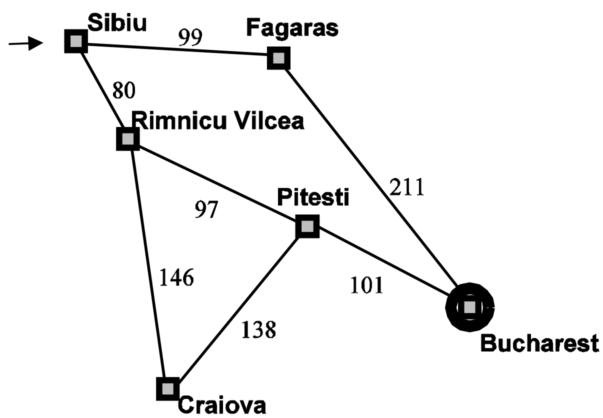
07/Jan/2010 – 17h-20h	**Inteligência Artificial – 2009/10** **DI/FCT/UNL, Duração: 3h**	**Exame: Época Normal**

GRUPO I

I.1) Considere que se pretende descobrir o caminho mais curto para ir por estrada de Sibiu a Bucareste. A figura seguinte representa um excerto do mapa da Roménia, com algumas das principais cidades e respectivas ligações por estrada. A cada ligação entre duas cidades está associado um número que representa os quilómetros a percorrer para se ir de uma cidade à outra por essa ligação. A tabela da direita representa a distância em linha recta entre cada uma das cidades e Bucareste.



Distância em linha recta a Bucareste:

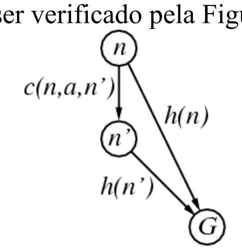
Sibiu:	**253 km**
Fagaras:	**176 km**
R. Vilcea:	**193 km**
Pitesti:	**100 km**
Craiova:	**160 km**

Diga se é consistente uma heurística que em cada nó devolve a distância em linha recta (em km) entre a respectiva cidade e Bucareste. Justifique.

Resposta:
Para que a heurística seja consistente é necessário que para todo o nó *n* e o seu sucessor *n*' gerado pela acção *a*:

$$h(n) \leq c(n,a,n') + h(n')$$

Uma heurística que em cada nó devolve a distância em linha recta (em km) entre a respectiva cidade e Bucareste é consistente uma vez h(*n*) devolve sempre a menor distância possível entre *n* e Bucareste e portanto será sempre menor ou igual a c(*n*,*a*,*n*') + h(*n*') como pode ser verificado pela Figura (onde Bucareste é representado pelo nó G):



I.2) Resolva o problema da alínea anterior usando o algoritmo A* com a heurística mencionada. Especifique a ordem de expansão dos nós efectuada pelo algoritmo, indique a solução encontrada e o seu custo. Para se referir a cada uma das cidades use a respectiva inicial.

Resposta:
Partindo do estado inicial S, os conteúdos das listas aberta e fechada em cada iteração do algoritmo de procura em grafos A* até atingir uma solução são:

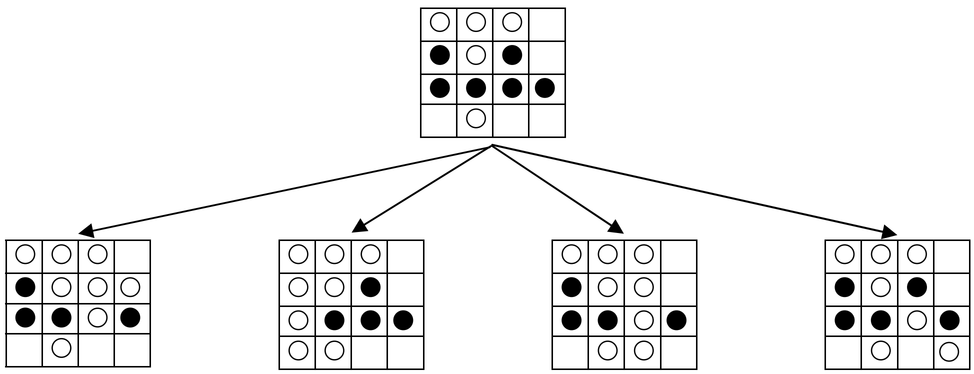
Lista Aberta:	S(253)	R(273), F(275)	F(275), P(277), C(386), S(413)
Lista Fechada:		S(253)	S(253), R(273)

P(277), B(310), C(386) , S(413) , S(451)	B(278), B(310), C(386) , S(413), S(451) , R(467), C(475)
S(253), R(273), F(275)	S(253), R(273), F(275), P(277)

Sendo assim, a ordem de expansão dos nós seria S, R, F, P até atingir o estado objectivo B.

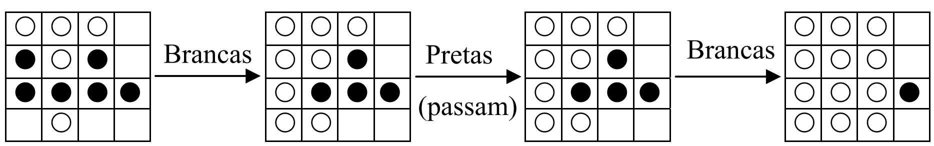
A solução encontrada seria S-R-P-B com custo 278.

I.3) O Reversi (Othello) é um jogo disputado entre dois jogadores num tabuleiro cujo objectivo é ficar com mais peças que o adversário. Os jogadores jogam alternadamente e o jogo termina quando todas as casas do tabuleiro estiverem ocupadas com peças ou quando nenhum jogador puder fazer uma jogada válida. O Reversi é jogado com peças especiais, brancas de um lado e pretas do outro. Na sua vez, o jogador coloca uma peça no tabuleiro com a sua cor virada para cima. O jogador não pode jogar uma peça em qualquer lugar: tem de capturar uma ou mais peças do adversário em cada jogada. As peças capturadas são viradas (a sua cor muda) e tornam-se peças do jogador que fez a jogada. Se o jogador não consegue capturar nenhuma peça do adversário na posição actual, deve passar a vez ao seu adversário. O jogador deve jogar a sua peça de forma a encurralar horizontal, vertical ou diagonalmente uma linha de peças consecutivas do adversário entre duas das suas peças. A figura seguinte apresenta um exemplo (num tabuleiro de 4×4) que ilustra todas as possíveis jogadas das brancas a partir da posição inicial **A**:



Suponha que as brancas usam um algoritmo MINMAX com limite de profundidade 2 e as pretas um algoritmo MINMAX com limite de profundidade 1. Ambos utilizam uma função de avaliação que conta o número de peças da sua cor e desconta o número de peças da cor do adversário. Sendo a vez das brancas a jogar, indique a sequência de jogadas desde a posição inicial **A** até ao final do jogo.

Resposta:



Termina o Jogo
(nem as Pretas nem as
Brancas podem jogar)

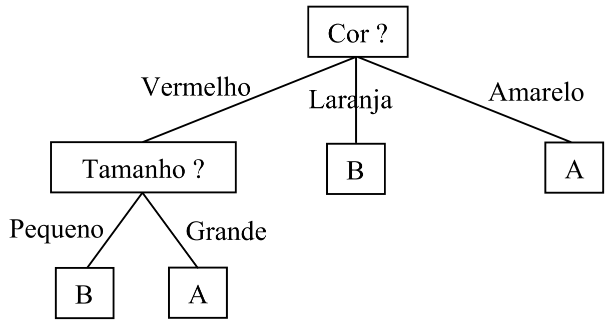
I.4) Pretende-se aprender uma árvore de decisão para classificar objectos em duas classes (A ou B) a partir dos seus atributos de cor (Vermelho, Laranja ou Amarelo) e de tamanho (Pequeno ou Grande). Desenhe a árvore de decisão induzida pelo algoritmo DTL a partir do conjunto de exemplos representado na tabela seguinte.

Cor	**Tamanho**	**Classe**	**Nº Exemplos**
Vermelho	Pequeno	A	20
Vermelho	Pequeno	B	30
Vermelho	Grande	A	40
Vermelho	Grande	B	10
Laranja	Pequeno	A	10
Laranja	Pequeno	B	20
Laranja	Grande	A	10
Laranja	Grande	B	40
Amarelo	Pequeno	A	20

De acordo com a árvore de decisão obtida, como seria classificado um objecto Pequeno e Vermelho? e um objecto Pequeno e Laranja?

Resposta:

A árvore de decisão induzida pelo algoritmo DTL seria:



De acordo com a árvore de decisão:

um objecto Pequeno e Vermelho seria classificado como pertencente à classe B;
um objecto Pequeno e Laranja seria classificado como pertencente à classe B.

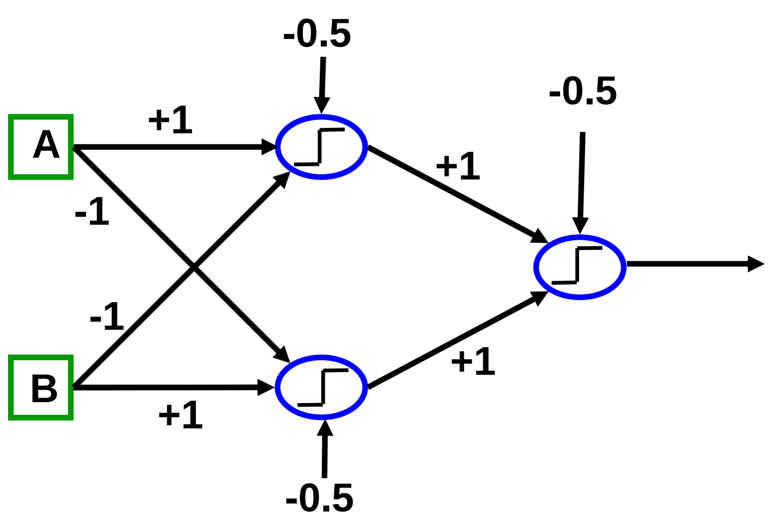
I.5) Construa uma rede neuronal que implemente a função booleana **A XOR B** representada na tabela seguinte:

A	**B**	**A XOR B**
1	1	0
1	0	1
0	1	1
0	0	0

A rede neuronal deve utilizar apenas neurónios com função de activação limiar (ou degrau). Recorda-se que a função limiar tem o valor 1 quando o seu argumento é maior ou igual a zero; tendo o valor 0 caso contrário.
Sugestão: pense no problema como uma disjunção de duas conjunções.

Resposta:

A XOR B $\Leftrightarrow$ $(A \wedge \neg B) \vee (\neg A \wedge B)$



GRUPO II

Pretende-se usar um algoritmo genético para encontrar uma solução de um problema com n variáveis $x_1,\ldots, x_n$ e m equações $f_1(x_1,\ldots, x_n) = 0,\ldots, f_m(x_1,\ldots, x_n) = 0$. Sabe-se que as variáveis só podem ter valores inteiros entre 0 e 100000 inclusive.

II.1) Explique como representaria cada individuo da população.

Resposta:
Cada individuo seria representado por uma sequência de n valores inteiros no intervalo [0,100000], correspondendo ao valores das variáveis do problema.

cromossoma:

v_1	v_2	v_3	…	v_{n-2}	v_{n-1}	v_n

$$\forall_{1\le i\le n} v_i \in \{0,1,2,\ldots,100000\}$$

II.2) Defina uma função de mérito apropriada ao problema.

Resposta:
Assumindo que o objectivo é minimizar o seu valor, uma função de mérito apropriada ao problema seria:

$$\sum_{i=1}^{m} \left| f_i(v_1,\ldots,v_n) \right|$$

em que cada termo do somatório representaria a distância entre o valor obtido pela respectiva função e o valor pretendido (0 para todas as funções).

II.3) Defina um operador de recombinação apropriado ao problema.

Resposta:
Um operador de recombinação apropriado ao problema seria a recombinação uniforme, utilizando uma máscara gerada aleatoriamente para misturar os valores das variáveis de ambos os progenitores, ficando os seus filhos com valores de algumas variáveis de um progenitor e os valores das restantes variáveis do outro progenitor.

II.4) Defina um operador de mutação apropriado ao problema.

Resposta:
Um operador de mutação apropriado ao problema seria a escolha aleatória de uma variável e a mudança do seu valor para um número inteiro aleatório entre 0 e 100000.

II.5) Sugira um algoritmo trepa-colinas para integrar no algoritmo genético com o objectivo de melhorar a qualidade de um indivíduo.

Resposta:
Um algoritmo trepa-colinas apropriado ao problema poderia ter uma vizinhança definida pelo incremento ou decremento do valor de cada uma das variáveis do individuo. Dos $2n$ indivíduos da vizinhança escolher-se-ia o que tivesse menor valor da função de mérito repetindo-se o processo até se atingir um mínimo local (ou global, quando o valor da função de mérito for 0).

GRUPO III

Pretende-se usar a linguagem SMODELS para resolver um problema de coloração de mapas. O problema consiste em atribuir cores às diferentes regiões do mapa de modo a que não haja duas regiões adjacentes com a mesma cor. Assuma que o problema é representado pelos seguintes predicados:

predicado	**significado**
region(*x*)	*x* é uma região do mapa
adjacent(*x*,*y*)	a região *x* é adjacente à região *y*
color(*x*)	*x* é uma cor que pode ser usada no mapa
colorOf(*x*,*y*)	a região *y* tem a cor *x*
hasColor(*x*)	existe pelo menos uma região com a cor *x*

III.1) Defina uma regra que obrigue a que nos modelos estáveis cada região tenha uma e só uma cor.

Resposta:

```
1{colorOf(C,R): color(C)}1 :- region(R).
```

III.2) Defina uma restrição de integridade que impeça a existência de dois países adjacentes com a mesma cor.

Resposta:

```
:-region(R1;R2),color(C),colorOf(C,R1),colorOf(C,R2),adjacent(R1,R2),neq(R1,R2).
```

III.3) Defina uma regra que torne o predicado hasColor(*x*) verdadeiro sempre que exista pelo menos uma região com a cor *x*.

Resposta:

```
hasColor(C) :- region(R), color(C), colorOf(C,R).
```

III.4) Acrescente uma regra (ou restrição de integridade) que impeça a existência de mais de 3 cores no mapa.

Resposta:

```
{hasColor(C): color(C)}3.
```

GRUPO IV

Com a recente epidemia de gripe A, estima-se que cerca de 10% dos pacientes que aparecem nas urgências de um determinado hospital têm esta doença. 90% dos pacientes com gripe A apresenta um conjunto de sintomas característico que pode ser facilmente verificado pelo médico. No entanto, os mesmos sintomas também aparecem em 20% dos que não sofrem de gripe A. Neste hospital podem ser realizados dois testes, T1 e T2, para obter mais informação sobre a existência ou não de gripe A num paciente. Para o teste T1, a frequência de falsos positivos e falsos negativos é de 5% e 10%, respectivamente. Para o teste T2, a frequência de falsos positivos e falsos negativos é de 1% e 20%, respectivamente. A política corrente do hospital é internar todos os pacientes que apresentem pelo menos dois destes três indicadores de gripe A (sintomas, T1 positivo, T2 positivo). Se o paciente apresentar apenas um (ou nenhum) destes indicadores, então não será internado.

IV.1) Modele a situação anterior com uma rede de Bayes, indicando as variáveis aleatórias, seus domínios, topologia da rede e tabelas de probabilidade condicionada.

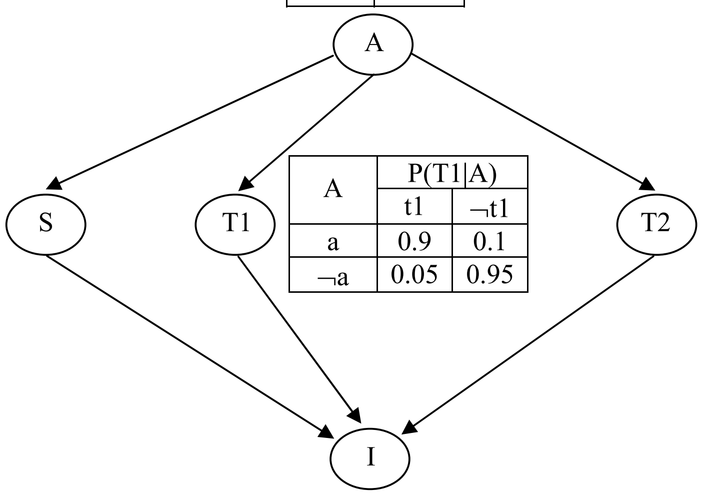
Resposta:

Variáveis aleatórias, seus domínios e respectivo significado:

Variável	Domínio	Significado
A	true	tem gripe A
	false	não tem gripe A
S	true	apresenta sintomas característicos
	false	não apresenta sintomas característicos
T1	true	resultado positivo no teste T1
	false	resultado negativo no teste T1
T2	true	resultado positivo no teste T2
	false	resultado negativo no teste T2
I	true	internado
	false	não internado

Topologia da rede e tabelas de probabilidade condicionada:

A	P(A)
a	0.1
¬a	0.9



A	P(S|A)	
	s	¬s
a	0.9	0.1
¬a	0.2	0.8

A	P(T1|A)	
	t1	¬t1
a	0.9	0.1
¬a	0.05	0.95

A	P(T2|A)	
	t2	¬t2
a	0.8	0.2
¬a	0.01	0.99

S	T1	T2	P(I|S,T1,T2)	
			i	¬i
s	t1	t2	1	0
s	t1	¬t2	1	0
s	¬t1	t2	1	0
s	¬t1	¬t2	0	1
¬s	t1	t2	1	0
¬s	t1	¬t2	0	1
¬s	¬t1	t2	0	1
¬s	¬t1	¬t2	0	1

IV.2) Calcule a probabilidade de um paciente ser internado neste hospital.

Resposta:

$$P(i)=\sum_A\sum_S\sum_{T1}\sum_{T2}P(A,S,T1,T2,i)=\sum_A\sum_S\sum_{T1}\sum_{T2}P(A)P(S|A)P(T1|A)P(T2|A)P(i|S,T1,T2)$$

$$=\sum_A P(A)\sum_S P(S|A)\sum_{T1}\sum_{T2}P(T1|A)P(T2|A)P(i|S,T1,T2)$$

$$=P(a)\sum_S P(S|a)\sum_{T1}\sum_{T2}P(T1|a)P(T2|a)P(i|S,T1,T2)+P(\neg a)\sum_S P(S|\neg a)\sum_{T1}\sum_{T2}P(T1|\neg a)P(T2|\neg a)P(i|S,T1,T2)$$

$$=0.1\left(P(s|a)\sum_{T1}\sum_{T2}P(T1|a)P(T2|a)P(i|s,T1,T2)+P(\neg s|a)\sum_{T1}\sum_{T2}P(T1|a)P(T2|a)P(i|\neg s,T1,T2)\right)$$

$$+0.9\left(P(s|\neg a)\sum_{T1}\sum_{T2}P(T1|\neg a)P(T2|\neg a)P(i|s,T1,T2)+P(\neg s|\neg a)\sum_{T1}\sum_{T2}P(T1|\neg a)P(T2|\neg a)P(i|\neg s,T1,T2)\right)$$

$$=0.1\left(0.9\sum_{T1}\sum_{T2}P(T1|a)P(T2|a)P(i|s,T1,T2)+0.1\sum_{T1}\sum_{T2}P(T1|a)P(T2|a)P(i|\neg s,T1,T2)\right)$$

$$+0.9\left(0.2\sum_{T1}\sum_{T2}P(T1|\neg a)P(T2|\neg a)P(i|s,T1,T2)+0.8\sum_{T1}\sum_{T2}P(T1|\neg a)P(T2|\neg a)P(i|\neg s,T1,T2)\right)$$

$$=0.1(0.9(P(t1|a)P(t2|a)+P(t1|a)P(\neg t2|a)+P(\neg t1|a)P(t2|a))+0.1(P(t1|a)P(t2|a)))$$

$$+0.9(0.2(P(t1|\neg a)P(t2|\neg a)+P(t1|\neg a)P(\neg t2|\neg a)+P(\neg t1|\neg a)P(t2|\neg a))+0.8(P(t1|\neg a)P(t2|\neg a)))$$

$$=0.1(0.9(0.9\times 0.8+0.9\times 0.2+0.1\times 0.8)+0.1(0.9\times 0.8))$$

$$+0.9(0.2(0.05\times 0.01+0.05\times 0.99+0.95\times 0.01)+0.8(0.05\times 0.01))$$

$$=0.1(0.9(0.72+0.18+0.08)+0.1(0.72))+0.9(0.2(0.0005+0.0495+0.0095)+0.8(0.0005))$$

$$=0.1(0.9(0.98)+0.1(0.72))+0.9(0.2(0.0595)+0.8(0.0005))$$

$$=0.1(0.882+0.072)+0.9(0.0119+0.0004)=0.1(0.954)+0.9(0.0123)=0.0954+0.01107=0.10647$$

IV.3) Calcule a probabilidade de um paciente com gripe A não ser internado neste hospital.

Resposta:

$$P(\neg i|a)=\frac{P(\neg i,a)}{P(a)}=\frac{P(\neg i,a)}{0.1}$$

$$P(\neg i,a)=\sum_S\sum_{T1}\sum_{T2}P(a,S,T1,T2,\neg i)=\sum_S\sum_{T1}\sum_{T2}P(a)P(S|a)P(T1|a)P(T2|a)P(\neg i|S,T1,T2)$$

$$=0.1\left(P(s|a)\sum_{T1}\sum_{T2}P(T1|a)P(T2|a)P(\neg i|s,T1,T2)+P(\neg s|a)\sum_{T1}\sum_{T2}P(T1|a)P(T2|a)P(\neg i|\neg s,T1,T2)\right)$$

$$=0.1(0.9(P(\neg t1|a)P(\neg t2|a))+0.1(P(\neg t1|a)P(\neg t2|a)+P(\neg t1|a)P(t2|a)+P(t1|a)P(\neg t2|a)))$$

$$=0.1(0.9(0.1\times 0.2)+0.1(0.1\times 0.2+0.1\times 0.8+0.9\times 0.2))=0.1(0.9(0.02)+0.1(0.28))=0.0046$$

$$P(\neg i|a)=\frac{P(\neg i,a)}{P(a)}=\frac{0.0046}{0.1}=0.046$$

IV.4) Suponha que o hospital pretende adoptar uma política de internamentos mais rigorosa que apenas permita o não internamento dos pacientes que não apresentem nenhum dos três indicadores de gripe A. Indique como alterava a rede Bayesiana anterior para modelar esta nova situação.

Resposta:
Apenas seria necessário alterar a tabela de probabilidade condicionada para a variável I:

S	T1	T2	P(I|S,T1,T2)	
			i	¬i
s	t1	t2	1	0
s	t1	¬t2	1	0
s	¬t1	t2	1	0
s	¬t1	¬t2	1	0
¬s	t1	t2	1	0
¬s	t1	¬t2	1	0
¬s	¬t1	t2	1	0
¬s	¬t1	¬t2	0	1

IV.5) Recalcule para a rede Bayesiana obtida na alínea 4 os valores de probabilidade pedidos nas alíneas 2 e 3.

Resposta:

Como $P(\neg i|S,T1,T2)$ só é diferente de zero para ¬s, ¬t1 e ¬t2 (última linha da tabela) então:

$$P(\neg i)=\sum_A\sum_S\sum_{T1}\sum_{T2}P(A,S,T1,T2,\neg i)=\sum_A\sum_S\sum_{T1}\sum_{T2}P(A)P(S|A)P(T1|A)P(T2|A)P(\neg i|S,T1,T2)$$

$$=\sum_A P(A)P(\neg s|A)P(\neg t1|A)P(\neg t2|A)$$

$$=P(a)P(\neg s|a)P(\neg t1|a)P(\neg t2|a)+P(\neg a)P(\neg s|\neg a)P(\neg t1|\neg a)P(\neg t2|\neg a)$$

$$=0.1\times 0.1\times 0.1\times 0.2+0.9\times 0.8\times 0.95\times 0.99=0.0002+0.67716=0.67736$$

Logo:

$$P(i)=1-P(\neg i)=1-0.67736=0.32264$$

$$P(\neg i,a)=\sum_S\sum_{T1}\sum_{T2}P(a,S,T1,T2,\neg i)=\sum_S\sum_{T1}\sum_{T2}P(a)P(S|a)P(T1|a)P(T2|a)P(\neg i|S,T1,T2)$$

$$=P(a)P(\neg s|a)P(\neg t1|a)P(\neg t2|a)$$

$$=0.1\times 0.1\times 0.1\times 0.2=0.0002$$

$$P(\neg i|a)=\frac{P(\neg i,a)}{P(a)}=\frac{0.0002}{0.1}=0.002$$