



4.2 Trabalho realizado pela força elástica:

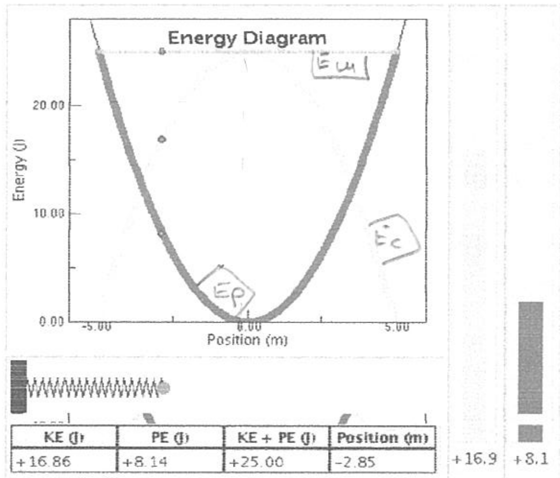
mesmo sentido

$$W = \int -k\vec{x} \cdot d\vec{x} = -k\int_{x_1}^{x_2} x\,dx = -\frac{k}{2}\left[x^2\right]_{x_1}^{x_2} = \boxed{-\frac{1}{2}k\left(x_2^2 - x_1^2\right)} = \boxed{-\Delta E_{pel}}$$

deslocamento total

somatório de um nº infinito de termos $\leftarrow \int d\vec{x}$

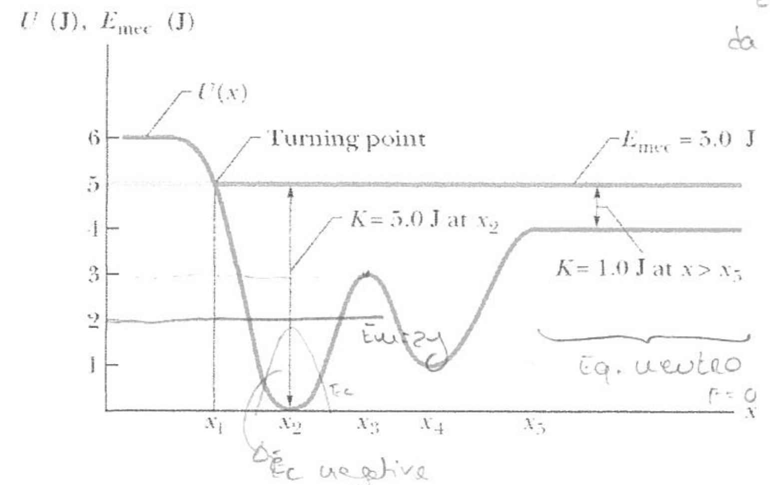
zero é sempre a posição de repouso da mola

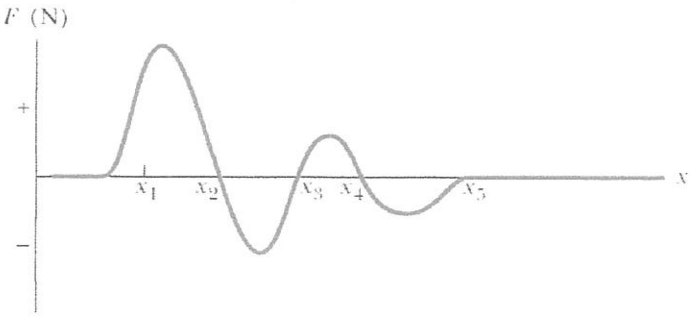


Ep depende da posição

Ec é máxima no ponto de equilíbrio da mola.

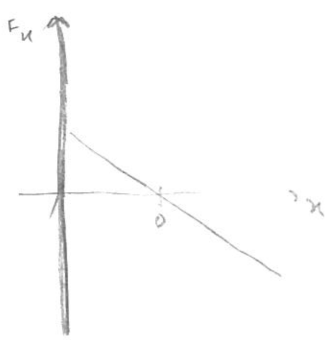
5. Diagramas de energia





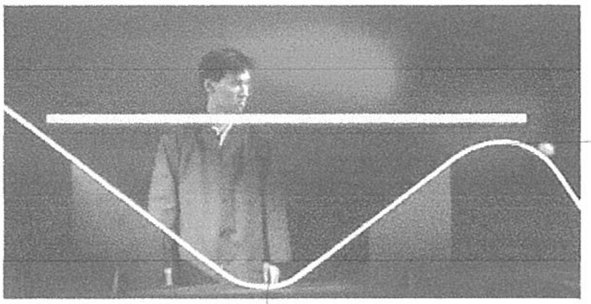
$\vec{F} = -\vec{\nabla} E_p$

$F_x = -\frac{dE_p}{dx}$



$E_m = 3$ J

$\hookrightarrow v = 0$

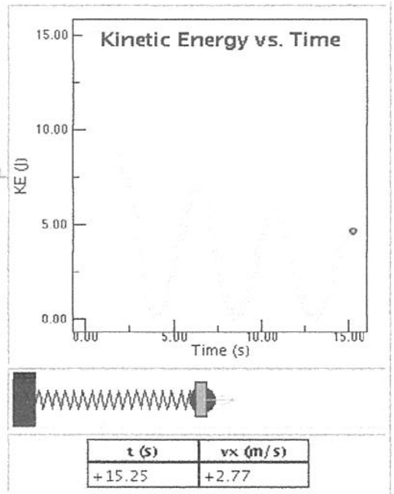


ΔEc não se anulou

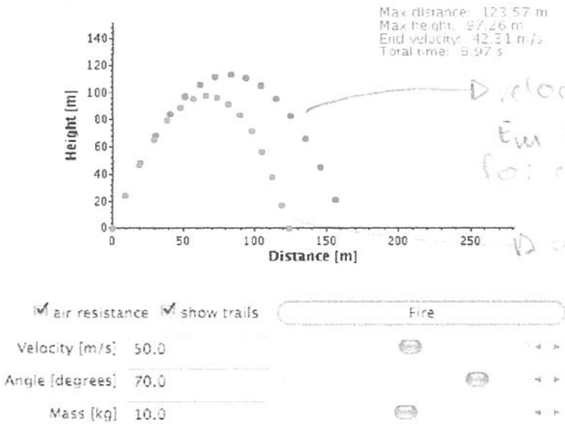
ponto equilíbrio estável.

6. Forças dissipativas

Não há Epe anulado no sist.



Projectile Motion



velocidade de disparo v...

Em conserva-se, logo ñ foi considerado efeito dissipativo...

distância menor...

http://pessoa.fct.unl.pt/jcs/Physlets/contents/mechanics/energy/ex7_4.html
http://galileo.phys.virginia.edu/classes/109N/more_stuff/Applets/ProjectileMotion/jarapplet.html

Em dissipada — Epg não existe na colisão.

Qual a energia dissipada na colisão?

Qual o trabalho realizado pela força de atrito entre o projéctil e o ar?

$W = \Delta S \times F$

$W_{FA} = \Delta E_m = \frac{1}{2} m (v_f^2 - v_i^2) = -3{,}55 kJ$

7. A lei de conservação de energia

$$\Delta E_{\text{cinética}} + \Delta E_{\text{potencial}} + \Delta E_{\text{interna}} = 0$$

Um bloco desliza sem atrito ao longo de um plano inclinado de alt. h. Ao chegar ao fim do plano tem vel. v.
Para atingir 2v qual a altura?

$4h$

$mgy + \frac{1}{2}m(v_f^2 - v_i^2)$

$mgkh + \frac{1}{2}mv2^2 = mgh + \frac{1}{2}mv^2$

$gkh + \frac{(v_2)^2}{2} = gh + \frac{1}{2}v^2$, $(v_2)^2 = 4v^2$

$gkh + 2v^2 = gh + \frac{v^2}{2}$

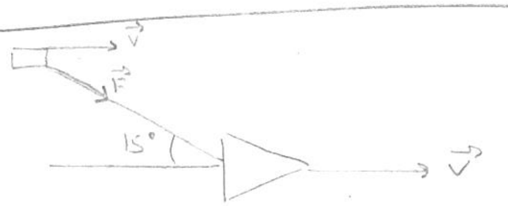
$2gkh + 4v^2 = gh + v^2$

$2gkh + 3v^2 = gh \Leftrightarrow (2gkh - gh) + 3v^2 = 0$

$\Leftrightarrow gh(2k-1) + 3v^2 = 0 \Leftrightarrow$

$\frac{4v^2}{2} = \frac{1}{2}v^2$

$h(2k-1) = h$



$F = 180N$

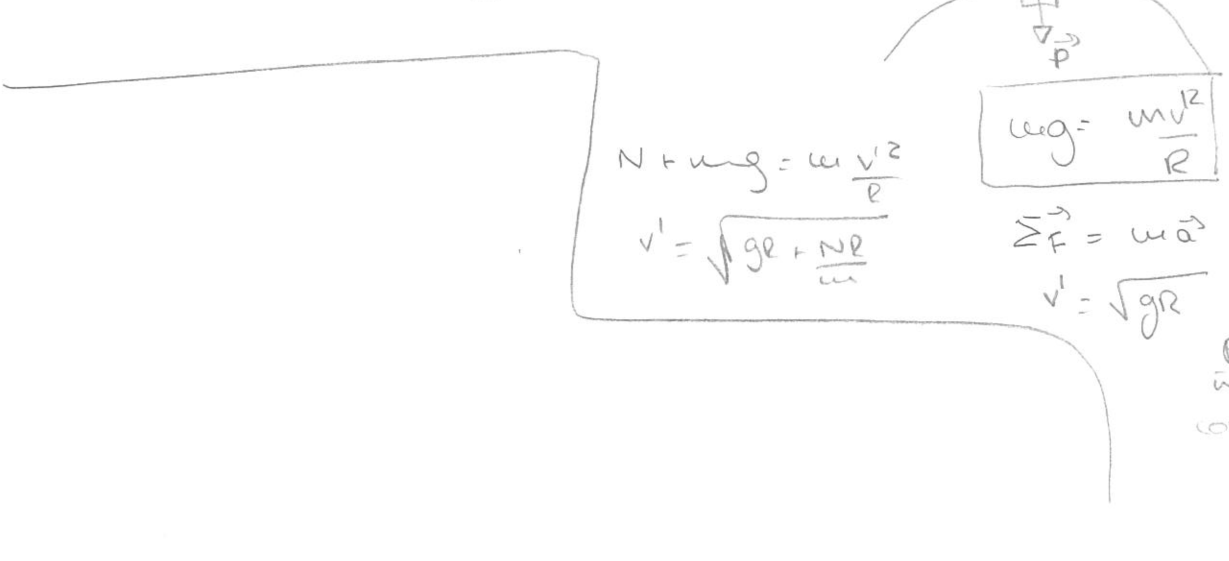
$W = \int \vec{F}\, d\vec{r} = \vec{F}\cdot\Delta\vec{R}$

$= 180N \times 300m \times \cos 15°$

$W_{Fel} = -\Delta E_p$

$W_{Fext} = \Delta E_p = \frac{1}{2} \times (x_f^2 - x_i^2)$

$\frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}mv'^2 + mg\underbrace{(2R)}_{h}$



B neste ponto $\vec{P}$ representa uma força centrípeta.

$\boxed{mg = \frac{mv'^2}{R}}$

$N + mg = m\frac{v'^2}{R}$

$v' = \sqrt{gR + \frac{NR}{m}}$

$\sum \vec{F} = m\vec{a}$

$v' = \sqrt{gR}$ → velocidade mínima para o carro não perder o contacto com a calha.

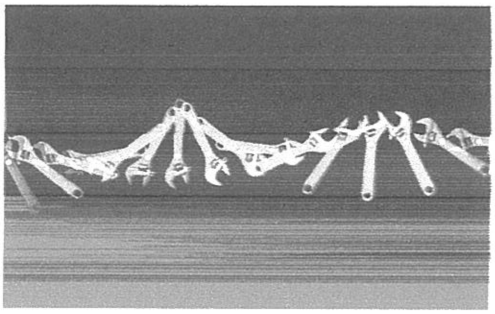
Física para Informática 2010/11

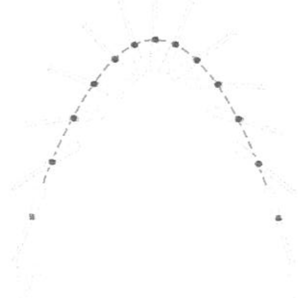
Ficha de trabalho sobre

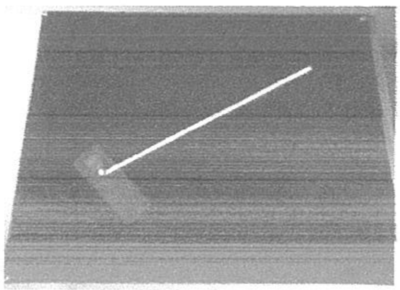
Sistemas de Partículas, Momento Linear, Impulso e Colisões

14-04-2011

1. Um ponto especial

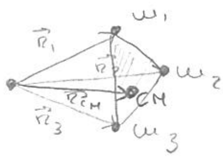






1.1 O **centro de massa** de um corpo ou de um conjunto de corpos move-se exactamente como se toda a massa estivesse concentrada nesse ponto e ele estivesse sujeito a uma força igual à resultante de todas as forças que actuam sobre o sistema.

1.2 A posição do centro de massa de um sistema de partículas é, por definição:



$$\vec{r}_{CM} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i \vec{r}_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i} \xrightarrow{\frac{d}{dt}} \vec{v}_{CM}$$

1.3 Quando se afirma que a Terra gira em torno do Sol, pretende dizer-se que o movimento de translação ocorre em torno do centro do Sol. Será isto rigorosamente verdade? Calcule a posição do ponto em torno do qual a Terra gira. A massa da Terra é igual a 5,98x10^24 kg, a massa do Sol é igual a 1,99x10^30 kg e a distância da Terra ao Sol é igual a 1,50x10^11 m.

$$\vec{R}_{CM,T+S} = \frac{m_T \times d_{ST} + \overbrace{m_S d_{SS}}^{0}}{m_T + m_S} = \frac{5,98 \times 10^{24} \times 1,5 \times 10^{11}}{5,98 \times 10^{24} + 1,99 \times 10^{30}} = 4,5 \times 10^{5}\ m$$

1.4 O centro de massa move-se? Porque não?

$$\vec{v}_{CM} = \frac{\sum m_i \vec{v}_i}{\sum m_i} \qquad \vec{a}_{CM} = \frac{\sum m_i \vec{a}_i}{\sum m_i}$$

1.5 Olhando à definição de velocidade do centro de massa:

$$\vec{P} = \sum \vec{p}_i = \sum m_i \vec{v}_i = M \vec{v}_{CM} = \vec{P}_{CM}$$

O momento linear total de um sistema de partículas é igual ao produto da massa total do sistema pela velocidade do CM, ou seja, ao momento linear do próprio CM.

1.6 Olhando à definição de aceleração do centro de massa:

2ª Lei Newton no CM

$$\boxed{M\vec{a}_{\mathrm{CM}}} = \sum m_i \vec{a}_i = \sum \vec{F}$$

Quando forças externas actuam sobre um corpo ou um conjunto de partículas, o CENTRO DE MASSA move-se exactamente como se toda a massa estivesse concentrada nesse ponto e estivesse submetida a uma força igual à resultante de todas as forças que actuam sobre o *sistema*.

1.7 Como calcular a posição do centro de massa de uma distribuição contínua de massa? Quando um corpo é extenso e não o podemos tratar como um ponto material, temos de “dividir” o corpo em muitos pontos materiais… cada um com uma massa *dm*...

$$x_{\mathrm{CM}} = \frac{\int x\,\mathrm{d}m}{\underbrace{\int \mathrm{d}m}_{M_T}} \qquad y_{CM} = \frac{\int y\,dm}{M_T} \qquad \vec{R}_{CM} = \frac{\int \vec{R}\,dm}{\int dm}$$

Recorrendo à definição de densidade e se o corpo for homogéneo:

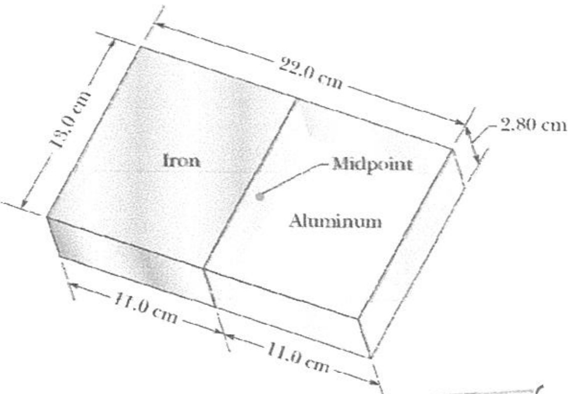
$$\rho = \frac{M}{V} = \frac{dm}{dV} \longrightarrow \boxed{dm = \rho\, dV}$$

$$x_{CM} = \frac{\int x \rho\, dV}{M_{Total}} \qquad dV = dx\,dy\,dz$$

↳ elemento com volume muito pequeno

1.8 Um problema

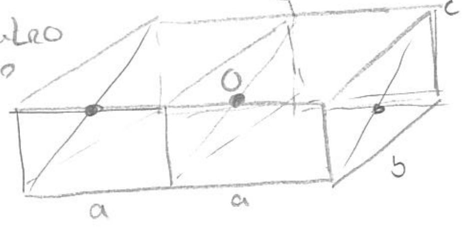
A figura mostra um sólido construído com dois materiais diferentes: alumínio e ferro. A densidade do alumínio é igual a 2,70 g/cm³ e a do ferro é igual a 7,85 g/cm³. Onde está localizado o centro de massa do sólido?



Ferro

$$x_{CM} = \frac{\rho \int_{-a}^{0} x\,dx \int_{-b/2}^{b/2} dy \int_{-c/2}^{c/2} dz}{\underbrace{\rho\, abc}_{M_T} \rightarrow \text{volume}} = \frac{\frac{-a^2}{2}\cancel{b}\cancel{c}}{a\cancel{b}\cancel{c}} = \frac{-a}{2}$$

↓ coordenada do centro geométrico do bloco



Alumínio

$$x_{CM} = \frac{a}{2}$$

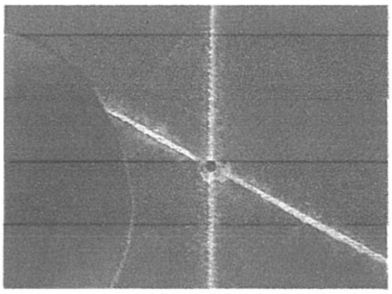
$$x_{CM} = \frac{m_{Fe} \overset{-5,5\,cm}{x_{Fe}} + m_{Al} \overset{5,5\,cm}{x_{Al}}}{m_{Fe} + m_{Al}} = -2,7\ cm$$

2

$m_{Fe} = \rho V = 7,85\,g/cm^3 \times 11\,cm \times 13\,cm \times 2,8\,cm = 3143\,g$

$m_{Al} = 2,7 \times 11 \times 13 \times 2,8 = 1081\,g$

1.9 Determinação experimental do centro de massa de um objecto irregular



1.10 Outro problema

Um taco de basebol tem comprimento *L* e densidade linear de massa dada por $\lambda = \lambda_0(1 + x^2/L^2)$. Determine a localização da coordenada *x* do centro de massa em função de *L*.

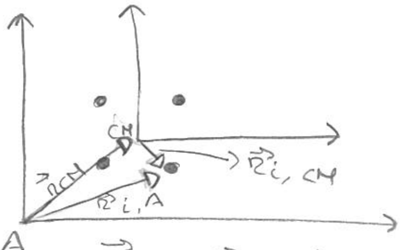
$\lambda = \frac{dm}{dx}$ $\quad \rho = \frac{M}{V}$ $\quad \sigma = \frac{M}{A}$ $\quad \lambda = \frac{M}{L}$

$$x_{CM} = \frac{\int x\,dm}{\int dm} = \frac{\int x \lambda\, dx}{\int \lambda\, dx} = \frac{\lambda_0 \int_0^L \left(x + \frac{x^3}{L^2}\right) dx}{\lambda_0 \int_0^L \left(1 + \frac{x^2}{L^2}\right) dx} = \frac{9}{16} L$$

1.11 O referencial do centro de massa

Podemos usar o centro de massa de um sistema de partículas como origem de um sistema de coordenadas. Neste referencial, o vector posição de uma partícula é:

$$\boxed{\vec{r}_{\mathrm{i,CM}} = \vec{r}_{\mathrm{i,A}} - \vec{r}_{\mathrm{CM}}}$$



$\vec{r}_{iA} = \vec{r}_{CM} + \vec{r}_{i,CM}$

$$\vec{v}_{CM} = \frac{\sum m_i \vec{v}_i}{\underbrace{\sum m_i}_{M}}$$

O momento linear total medido no referencial do centro de massa:

$$\vec{v}_{i,CM} = \vec{v}_{i,A} - \vec{v}_{CM}$$

$$\vec{P}_{total,CM} = \sum m_i \vec{v}_{i,CM}$$
$$= \underbrace{\sum m_i \vec{v}_{i,A}}_{M\vec{v}_{CM}} - \overbrace{\left(\sum m_i\right)}^{M} \vec{v}_{CM} = \underline{\underline{0}}$$

2. A partir da 2ª Lei de Newton podemos definir uma grandeza chamada **momento linear** também conhecida por quantidade de movimento (na realidade, foi com esta grandeza que Newton expressou a sua segunda lei: a resultante das forças que actuam num corpo é igual à variação da quantidade de movimento do corpo).

$$\sum \vec{F} = m\,\vec{a} = m\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}\underbrace{(m\vec{v})}_{\text{momento linear}} = \frac{d\vec{p}}{dt}$$

E podemos também definir outra, chamada **impulso**, que representa o efeito que uma força que actua durante um certo intervalo de tempo tem sobre o movimento de um corpo:

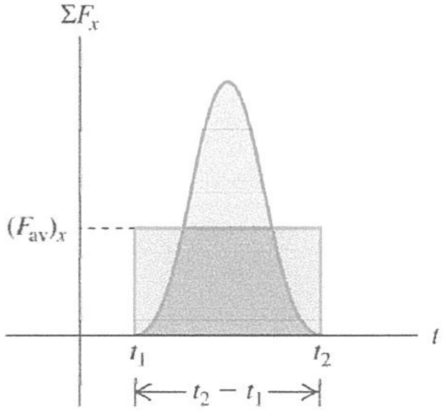
$$\int_{t_1}^{t_2} \sum \vec{F}\,dt = \int_{\vec{p}_1}^{\vec{p}_2} d\vec{p} = \vec{p}_2 - \vec{p}_1 = \Delta\vec{p}$$

$$\vec{J} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}_{res}(t)\, \mathrm{d}t = \int_{\vec{p}_1}^{\vec{p}_2} d\vec{p} = \vec{p}_2 - \vec{p}_1 = \Delta \vec{p}$$

Este resultado é conhecido pelo **Teorema Impulso-Momento Linear**: **A variação do momento linear de um corpo durante um certo intervalo de tempo é igual ao impulso da resultante das forças que actuaram sobre o corpo durante esse intervalo de tempo.**

2.1 Problema. Como o impulso permite calcular a força média.

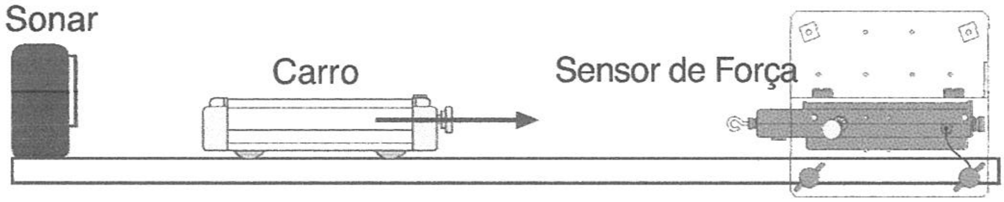
Uma bola de golfe, inicialmente parada, sofre uma tacada e passa a voar a 60 m/s. A massa da bola é igual a 55 g. O tempo de contacto entre o taco e a bola é igual a 1 ms. Qual a norma da força média exercida pelo taco sobre a bola?



$$\overline{\vec{F}} = \frac{\int \vec{F} dt}{\Delta t} = \frac{\vec{J}}{\Delta t} = \frac{\Delta \vec{p}}{\Delta t} \quad \underline{\text{ou}} \quad \Delta \vec{p} = \overline{\vec{F}} \Delta t$$

$$\vec{F} = \frac{0{,}055 \times 60 dt}{0{,}001} = 3300\,N$$

3. Na experiência de hoje, vamos estudar a colisão de um carro contra um sensor de força - a melhor maneira de saber qual a força que actua durante a colisão! A força que actua sobre o carro durante a colisão é o par acção-reacção da força exercida pelo carro sobre o sensor e que este mede.

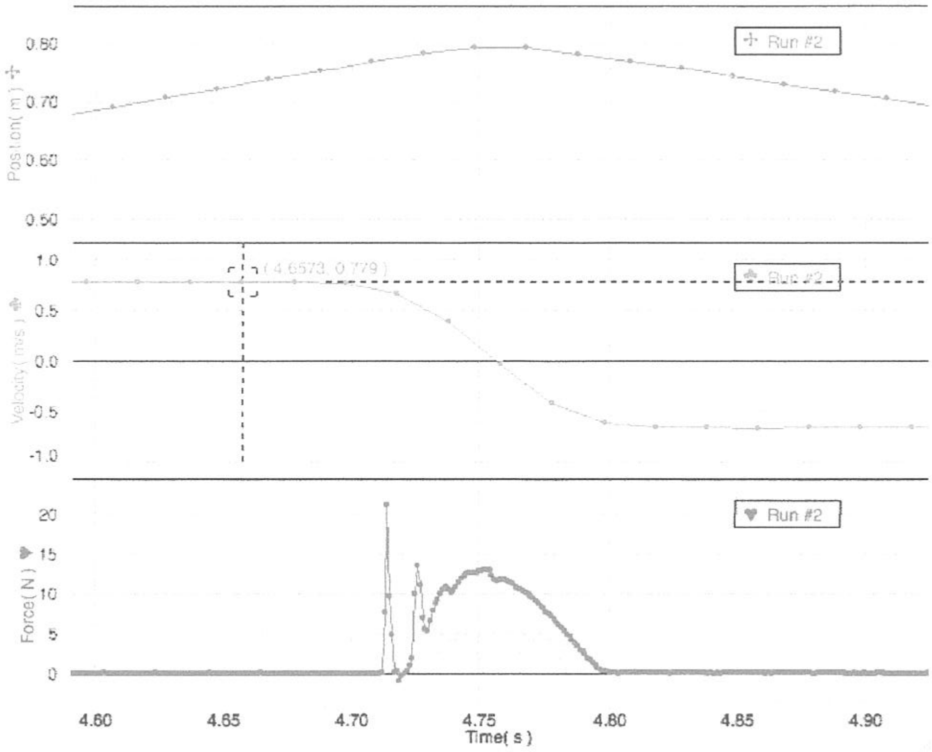


3.1 E o sonar? Vai permitir-nos acompanhar o movimento do carro antes, durante e depois da colisão, o que nos permite saber como evolui a velocidade e deste modo calcular o momento linear antes e depois da colisão, e, portanto, a variação do momento linear.

3.2 Na página seguinte temos um exemplo de uma aquisição de dados desta situação, com os gráficos da posição determinada pelo sonar, da velocidade calculada a partir da posição, e da força medida pelo sensor de força.

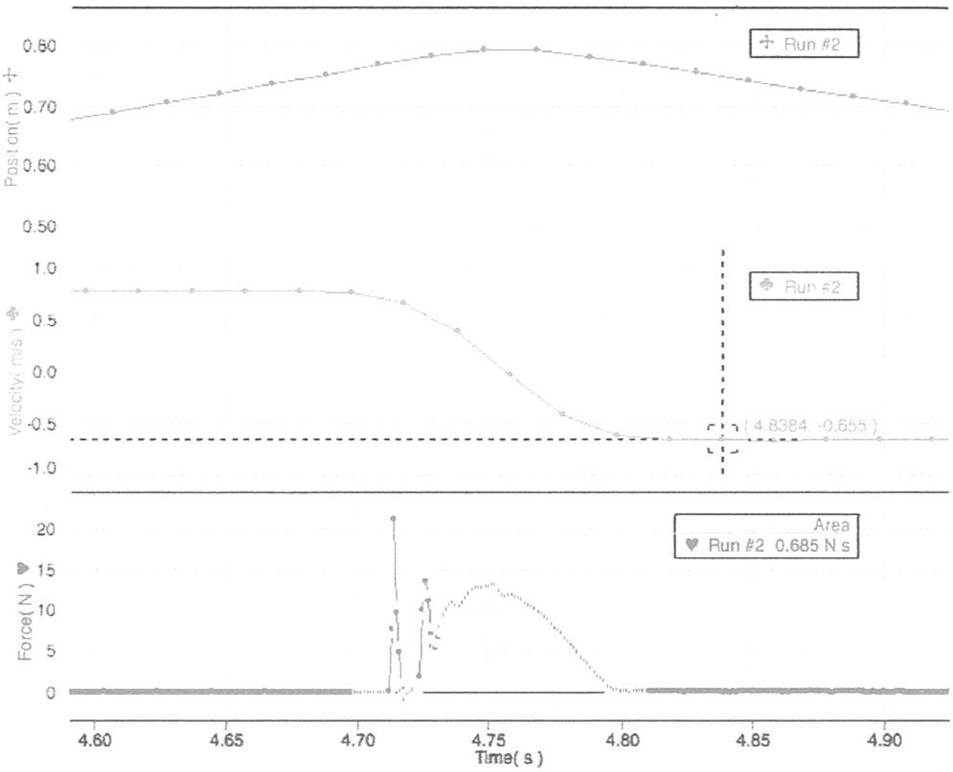
3.3 A velocidade do carro antes de colidir contra o sensor de força era 0,779 m/s. Sabendo que a massa do carro é igual a 491 g, o momento linear do carro antes da colisão é (não esquecer que o momento linear é uma grandeza vectorial!):

$$\vec{p}_1 = 0{,}779 \times 0{,}491\, \vec{e}_x$$
$$= 0{,}382\, \vec{e}_x \ \text{kg m/s}$$



3.4 Depois da colisão a velocidade do carro passou a ser igual a $\boxed{-0{,}655 \text{ m/s}}$. Então, o momento linear do carro após a colisão é:

$$\vec{p}_2 = -0{,}655 \times 0{,}491\ \hat{e}_n$$
$$= -0{,}322\hat{e}_n \ \text{kg m/s}$$



3.5 A variação do momento linear do carro, fruto da colisão contra o sensor, é:

$$\Delta\vec{p} = \vec{p}_2 - \vec{p}_1 = -0{,}704\,\hat{e}_x \text{ kgm/s}$$

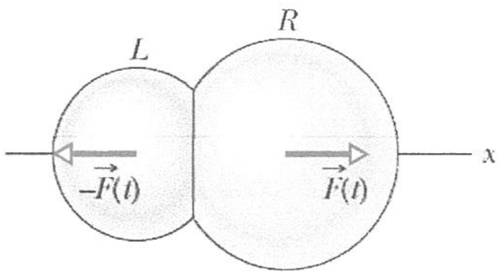
3.6 A área sob a curva que representa a força medida pelo sensor é igual a 0,685 Ns. O impulso exercido sobre o carro é:

$$\|\vec{J}\| = 0{,}685 \text{ N} \qquad \vec{J} = -0{,}685\,\hat{e}_x \text{ Ns}$$

3.7 Que podemos concluir acerca do impulso da resultante das forças que actuaram sobre o carrinho durante a colisão e a correspondente variação do momento linear?
Diferença de 3%, o q̄ é aceitável, logo são val. concordantes.

3.8 Se a variação do momento linear de um corpo é igual ao impulso da força resultante… então o momento linear conserva-se (não varia) se o impulso for nulo, ou seja, quando a resultante das forças que actuam sobre o corpo for nula.

3.9 Analisámos a colisão entre o carro e o sensor de força olhando apenas ao que aconteceu ao carro. Numa colisão entre dois corpos, a 3ª Lei de Newton dita que as forças internas (que cada corpo exerce sobre o outro) são simétricas. O que é que isto implica relativamente ao impulso a que cada corpo fica sujeito? são simétricos



E à variação do momento linear de cada corpo? são simétricos

Se considerarmos um sistema composto pelos dois corpos, o que acontece ao momento linear total do sistema? Não se altera, ou seja, o m. linear conservou-se.

3.10 Daí o chamado teorema de conservação do momento linear: **num sistema isolado (em que não actuam forças externas) ou em que a resultante das forças externas é nula, o momento linear total do sistema conserva-se.**

3.11 Note-se que o teorema de conservação do momento linear refere-se ao momento linear total do sistema: o momento linear de cada componente do sistema pode variar, mas o total (a soma vectorial) mantém-se.

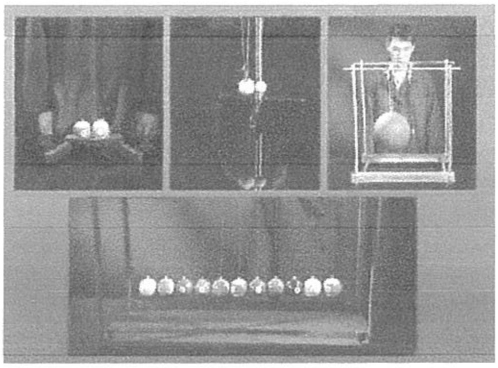
3.12 Daí, também, o resultado conhecido: numa colisão, o momento linear conserva-se.

3.13 Já a energia cinética, não: apenas em colisões ideais, ditas elásticas, é que a energia cinética se conserva. As colisões entre corpos rígidos são quase elásticas (se não houver deformação permanente) e a energia cinética quase se conserva.

3.14 A generalidade das colisões é dita inelástica: a energia cinética é parcialmente convertida em energia interna.

3.15 Nas colisões perfeitamente inelásticas os objectos seguem juntos após a colisão.

3.16 Filme: Colisões (quase elásticas) entre esferas rígidas



3.17 Problema quebra-ossos.

Uma pessoa, de massa 70 kg, está no interior de um elevador. O cabo do elevador parte-se quando o elevador se encontra a 15 m do chão. Supondo que a travagem (a colisão com o chão) dura 5 ms, qual o valor da força média exercida pelo chão do elevador sobre os pés da pessoa?

Lei da conservação Energia $\boxed{mgh = \frac{1}{2}mv^2} \Leftrightarrow v = \sqrt{2gh} = 17\ m/s$

$\vec{F} = \frac{\Delta\vec{p}}{\Delta t} = \frac{70\times17}{0,005} = \boxed{238\ kN}$

t colisão

$\Delta\vec{p} = 70\times0 - 70\times17$

O osso parte quando as forças compressivas (pressões) são superiores a 1,6 x 10^8 Pa. A maior tensão (= pressão = força por unidade de área) ocorre na zona de osso com menor secção. Na tíbia, um pouco acima do calcanhar a área é 3,2 x 10^{-4} m^2 (diâmetro 2 cm). Qual a tensão a que a tíbia fica sujeita na zona de menor secção? Menor superfície → maior pressão

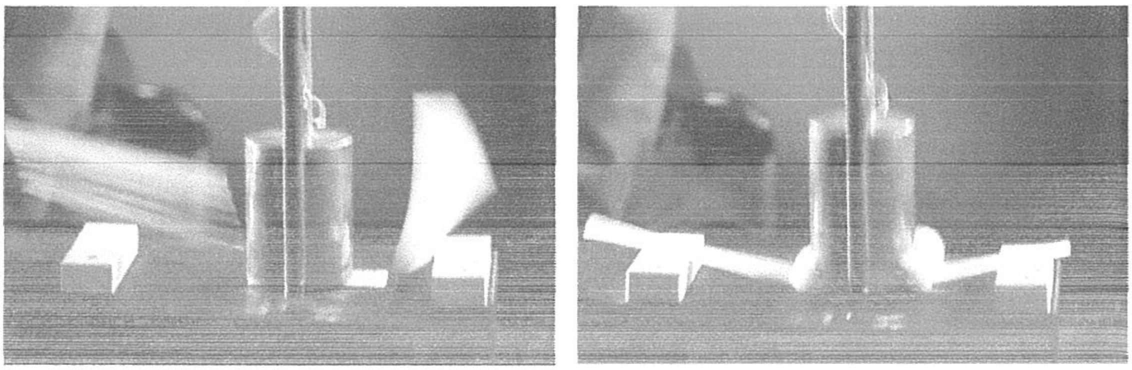
$\sigma = \frac{F}{A} = \frac{238000}{3,2\times10^{-4}}$

Tensão

$\sigma_{tíbia} = \frac{1}{2}\frac{F}{A} = 3,7\times10^8\ Pa$

O osso vai fracturar acima do calcanhar!

3.18 Filme: como o tempo de colisão influencia o desfecho desta.



Física para Informática 2010/2011

Ficha de trabalho

Corpo Rígido 1: Cinemática do Movimento de Rotação

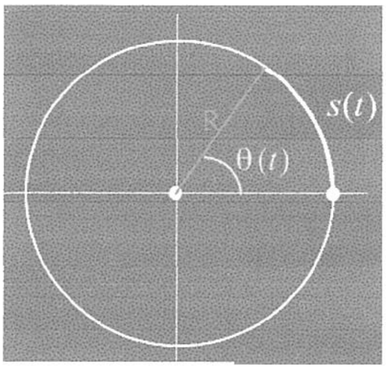
28-04-2011

1. Num movimento de **translação**, todos os pontos do **corpo rígido** — aquele que possui forma e tamanho invariantes — descrevem a mesma trajectória. Num movimento de **rotação**, os pontos do corpo descrevem trajectórias circulares (raios constantes) em torno do **eixo de rotação**.

1.1 Como descrever a posição de um ponto material, ou de um ponto de um corpo rígido, que efectua um movimento circular? Em coordenadas polares

A velocidade angular é sempre igual

1.2 Movimento circular em coordenadas angulares (polares)



Espaço percorrido e deslocamento angular:

$$s(t) = \theta(t) \times R$$

Velocidade linear e velocidade angular:

$$\vec{v}(t) = \vec{\omega}(t) \times \vec{R}$$

Aceleração tangencial e aceleração angular:

$$\vec{a}_{\mathrm{t}}(t) = \vec{\alpha}(t) \times \vec{R}$$

1.2 Problema 1. Quando se liga uma ventoinha, as pás de 40 cm de diâmetro começam a girar com velocidade angular, ω, dada por $\omega = a\,t^2 - b\,t^3$ onde $a = 20$ rad/s^3 e b = 3 rad/s^4, até atingir a velocidade angular máxima. Calcule:

a) a aceleração angular das pás da ventoinha;
b) a velocidade angular e a aceleração angular máximas;
c) o número de voltas que as pás dão até atingir a velocidade angular máxima;
d) as acelerações tangencial e normal quando a velocidade angular for máxima;
e) a velocidade tangencial máxima de um ponto da periferia das pás.

a) $\alpha = \frac{dw}{dt} = 2at - 3bt^2$

b) $w_{máx} \rightarrow \frac{dw}{dt} = 0 \Leftrightarrow \alpha = 0 \Leftrightarrow 2at - 3bt^2 = 0 \Leftrightarrow t = \frac{2a}{3b} = 4{,}4\,s$

$a \times \left(\frac{2a}{3b}\right)^2 - b\left(\frac{2a}{3b}\right)^3 = 132\,rad/s$

$\alpha_{max} \rightarrow \frac{d\alpha}{dt} = 0 \Leftrightarrow 2a - 6bt = 0 \Leftrightarrow t = \frac{a}{3b} = \frac{20}{9}\,s$

$\frac{a^2}{3b} = 44\,rad/s^2$

c) $n = \frac{\Delta\theta}{2\pi} = 46{,}6$ rotações $w = \frac{d\theta}{dt} \Rightarrow \int d\theta = \int w\,dt \Leftrightarrow \Delta\theta = \int_0^{4{,}4} (at^2 - bt^3)\,dt =$

d) $a_t = \frac{dv}{dt} = R\frac{dw}{dt} = 0$

$a_n = \frac{v^2}{R} = w^2R = (132)^2 \times 0{,}2 = 3485\, m/s^2$

e) $V_{máx} = w_{max} \times R = 132 \times 0{,}2 = 26{,}4\, m/s$

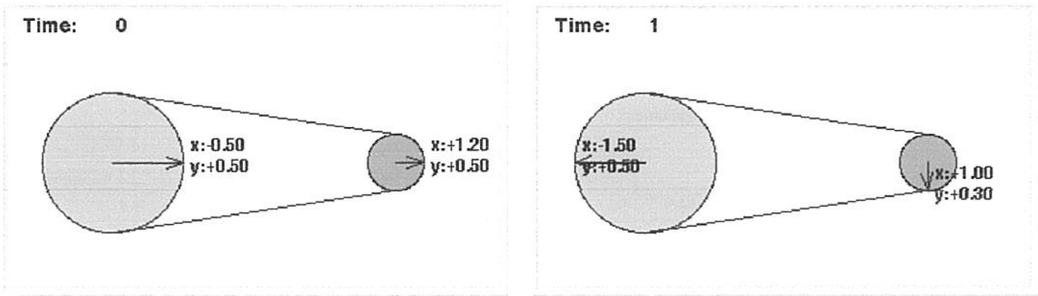
$$I = \int R^2\,dm \xleftarrow{\text{Generalizando}} I = mR^2 \rightarrow \text{para um corpo material}$$

MOMENTO DE INÉRCIA

1.3 Energia cinética de rotação de um corpo rígido

$$E_c = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} m_i v_i^2 = \sum \frac{1}{2} m_i (w R_i)^2 = \frac{1}{2} \left(\sum m_i R_i^2\right) w^2 = \boxed{\frac{1}{2} I w^2}$$

↳ velocidade angular igual para todas as partículas



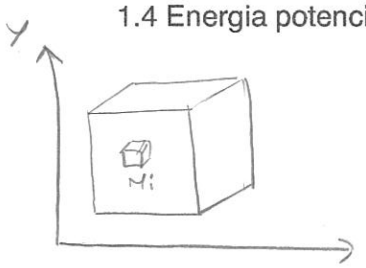
http://pessoa.fct.unl.pt/jcs/Physlets/contents/mechanics/rotations/prob10_9.html

Qual a razão entre as energias cinéticas dos dois discos?

$$\boxed{I_{disco} = \frac{1}{2} M R^2}$$

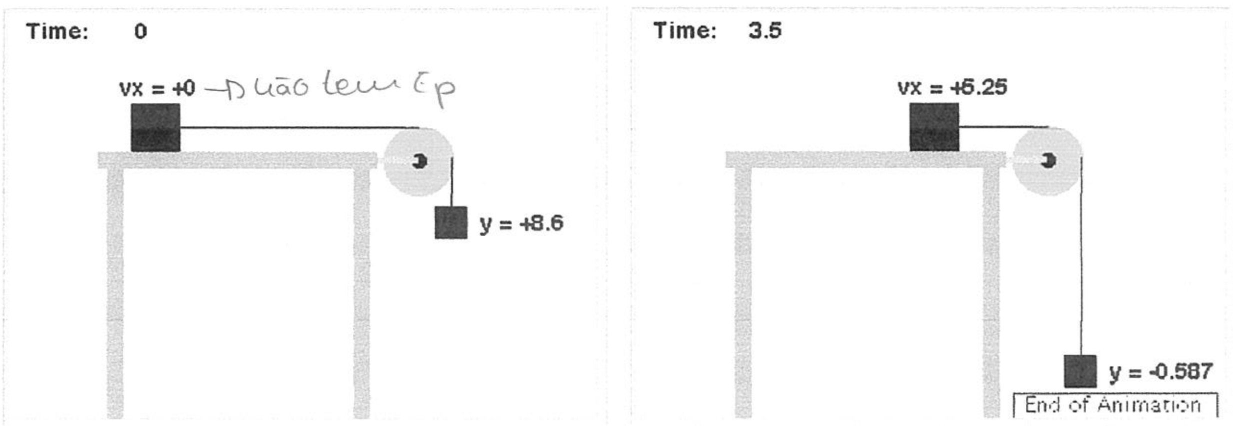
$$\frac{E_{c1}}{E_{c2}} = \frac{\cancel{\frac{1}{2}} I_1 w_1^2}{\cancel{\frac{1}{2}} I_2 w_2^2} = \frac{\frac{1}{2} M R_1^2 w_1^2}{\frac{1}{2} M_2 R_2^2 w_2^2} = \frac{\frac{1}{2} M_1 \cancel{R_1^2} \frac{v^2}{\cancel{R_1^2}}}{\frac{1}{2} M_2 \cancel{R_2^2} \frac{v^2}{\cancel{R_2^2}}} = \frac{\cancel{\frac{1}{2}} M_1 v^2}{\cancel{\frac{1}{2}} M_2 \cancel{v^2}} = \frac{M_1}{M_2} = \frac{\cancel{\rho \pi} \overbrace{R_1^2 \cancel{h}}^{V}}{\cancel{\rho \pi} R_2^2 \cancel{h}} = \left(\frac{R_1}{R_2}\right)^2$$

1.4 Energia potencial gravítica de um corpo rígido



$$E_p = \sum m_i g y_i = M g y_{CM}$$

$$y_{CM} = \frac{\sum m_i y_i}{M}$$



http://pessoa.fct.unl.pt/jcs/Physlets/contents/mechanics/rotations/prob10_12.html

$E_{M_i} = mgy_i$

Qual o momento de inércia da roldana? $E_{M_f} = \frac{1}{2}M_1 v_x^2 + \frac{1}{2} I w^2 + \frac{1}{2} m v_x^2 + mgy_f$

$\boxed{w = \frac{V_x}{R}}$

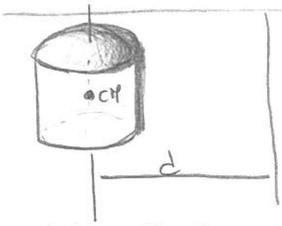
$\Downarrow$

$I = 12\ kgm^2$

$I = mR^2$

$I = \int R^2\, dm$

$I_{CM} = \frac{1}{2} MR^2$



$I = I_{CM} + Md^2$

3-5-2011

1.5 Teorema dos eixos paralelos.

O momento de inércia de um corpo rígido não é uma propriedade intrínseca do corpo pois depende do eixo relativamente ao qual é calculado. Quando o corpo rígido roda em torno de um eixo paralelo a outro eixo, afastado do primeiro de uma distância *d*, que passe pelo centro de massa do corpo, o momento de inércia do corpo rígido quando roda em torno do primeiro eixo é:

$$\boxed{I = I_{\mathrm{CM}} + M\,d^2}$$

1.6 Problema 2. A Terra, que não é uma esfera uniforme, possui momento de inércia igual a $0{,}3308\ M\,R^2$ *em relação a um eixo que liga o pólo Sul ao pólo Norte. Determine a energia cinética* da Terra: $R = 6380\,km$ $M_1 = 5{,}98\times10^{24}\,kg$ $d = 1{,}5\times10^{11}\,m$

a) para a rotação em torno do eixo pólo Sul-pólo Norte;

b) para o movimento orbital da Terra em torno do Sol. $E_{c_{Rot}} = \frac{1}{2} I w^2$

$W = \frac{2\pi}{T}\ \frac{rad}{s}$

$W = \frac{V}{R} = \frac{2\pi R}{TR}$

a) $E_{cRot} = 8{,}05\times10^{31} \times \left(\frac{2\pi}{86400}\right)^2 = 2{,}145\times10^{29}\,J$

b) $E_c = \frac{1}{2}(I_{CM} + M_d^2) \times \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 = 2{,}66\times10^{33}\,J$

$T = 86400\times365$

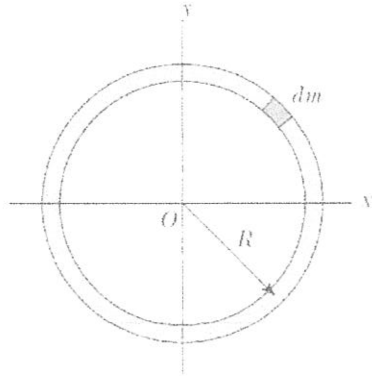
1.7 Cálculo de momentos de inércia:

a) Anel

$\int R^2\,dm = R^2 \int_0^L \lambda\,dx = R^2\lambda L = MR^2$

$\lambda = \frac{dm}{dx} = \frac{M}{L}$

$L = 2\pi R$



b) Barra rígida

$I = \int x^2\,dm = \lambda \int_{-L/2}^{L/2} x^2\,dx = \lambda\left[\frac{x^3}{3}\right]_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} = \frac{2\lambda}{3}\left(\frac{L}{2}\right)^3 = \frac{1}{12} ML^2$