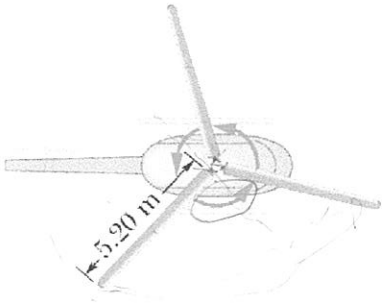
1.8 Problema 3. Cada uma das três pás da hélice do helicóptero da figura tem 5,20 m de comprimento e 240 kg de massa. A hélice roda com uma frequência de 350 rpm.

a) Qual é o momento de inércia da hélice relativamente ao eixo de rotação?

b) Qual é a energia cinética de rotação da hélice?



a) $I = \frac{1}{12} ML^2 + M\left(\frac{L}{2}\right)^2$

$I = \frac{1}{3} ML^2 = 2163,2$ (1 pá)

$I = 6,49 \times 10^3 \, kg\,m^2$

b) $E_c = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3} ML^2\right)\omega^2 = 4,36$

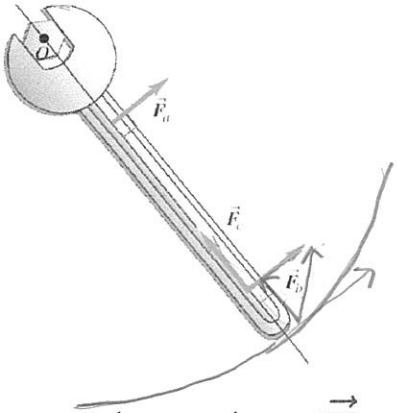
$\omega = 2\pi f = 36,63$

$f = 350 \frac{rot}{1min} \times \frac{1min}{60s} \times$ 5,83

Corpo Rígido 2: Dinâmica do movimento

2. Por mais complexo que seja o movimento de um corpo rígido, é sempre possível decompor o movimento numa soma do movimento de **translação do centro de massa** com o movimento de **rotação em torno de um eixo que passa pelo centro de massa**. Iremos estudar este movimento quando o eixo de rotação não muda de direcção.

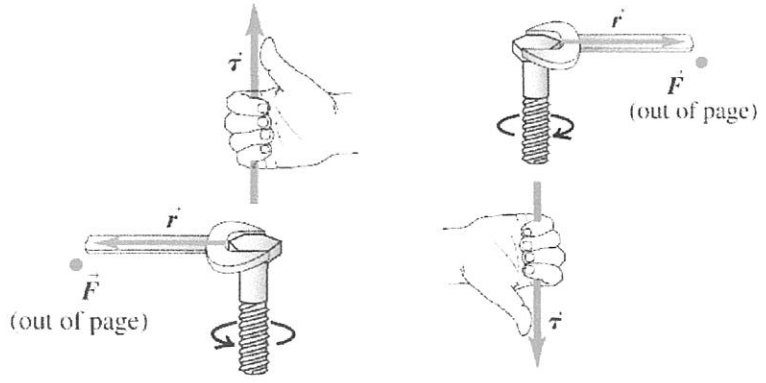
2.1 *Com qual das 3 forças será mais fácil fazer rodar a porca? Quais os factores que influenciam esse movimento?*



$\vec{\tau} = \vec{r} \wedge \vec{F}$

$\|\vec{\tau}\| = \|\vec{r}\| \times \|\vec{F}\| \times \operatorname{sen} \measuredangle(\vec{r}, \vec{F})$

2.2 Torque de uma força:

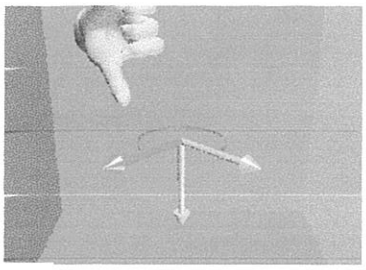


$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}$$

$\vec{r} = x\hat{e}_x + y\hat{e}_y + z\hat{e}_z$

$\vec{F} = F_x\hat{e}_x + F_y\hat{e}_y + F_z\hat{e}_z$

$$\vec{r} \wedge \vec{F} = \begin{vmatrix} \hat{e}_x & \hat{e}_y & \hat{e}_z \\ x & y & z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} = \begin{matrix} (-1)^{1+1}\hat{e}_x(yF_z - zF_y) \\ (-1)^{1+2}\hat{e}_y(xF_z - zF_x) \\ (-1)^{1+3}\hat{e}_z(xF_y - yF_x) \end{matrix}$$



Quanto mais afastado do ponto de aplicação menos será o torque. $\vec{\tau}$

http://web.mit.edu/8.02t/www/802TEAL3D/visualizations/vectorfields/CrossProduct/crossProd.htm

2.3 O que faz um corpo rígido rodar?

Qual a lei do movimento de rotação?

A força tangencial faz o corpo rígido rodar

$$\vec{a} = \frac{\sum \vec{F}}{m} \longrightarrow \alpha_t = \frac{F_t}{m}$$

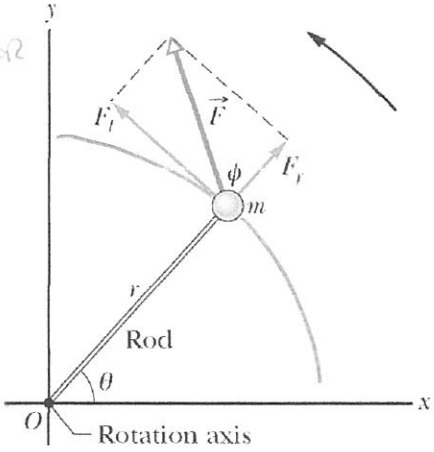
$\alpha R^2 m = R F_t$

$\boxed{I\vec{\alpha} = \vec{\tau}}$ torque

momento inércia

$\vec{a}_t = \vec{\alpha} \wedge \vec{R}$

$a_t = \alpha R$



2.4 2ª Lei de Newton para a rotação de um corpo rígido em torno de um eixo:

$$\sum \vec{\tau} = I\vec{\alpha}$$

O torque das forças aplicadas no corpo tem de ser calculado relativamente a um ponto do eixo de rotação!

O momento de inércia do corpo rígido tem de ser calculado relativamente ao eixo de rotação!

2.5 Filme: Angular acceleration machine

O peso, quando mais perto do centro, maior a aceleração angular

m=100g, r=5cm m=200g, r=5cm m=200g, r=10 cm

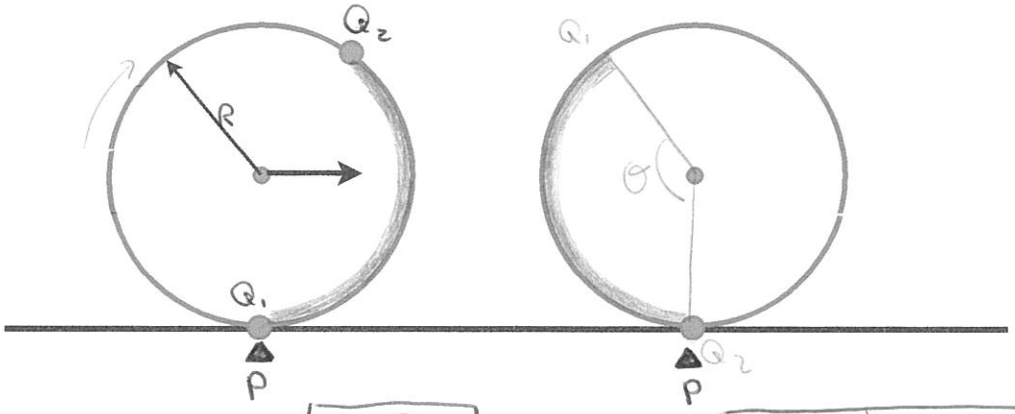
relação entre a aceleração angular e magnitude do torque.

Quando o torque duplicou, a aceleração angular duplicou

Quando o torque quadruplicou, a aceleração angular quadruplicou

2.6 Rotação de um corpo rígido em torno de um eixo móvel: rolamento sem deslizamento.

P: ponto contacto com solo



$\boxed{s = R\theta}$

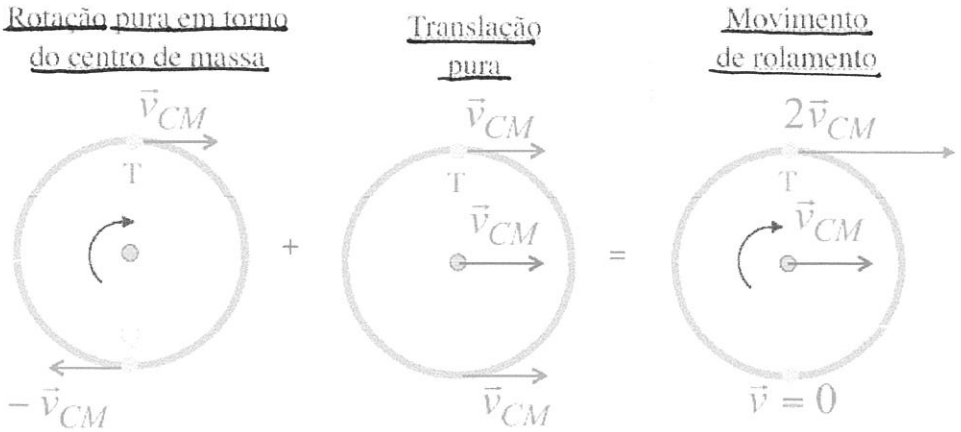
distância entre os 2 P's

$\boxed{\vec{v}_{CM} = \frac{ds}{dt}\hat{e}_n = \omega R\,\hat{e}_n}$

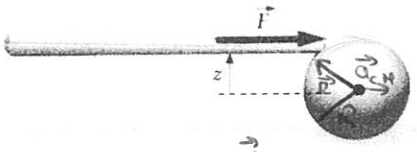
A condição para que haja rolamento sem deslizamento é que se verifique a seguinte relação entre a velocidade do centro de massa e a velocidade angular:

$$\boxed{v_{\mathrm{CM}} = \omega R}$$

2.7 O rolamento sem deslizamento pode ser interpretado como:



2.8 Uma taco de bilhar bate horizontalmente numa bola num ponto desta que se situa uma distância *z*, medida na vertical, acima do centro da bola. Determine o valor de *z* tal que a bola role sem escorregar desde o início do movimento. Apresente a resposta em função do raio *R* da bola.



$\boxed{V = \omega R}$ $\quad \boxed{\vec{a}_{CM} = \frac{\vec{F}}{m}}$ $\quad \boxed{\vec{\alpha} = \frac{\vec{\tau}}{I}}$ torque

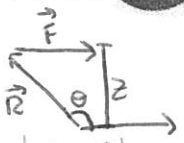
$\frac{d}{dt}$ $\quad$ mom. Inércia

$a = \alpha R$

$a = \boxed{\frac{F}{m} = \alpha R = \frac{FzR}{\frac{2}{5}mR^2}}$

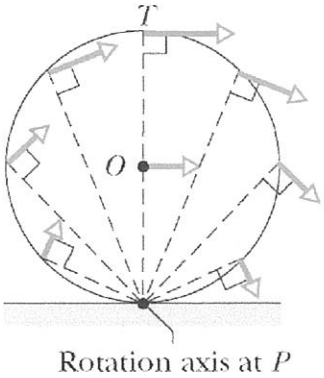
$z = \frac{2R}{5}$

mom. Inércia de uma esfera



$|\vec{R} \wedge \vec{F}| = RF\,\mathrm{sen}\,\theta = Fz$

2.9 O ponto de contacto com o solo tem velocidade instantânea nula (não havendo deslizamento)! Este ponto pode ser interpretado como um eixo de rotação instantâneo!

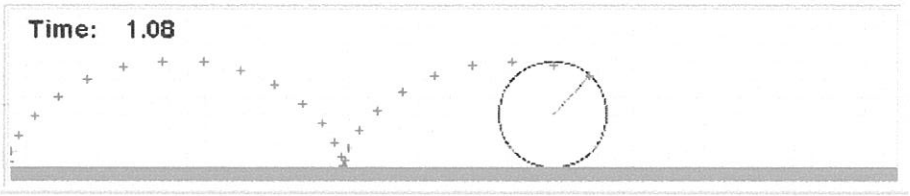


$E_C = \frac{1}{2} I_P w^2$

$I_P = I_{CM} + MR^2$

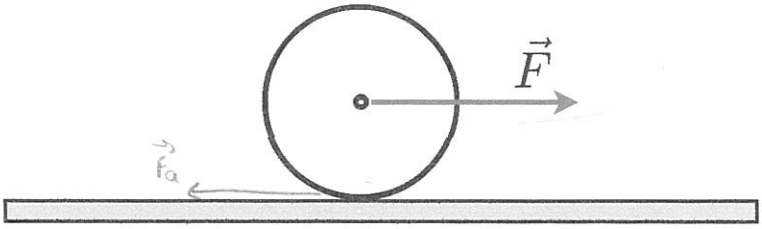
$E_C = \frac{1}{2} I_{CM} w^2 + \frac{1}{2} M \underbrace{R^2 w^2}_{V_{CM}^2}$

2.10 A ciclóide: uma curva muito curiosa



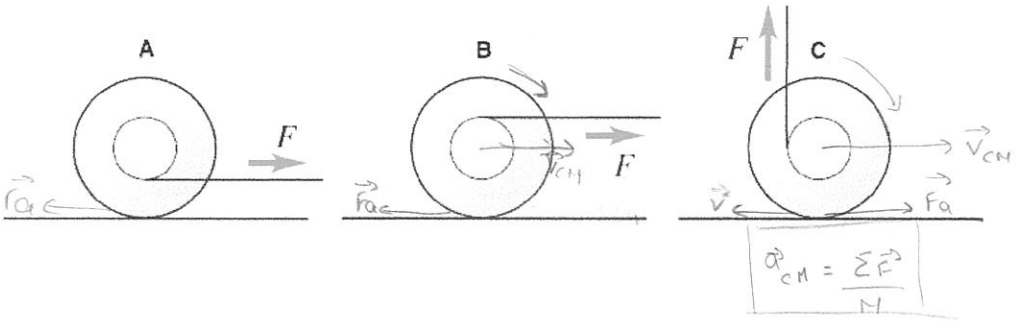
http://pessoa.fct.unl.pt/jcs/Physlets/contents/mechanics/rotations2/prob11_1.html

2.11 O que acontece se puxarmos uma roda, como mostra a figura?



10-05-2011 Se não houver atrito há deslizamento.

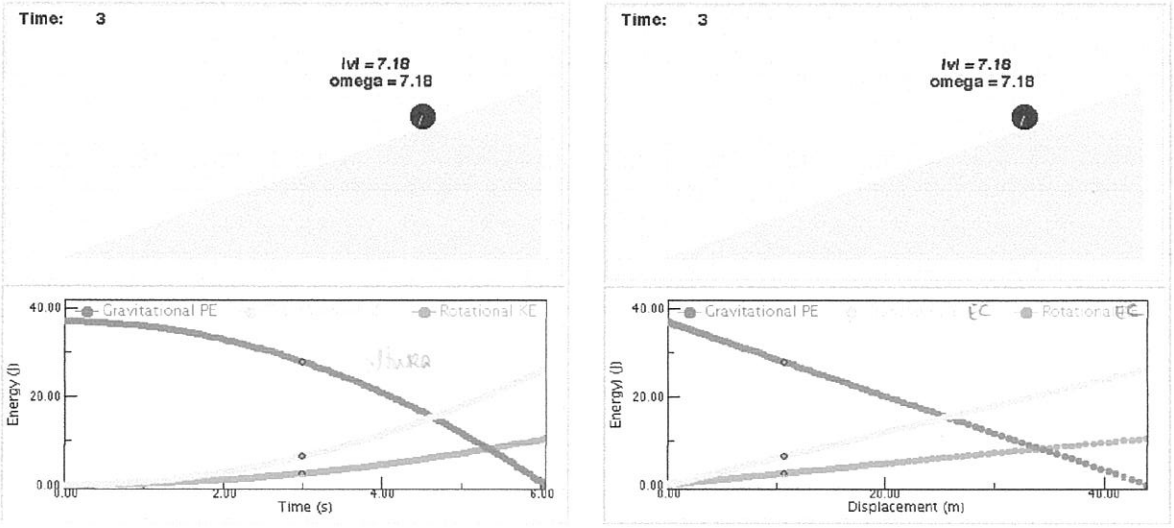
2.12 Os três ioiôs da figura são puxados pelas forças representadas. Para que lado se vão deslocar?



2.13 Em que sentido aponta a força de atrito quando um corpo:

a) rola por um plano inclinado abaixo? b) rola por um plano inclinado acima?

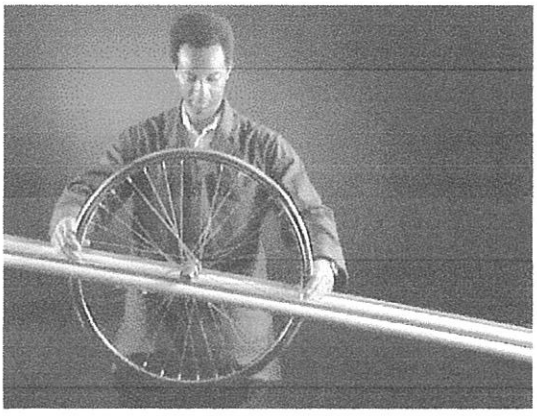
2.14 A energia no movimento de rotação



http://pessoa.fct.unl.pt/jcs/Physlets/contents/mechanics/rotations2/illustration11_3.html

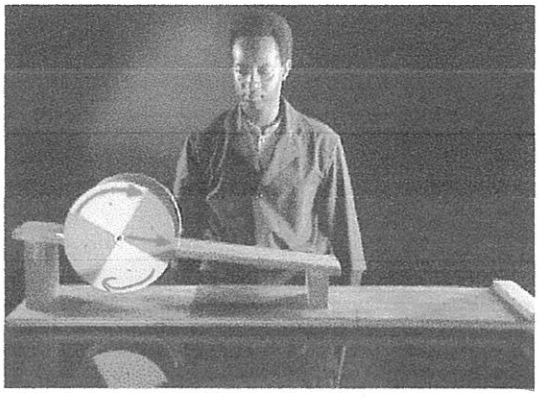
$W = \vec{F} \cdot \underbrace{d\vec{r}}_{\text{deslocamento}}$

2.15 A energia potencial gravítica é convertida…

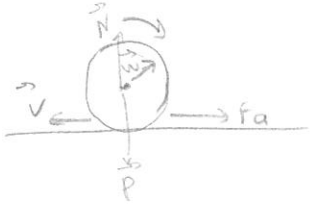


2.16 O que acontecerá a este ioiô gigante quando os discos laterais tocarem no chão?

$I\vec{\alpha} = \vec{\tau}$



Quando toca no chão, a velocidade angular diminui, e v_{CM} aumenta, devido à F_a.



$\vec{a}_{CM} = \frac{F_a}{M}$

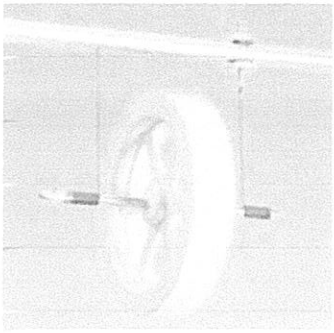
A F_a faz com que a_{CM} aumente

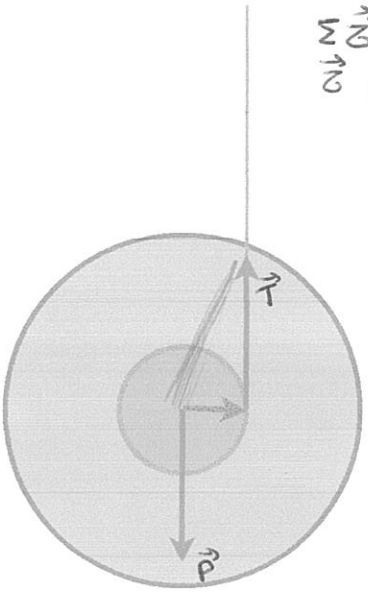
$\sum \vec{\tau} = I\vec{\alpha}$

$\vec{\tau} = \vec{R} \wedge \vec{F}$

$a_{CM} = \frac{P - T}{m}$

2.17 O ioiô de Maxwell

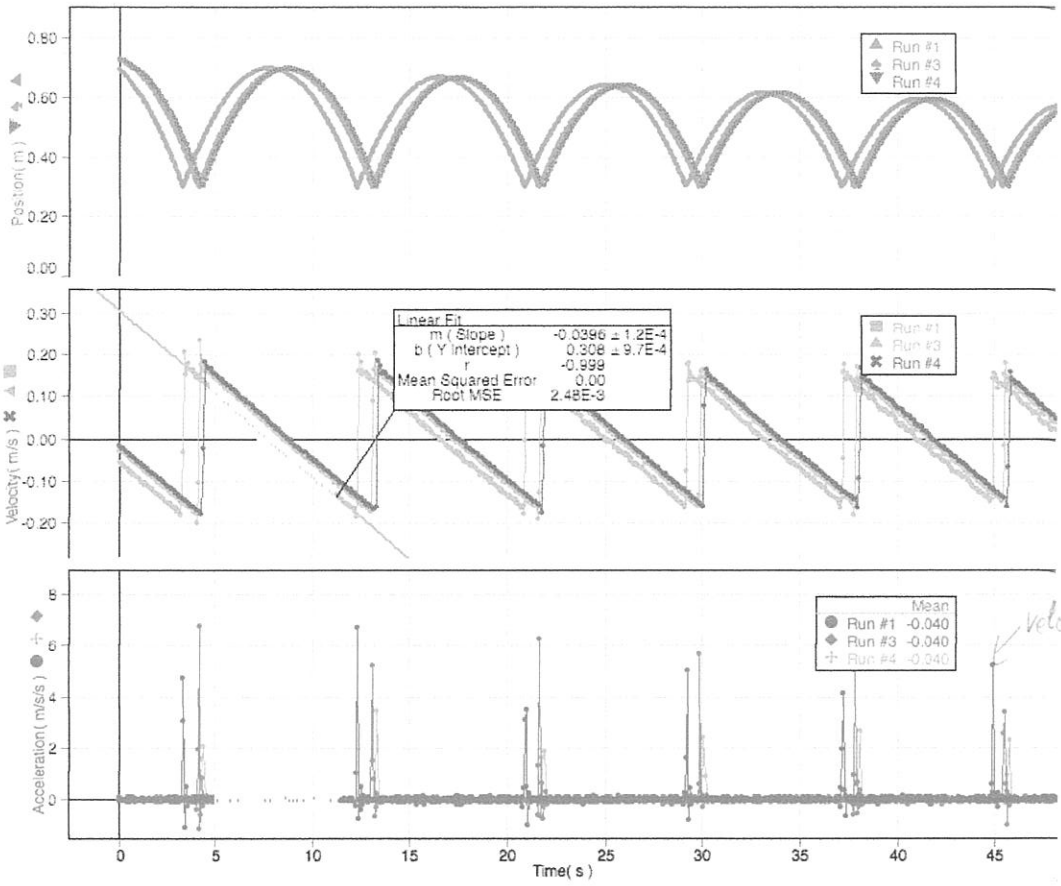




$$\vec{a}_{\mathrm{CM}} = \frac{\sum \vec{F}}{m}$$

$$\vec{\alpha} = \frac{\sum \vec{\tau}}{I}$$

$$\vec{a}_{\mathrm{CM}} = \vec{\alpha} \times \vec{r}$$



velocidade desacelerada

Dos gráficos da velocidade ou da aceleração temos que a aceleração do centro de massa durante a descida vale 0,40 m/s². Isto permite calcular o momento de inércia do anel (como?). O resultado é $I = 9{,}93$ kg.cm².

$m = 452g$ $R = 3mm$

Também podemos calcular o raio de giração — o raio do anel equivalente, que possui o mesmo momento de inércia — do ioiô:

$$I = mr_g^2$$

$\boxed{\vec{a}_{CM} = \vec{\alpha} \times \vec{R}}$

$0{,}4 = \frac{0{,}452 \times 9{,}8 - T}{0{,}452} \Leftrightarrow T = 0{,}4 \times 0{,}452 - 0{,}452 \times 9{,}8$

$T = 4{,}41\,N$

$\vec{\alpha} = \frac{0{,}4}{0{,}003} = 13{,}3$

$\boxed{\vec{\tau} = \vec{R} \wedge \vec{F}} = 0{,}003 \times (4{,}41) = 0{,}1323$

$\boxed{I = \frac{\sum \vec{\tau}}{\alpha}} = \frac{0{,}1323}{13{,}3} = 9{,}95 \times 10^{-4}\,Kgm^2$

$\Downarrow$

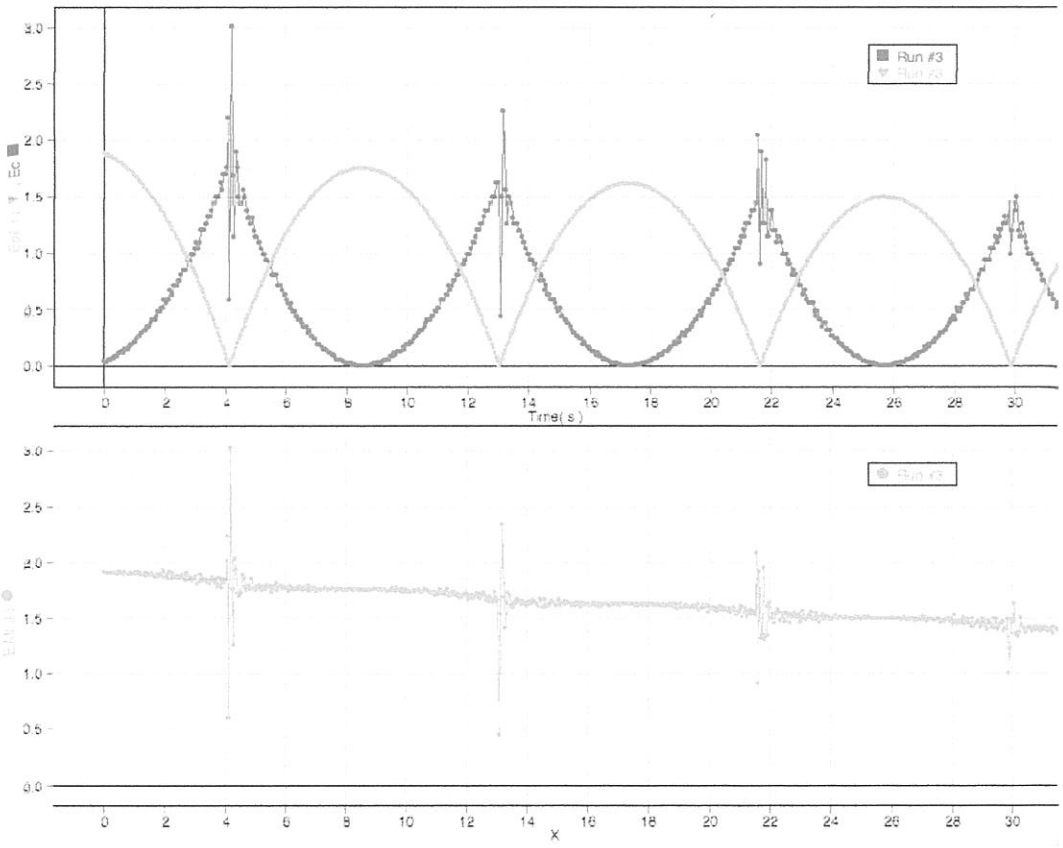
$9{,}95\,Kgcm^2$

$R_g = \sqrt{\frac{9{,}95 \times 10^{-4}}{0{,}452}} = 0{,}05\,m = 5cm$

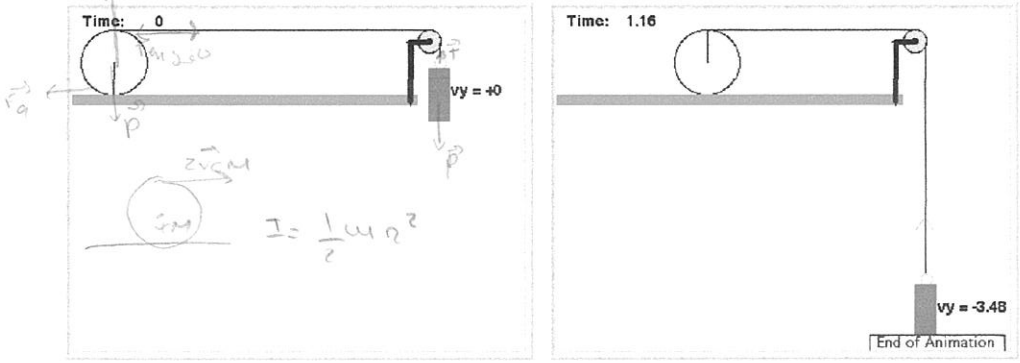
E quanto à energia? Para além da energia potencial do centro de massa, temos as energias cinéticas de translação do centro de massa e de rotação do ioiô em torno do eixo que passa pelo centro de massa. Mostre que a energia mecânica, que é a soma daquelas três energias, se pode escrever como:

$$E_{\text{Mec}} = mgh_{\text{CM}} + \frac{1}{2}m\left(1 + \left(\frac{r_{\text{g}}}{r}\right)^2\right)v_{\text{CM}}^2$$

$$E_M = mgh + \frac{1}{2}mv_{CM}^2 + \frac{1}{2}\overset{mR_g^2}{I}\overset{}{\omega^2}\frac{v_{CM}}{R}$$



2.18 Exercício: Qual a massa do disco? O raio do disco é igual a 30 cm, a massa suspensa vale 0,11 kg e desceu 2,0 m. Despreze a influência da roldana.



$\sum \vec{\tau} = I\vec{\alpha}$

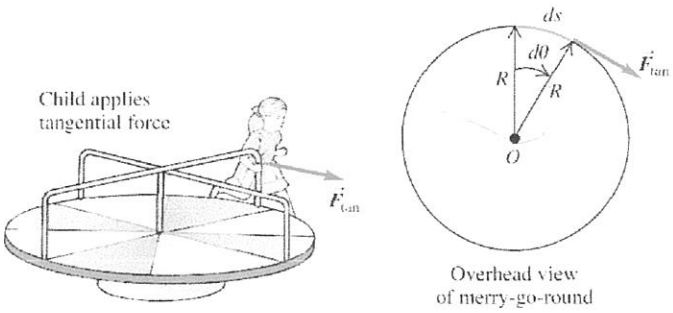
$RT = I\alpha$

$I = \frac{1}{2}mR^2$

http://pessoa.fct.unl.pt/jcs/Physlets/contents/mechanics/rotations2/prob11_6.html

E_{pg}

2.19 No movimento de rotação, as forças também realizam trabalho:



$$\boxed{dW = \vec{F} \cdot d\vec{r}} \rightarrow P = \vec{F} \cdot \vec{v}$$

$dW = F\,dR$

$dW = (F \cdot R)\,d\theta$

$dW = \tau\,d\theta$

2.20 Qual a potência do torque aplicado sobre um corpo em rotação?

$$\boxed{P = \frac{dW}{dt}} = \frac{\tau\,d\theta}{dt} = \tau\omega$$

2.21 Então, no movimento de rotação o trabalho realizado por uma força depende do torque dessa força relativamente ao eixo de rotação. E quanto vale o trabalho do torque resultante?

$\Sigma \vec{\tau} = I\vec{\alpha}$

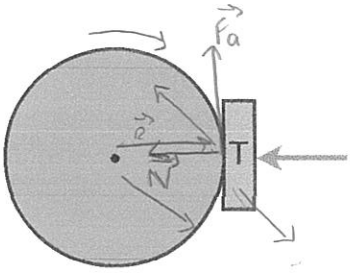
$$dW = \tau\,d\theta$$

$$W_{RES} = \int dW = \int \tau_{RES}\,d\theta = \int I \frac{d\omega}{dt}\,d\theta = \int_{\omega_i}^{\omega_f} I\omega\,d\omega = \frac{1}{2} I(\omega_f^2 - \omega_i^2) = \Delta E_{c\,rot}$$

O trabalho realizado pelo torque resultante sobre um corpo rígido que roda em torno de um eixo fixo e igual á variação da energia cinética de rotação do corpo.

2.22 Problema. Um disco de massa 400 g e raio 50 cm, roda em torno do seu eixo com velocidade angular ω_0 = 2,97 rad/s quando um travão T é encostado à sua periferia, como se mostra na figura. O *coeficiente de atrito cinético entre o disco e o travão é* μ_c = 0,2. A velocidade angular do disco varia então de acordo com: $\omega = \omega_0 - 0{,}2\,t$.

α



a) Quantas voltas dá o disco até parar?

b) *Calcule as componentes da força que o travão exerce sobre o disco:*

i) na direcção tangente ao bordo do disco;

ii) na direcção do raio do disco.

$F_a = \mu_c N$

c) Calcule o trabalho realizado pela força exercida pelo travão até o disco parar.

a) $\omega_0 = 2{,}97$ rad/s

$\omega = \omega_0 - 0{,}2t \rightarrow t = 14{,}8$ s

$n = \frac{\Delta\theta}{2\pi} = 3{,}5$ rot

$\Delta\theta = \omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2 \Rightarrow \Delta\theta = 22$ rad

b) $\Sigma\vec{\tau} = I\vec{\alpha} \Rightarrow R F_a = \frac{1}{2} m R^2 \alpha = 0{,}02$ N

$\vec{a}_{CM} = \frac{\Sigma \vec{F}}{m} = 0$

$\vec{\tau} = \vec{R} \wedge \vec{F}$

$N = \frac{F_a}{\mu_c} = 0{,}1$ N

c) $W = \tau\Delta\theta$

$W = \Delta E_{c,rot}$

$|W| = 0{,}22$ J

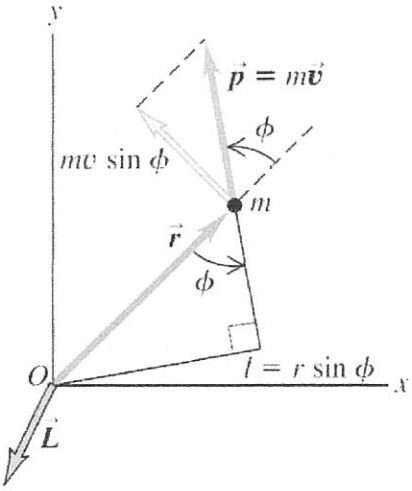
$W = -0{,}22$ J

Física para Informática - 2010/2011

Ficha de trabalho - **Momento Angular**

1. O momento angular de uma partícula ou de um corpo rígido pode ser visto como um análogo do momento linear para o caso do movimento de rotação. A importância do momento angular resulta principalmente do seu princípio de conservação.

1.1 Consideremos novamente uma partícula que se move num movimento circular. O momento angular da partícula é definido como o produto vectorial do seu vector posição pelo momento linear:



$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$$

$\vec{L} = I\vec{\omega}$

1.2 Em que condição é que o momento angular se conserva? Deriva-se $\vec{L}$ em ordem a t:

$$\frac{\mathrm{d}\vec{L}}{\mathrm{d}t} = \frac{d\vec{r}}{dt} \wedge \vec{p} + \vec{r} \wedge \frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{v} \wedge (mv + \vec{r} \wedge \vec{F}_{res}$$

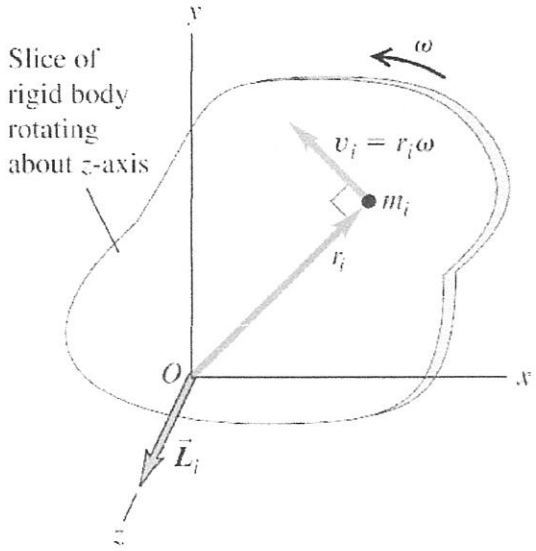
$$\frac{d\vec{p}}{dt} = m\frac{d\vec{v}}{dt} = m\vec{a} = \Sigma\vec{F} \qquad \frac{d\vec{L}}{dt} = I\frac{d\vec{\omega}}{dt} = I\vec{\alpha} = \Sigma\vec{\tau}$$

1.3 Princípio de conservação do momento angular de uma partícula: a taxa de variação do momento angular de uma partícula é igual ao torque da força resultante que actua sobre ela:

$$\frac{\mathrm{d}\vec{L}}{\mathrm{d}t} = \vec{\tau}_{\vec{F}_{\mathrm{res}}}$$

1.3 E para um corpo rígido? Também se define momento angular, generalizando a definição de momento angular de um ponto material. Se o eixo de rotação for um **eixo de simetria** do corpo, então o momento angular do corpo rígido é:

$$\vec{L} = I\,\vec{\omega}$$



1.4 No caso do corpo rígido, em que condição é que o momento angular se conserva?

$$\frac{\mathrm{d}\vec{L}}{\mathrm{d}t} = I\frac{d\vec{\omega}}{dt} = I\vec{\alpha} = \sum\vec{\tau}$$

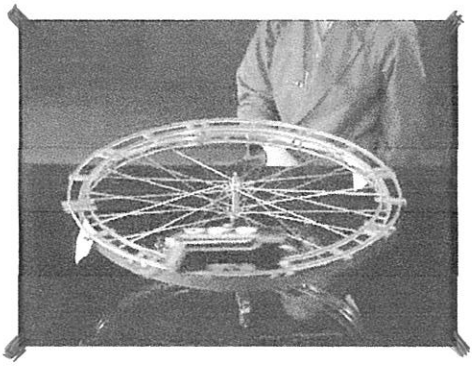
A taxa de variação do momento angular total de um corpo rígido é igual ao torque resultante de todas as forças que actuam sobre ele. Portanto, o momento angular total de um corpo rígido conserva-se quando o _____ for _____ .

1.5 Determine o momento angular do ponteiro dos segundos de um relógio de parede analógico. Trate este ponteiro como uma barra fina de comprimento 15,0 cm e massa 6,0 g que gira com velocidade angular constante em torno de uma das suas extremidades.

$\vec{L} = I\vec{\omega}$

1.6 Um exemplo de conservação do momento angular de um sistema: um combóio numa pista circular

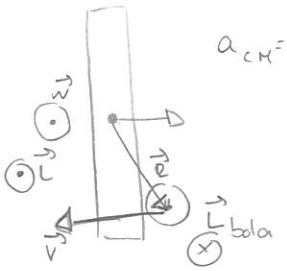
momento angular da roda aponta para cima, e do combóio para baixo.



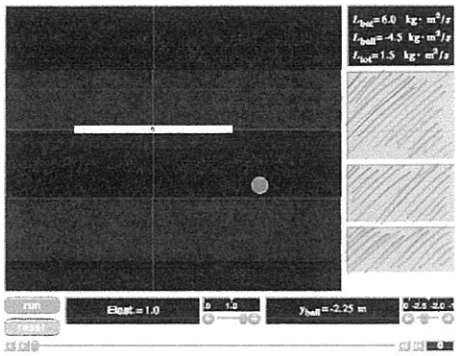
1.7 Demonstração: o banco e a roda

⊙ aponta para nós.
⊗ aponta para lá.

1.8 Exercício: Ball hits bat, ActivPhysics 7.14



$a_{CM} = \frac{\sum \vec{F}}{m}$



não existe conservação do momento linear.

http://wps.aw.com/aw_young_physics_11/0,8076,898586-,00.html

Dados: a massa da bola azul é 0,50 kg; o momento de inércia da barra amarela é 3,0 kg·m².

A simulação começa com a barra tendo uma velocidade angular igual a 2,0 rad/s. Qual o momento angular inicial da barra? A bola tem uma velocidade linear inicial igual a -[redacted]4 m/s e está a uma distância 0,75 m. Qual o momento angular inicial da bola?

$\vec{L} = I\vec{w}$

$\|\vec{L}_b\| = 2,25m \times 0,5kg \times 4m/s = 4,5 kgm^2$

$L = 3kgm^2 \times 2 rad/s = 6 kgm^2/s$

$L_{total} = 1,5 kgm^2/s$ uma vez que têm sentidos contrários.

Em que circunstância é que a barra fica parada após a colisão?

$\frac{1}{2} m v_i^2 + \frac{1}{2} I w_i^2 = \frac{1}{2} m v_f^2 + 0$

Em que circunstância é que a barra tem uma velocidade angular após a colisão simétrica da velocidade angular inicial?

$$\begin{cases} \frac{1}{2} m v_i^2 + \frac{1}{2} I w_i^2 = \frac{1}{2} m v_f^2 + \frac{1}{2} I w_i^2 \\ R m v_i \hat{e}_z - I w_i \hat{e}_z = R m (v_f) \hat{e}_z + I |w_f| \hat{e}_z \end{cases}$$

1.9 Problema 2. Um carrossel com 2,0 m de raio e 500 kg.m² de momento de inércia gira em torno do seu eixo, sem atrito, executando uma volta completa a cada 5 segundos.

a) Uma criança, com 25 kg, está inicialmente no centro do carrossel e depois caminha até à borda da plataforma. Calcule a velocidade angular do carrossel quando a criança chega à borda.

b) Desta vez, a criança está fora do carrossel; ela salta para cima do carrossel, ao longo de uma direcção que contém o eixo do carrossel, e fica de pé junto à borda do carrossel. Qual a velocidade angular final do carrossel e da criança?

a) $L_i = I w + \cancel{R m v} = L_f = I w_f + R_f m w_f R_f$

w_{tos}

distância do centro.

b) Estar fora ou dentro do carrossel é a mesma coisa, portanto o resultado é o mesmo.

Física para Informática - 2010/2011

Ficha de trabalho - **Movimento Periódico**

1. Um movimento que se repete diz-se periódico, ou oscilatório. Acontece quando um corpo possui uma posição de equilíbrio estável e uma força (ou um torque) actua sobre o corpo quando ele é afastado da sua posição de equilíbrio.

1.1 Ao tempo que o corpo demora a executar uma oscilação completa chama-se período

1.2 Ao número de oscilações que o corpo executa por unidade de tempo chama-se frequência

$$f = \frac{1}{T}$$

1.3 Ao valor absoluto do afastamento máximo em relação à posição de equilíbrio chama-se amplitude

$x(t) = a\cos wt + b\,\text{sen}\,wt$

$x(t) = A\cos(wt + \phi)$

$\vec{a} = \frac{\Sigma \vec{F}}{m} \Leftrightarrow \vec{a} = \frac{-k}{m}\vec{x}$

$\Rightarrow a = -\frac{k}{m}x \Leftrightarrow \frac{\partial^2 x}{\partial^2 t} = -\frac{k}{m}x$ ($\frac{k}{m} \to w^2$)

$\Rightarrow w = \sqrt{\frac{k}{m}} = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f$ (freq. angular)

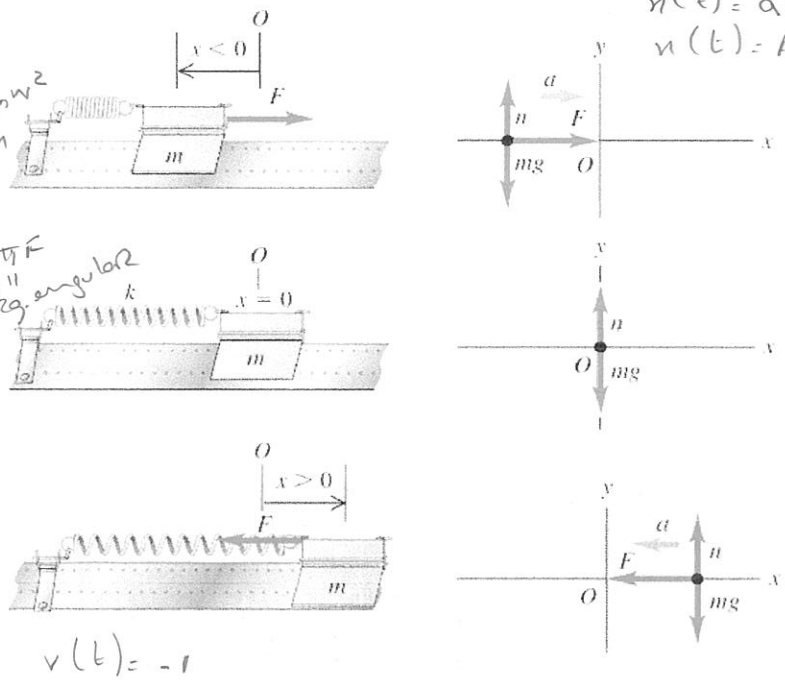
A: amplitude

w: freq. angular

$\phi \to$ ang. na origem

$T = \sqrt{\frac{m}{k}}$

$v(t) = \frac{\partial x}{\partial t}$ $a(t) = \frac{\partial v}{\partial t}$ $v(t) = -$



2. O Movimento Harmónico Simples

Ocorre quando a força restauradora é directamente proporcional ao deslocamento do corpo relativamente à posição de equilíbrio:

$$\vec{F} = -k\,\vec{x}$$

Em muitos casos, esta condição é satisfeita quando a amplitude de oscilação é pequena.

2.1 A 2ª lei de Newton aplicada a esta situação:

2.2 Qual a equação do movimento?

$$\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} = -\frac{k}{m}\,x$$

2.3 Apenas as funções seno e cosseno possuem uma 2ª derivada igual à função original multiplicada por uma constante negativa. Fazendo $\omega^2 = k/m$, a solução mais geral é:

$$x(t) = a\cos(wt) + b\sin(wt)$$

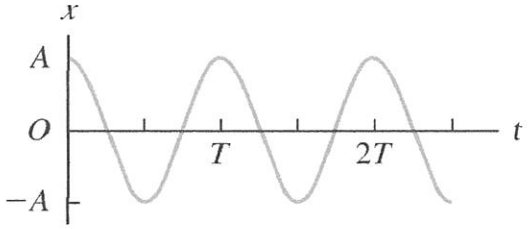
E pode ser escrita na forma:

$$x(t) = A\cos(wt + \theta)$$

A é a amplitude do movimento

w é a frequência angular: $\omega = \frac{2\pi}{T}$

θ é a fase na origem (para $t = 0$)

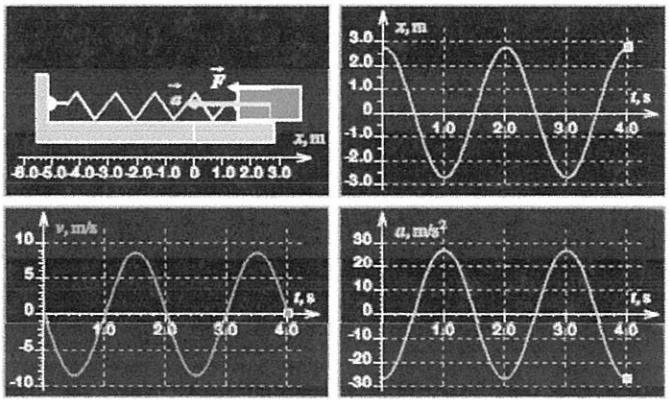


2.4 O período de oscilação num MHS só depende da massa do corpo e da constante elástica:

$T = \sqrt{\frac{m}{k}}$

2.5 A velocidade e a aceleração num MHS:

$$v = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = -A\,w\,\mathrm{sen}(wt + \theta) \qquad a = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = -A\,w^2\cos(wt + \theta) = -w^2 x(t)$$



http://media.pearsoncmg.com/bc/aw_young_physics_11/pt1a/Media/Vibrations/DescVibMotion/Main.html
(Question 6)

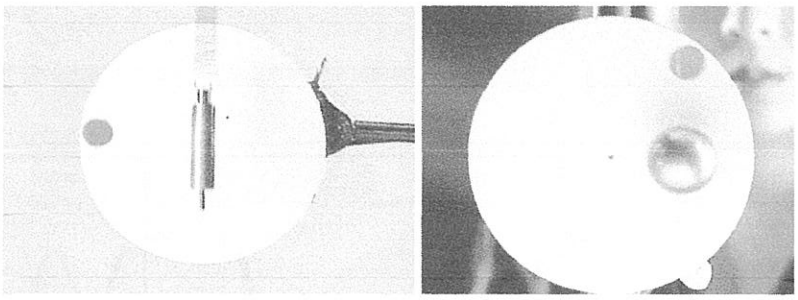
3. A corda de um piano emite um dó médio vibrando com uma frequência fundamental de 220 Hz. Calcule o período e a frequência angular da vibração da corda. (R: 4,54 $\times 10^{-3}$ s; 1,38 $\times 10^{3}$ rad/s)

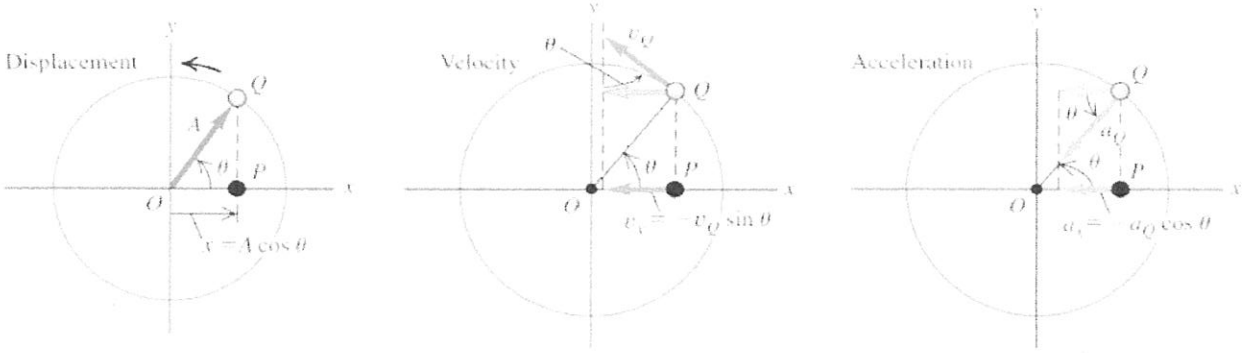
4 O movimento circular e o MHS

$x = R\cos\theta = R\cos(\omega t + \theta_0)$

$\theta = \theta_0 + \omega t$

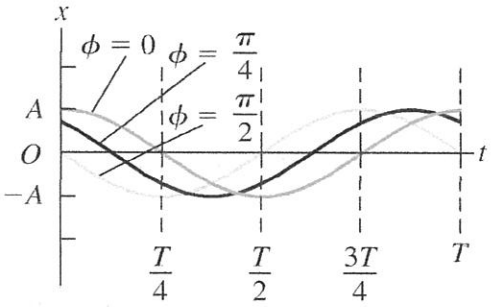
$v = \frac{2\pi R}{T}$



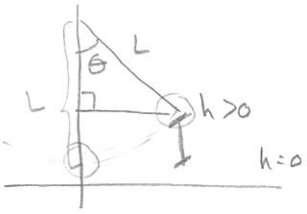


A velocidade angular, ω, num movimento circular uniforme é igual à frequência angular, ω, de um movimento harmónico simples.

5 A fase na origem



5.1 Um corpo de massa 100 g oscila preso a uma mola cuja constante elástica vale 1,6 N/m. No instante em que um cronómetro começa a contar o tempo, o corpo está a 3 cm da posição de equilíbrio e desloca-se com uma velocidade de -8 cm/s. Obtenha as equações da posição e da velocidade do movimento do corpo.



$h = L - L\cos\theta$

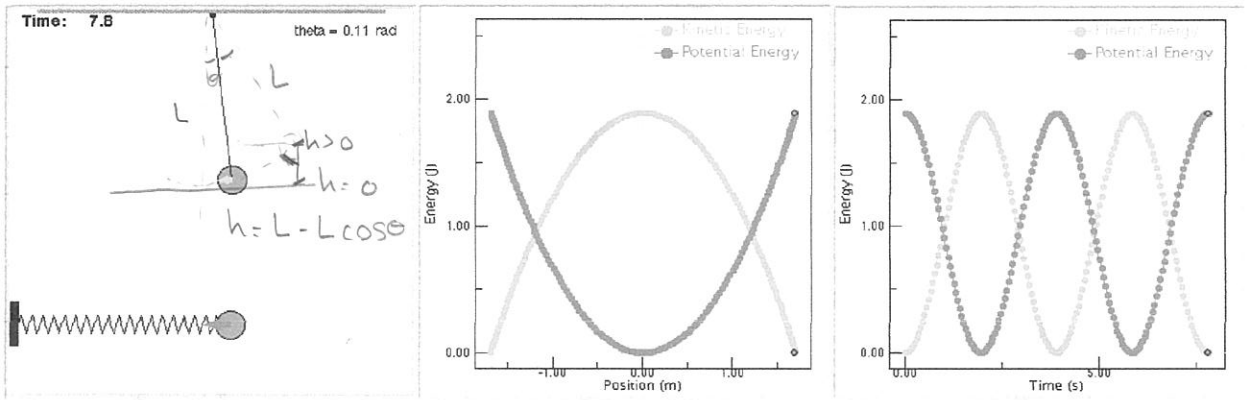
6. A energia no MHS

A energia mecânica de um sistema que execute um MHS conserva-se se desprezarmos o efeito das foças dissipativas como o atrito. A energia mecânica é a soma da energia cinética com a energia potencial - elástica, no caso do sistema massa-mola, gravítica, no caso do pêndulo.

Para o sistema massa-mola: $E_M = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2$ afastamento da mola em relação ao ponto de equilíbrio

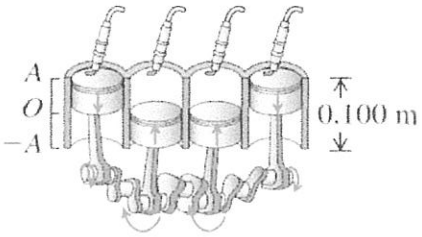
ponto máximo $= 0 + \frac{1}{2}kA^2$

Para o pêndulo: $E_M = \frac{1}{2}mv^2 + mgh = \frac{1}{2}mv^2 + mgL(1-\cos\theta) = mgL(1-\cos\theta_{máx})$ ponto máximo



http://pessoa.fct.unl.pt/jcs/Physlets/contents/oscillations_waves/periodic_motion/illustration16_3.html

7. O movimento do pistão no interior do motor de um carro é aproximadamente um MHS.



a) Sabendo que o percurso (o dobro da amplitude) é igual a 0,100 m e que o motor gira a 3500 rpm, calcule a aceleração do pistão no final do percurso.
↳ quando $x = A$

b) Sabendo que a massa do pistão é igual a 0,450 kg, qual é a força resultante exercida sobre ele no final do percurso?

c) Calcule a velocidade e a energia cinética do pistão no ponto médio do percurso.
↳ ponto de equilíbrio $(x = 0)$

d) Qual é a potência média necessária para acelerar o pistão do repouso até à velocidade calculada na alínea c) ?

(R: a) $6{,}72\times10^3$ m/s²; b) 3,02 kN; c) 18,3 m/s; 75,6 J; d) 17,6 kW)

a) $x(t) = A\cos(\omega t + \phi)$

$v(t) = -A\omega\,\text{sen}(\omega t + \phi)$

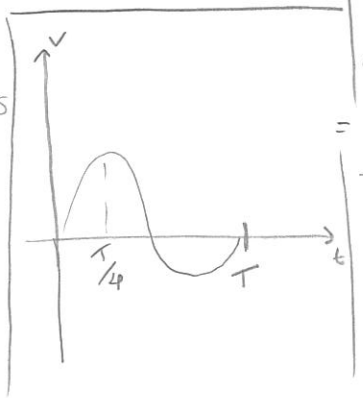
$a(t) = -\omega^2 x(t) \rightarrow a(x=A) = \omega^2 A = 6{,}72\times10^3\ m/s^2$

$A = 0{,}05\ m$

$\omega = 2\pi f = 2\pi \times \frac{3500}{60} = 366{,}5\ rad/s$

$\phi = \arccos\left(\frac{x_0}{A}\right)$; $x_0 = A \Rightarrow \phi = 0$

$(t=0)$



b) $m = 450\ g$

$F = ma$

$F = 450 \times 6{,}72\times10^3 = 3024\ N$

c) $v_{máx} = A\omega = 18{,}3\ m/s$

$E_c = \frac{1}{2}mv^2 = 75{,}6\ J$

d) $P = \frac{W}{\Delta t} = \frac{\Delta E_c}{T/4} = \frac{75{,}6}{1/4\, f} = 17{,}6\ kW$

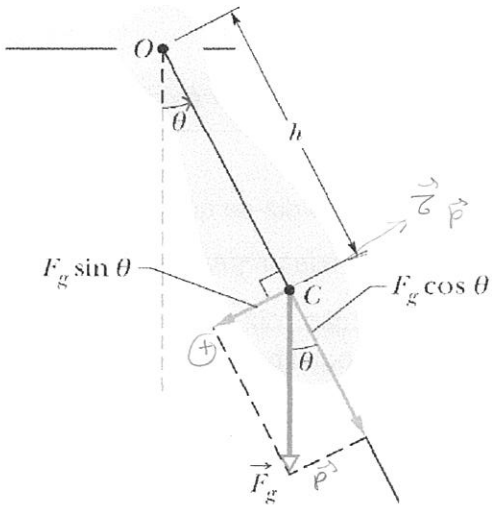
$f = \frac{3500}{60}$

$W = \Delta E_c$

$\vec{F}_{dR} \cdot \vec{d} = d\left(\frac{1}{2}mv^2\right)$

8. Os pêndulos

8.1 O pêndulo físico é qualquer pêndulo real: um corpo que oscila em torno de um eixo de rotação.



Torque do peso: $\Sigma \vec{\tau} = I\vec{\alpha}$ $\quad |\vec{\tau}_p| = hmg\,\text{sen}\,\theta$

$\vec{\tau} = \vec{r} \wedge \vec{F}$

Equação do movimento: $\dfrac{d^2\theta}{dt^2} = -\dfrac{hmg}{I}\,\text{sen}\,\theta$

$\theta = \theta_{max}\cos(\omega t + \phi)$

Para ângulos pequenos: $\theta_{pequeno} \Rightarrow \text{sen}\,\theta \simeq \theta$

mola: $\dfrac{d^2x}{dt^2} = \dfrac{-kx}{m}$

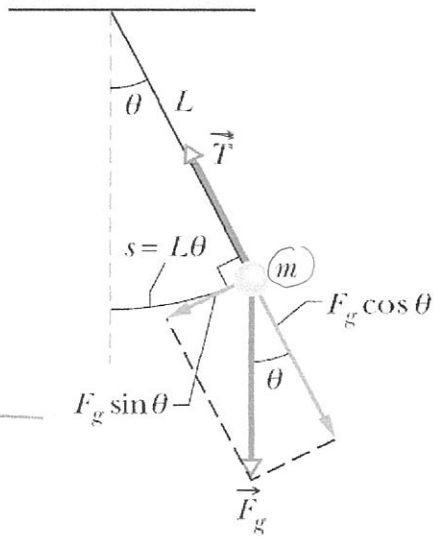
$\omega = \sqrt{\dfrac{hmg}{I}}$

MHS com frequência angular:

movimento harmónico simples

E período: $T = \dfrac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\dfrac{I}{hmg}}$

8.2. O pêndulo simples é uma idealização. O momento de inércia do corpo de massa *m* (tratado como um ponto material) que oscila suspenso por um fio de comprimento *L* é (calculado relativamente ao ponto de suspensão do fio): $I = m\,L^2$



$T = 2\pi\sqrt{\dfrac{\cancel{m}L^2}{\cancel{m}mg}} = 2\pi\sqrt{\dfrac{h}{g}}$ $\quad L = h$

$\omega = \sqrt{\dfrac{g}{h}}$

$\vec{F}_a = -b\vec{v}$

$\vec{F}_{el} = -k\,\vec{\Delta x}$

medido em relação à posição de eq.

9. Oscilações amortecidas

Quando estão presentes forças dissipativas, como o atrito, a energia não se conserva: a amplitude do movimento oscilatório vai diminuindo e o movimento diz-se amortecido.

9.1 Consideremos uma força dissipativa directamente proporcional à velocidade: $\vec{F}_a = -b\vec{v}$

$\vec{F}_{el} = -kx$

A equação do movimento é agora:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{k}{m}x - \frac{b}{m}\frac{dx}{dt}$$

$x = A e^{-\frac{b}{2m}t}\cos(\omega t + \phi)$

9.2 Quando a força de amortecimento é pequena quando comparada com a força restauradora, a solução da equação do movimento é:

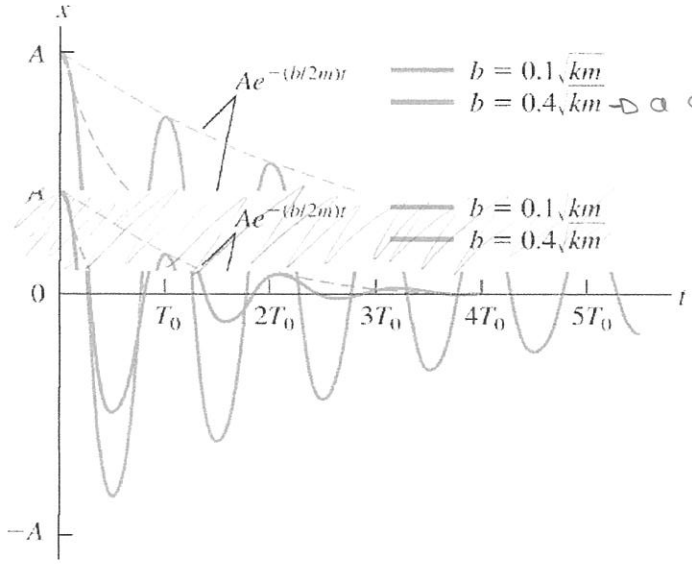
E a frequência angular é dada por: $w = \sqrt{w_0^2 - \left(\frac{b}{2m}\right)^2} \rightarrow w_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$

Nesta situação diz-se que há sub-amortecimento

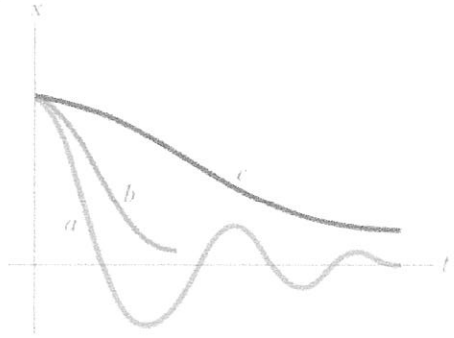
9.3 A frequência angular anula-se quando b = $2m w_0 = 2\sqrt{km}$ → ao atingir este valor deixa de ter mov. oscilatório

Nesta situação, diz-se que o amortecimento é crítico: quando deslocado, o sistema retoma a posição de equilíbrio sem oscilar

9.4 Quando $\boxed{b > 2\sqrt{k*m}}$ há sobre-amortecimento: o sistema retoma a posição de equilíbrio mais lentamente do que quando o amortecimento é crítico



→ a amplitude tende + rapidamente p/ 0



10. Oscilações forçadas

Um oscilador amortecido perde energia. Esta perda pode ser compensada pela aplicação de uma força exterior variando sinusoidalmente com o tempo:

$$F = F_0 \cos(\omega_f t)$$

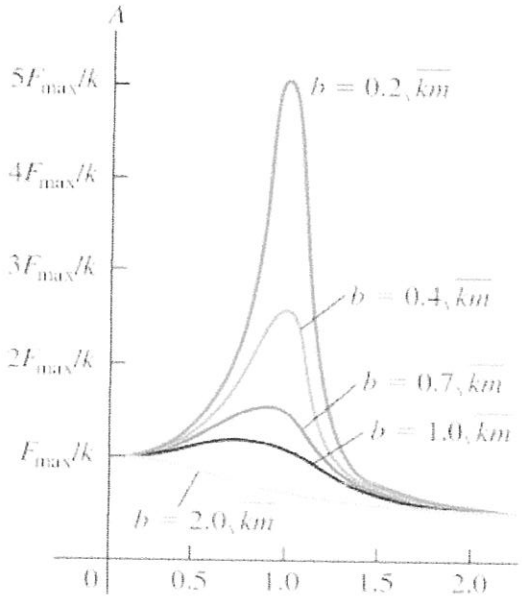
10.1 O movimento resultante é uma oscilação forçada. A amplitude de oscilação é:

amplitude da força externa

$$A = \frac{F_0/m}{\sqrt{\left(\omega_f^2 - \omega_0^2\right)^2 + \left(\frac{b\omega_f}{m}\right)^2}}$$

$F_0 \Rightarrow$ F máximo

Anulando o atrito:
quando $b \to 0$, então
$A \to +\infty$

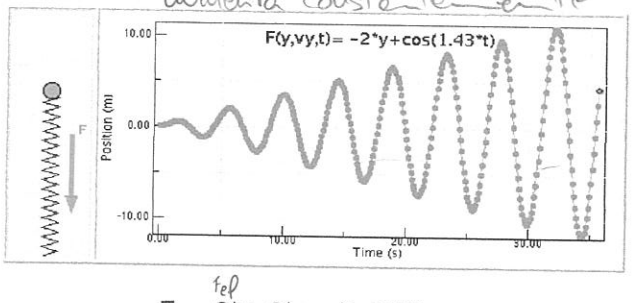


ω_f/ω_0
↓ ↳ frequência natural de oscilação
freq. da força ext

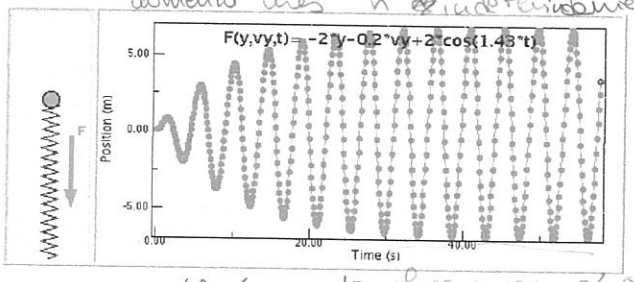
A amplitude de oscilação atinge um máximo para uma frequência da força externa próxima da frequência natural de oscilação.

A amplitude de oscilação é tanto maior quanto menor for a força dissipativa.

aumenta constantemente

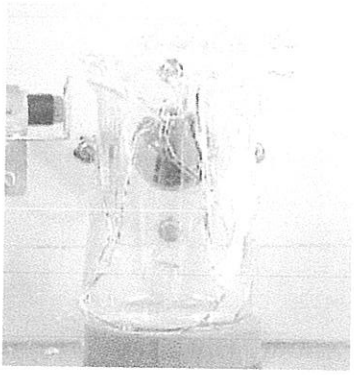


aumento mas ñ indefinidamente



F_{el}
F = -2*y+2*cos(1.43*t)

F_{el} F_a transfere energia p/ o sistema
F = -2*y-0.2*vy+2*cos(1.43*t)

http://pessoa.fct.unl.pt/jcs/Physlets/contents/oscillations_waves/periodic_motion/ex16_6.html

10.2 Oscilações forçadas e ressonância