

Procura Cega

Capítulo 3

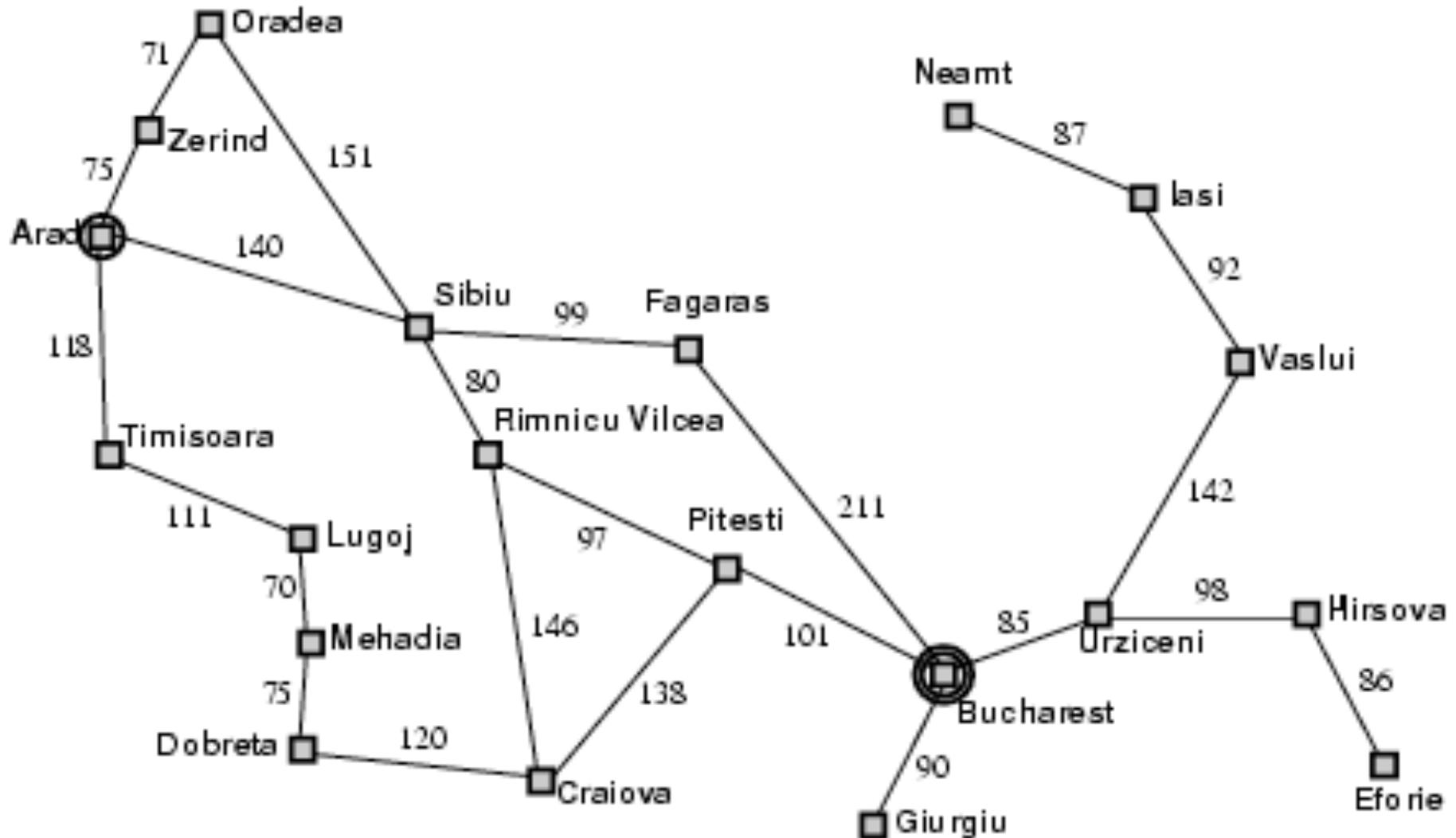
Parcialmente adaptado de
<http://aima.eecs.berkeley.edu>



Resumo

- Agentes de procura
- Tipos de problemas
- Formulação de problemas
- Problemas típicos
- Algoritmos básicos de procura

Exemplo: Roménia





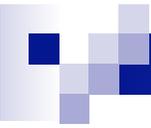
Exemplo: Roménia

- De férias na Roménia; correntemente em Arad.
- Voo sai amanhã de Bucareste
- Formular objectivo:
 - Chegar a Bucareste
- Formular problema:
 - **estados**: várias cidades
 - **acções**: guiar entre as cidades
- Solução:
 - Sequência de cidades: Arad, Sibiu, Fagaras, Bucareste

Agentes de procura

```
function SIMPLE-PROBLEM-SOLVING-AGENT(percept) returns an action
  static: seq, an action sequence, initially empty
           state, some description of the current world state
           goal, a goal, initially null
           problem, a problem formulation

  state ← UPDATE-STATE(state, percept)
  if seq is empty then do
    goal ← FORMULATE-GOAL(state)
    problem ← FORMULATE-PROBLEM(state, goal)
    seq ← SEARCH(problem)
  action ← FIRST(seq)
  seq ← REST(seq)
  return action
```

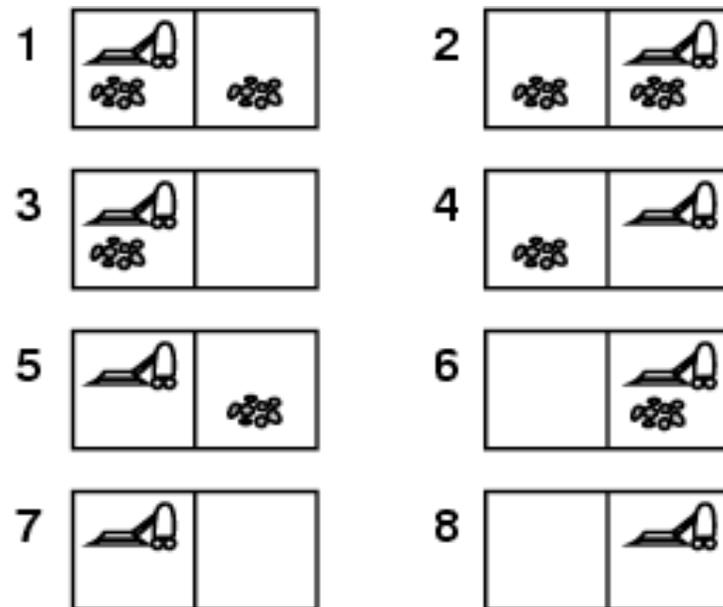


Tipos de problemas

- Determinista, observável → problema com estado único
 - Agente sabe exactamente em que estado se encontrará; solução é uma sequência de acções
- Não observável → problema de conformidade
 - Agente pode não saber onde está; caso exista, solução é sequência de acções
- Não determinista e/ou parcialmente observável → problema de contingência
 - Percepção fornece nova informação acerca do estado corrente
 - Solução é uma árvore ou plano de acção
 - Habitualmente intercala procura com execução
- Espaço de estados desconhecido → problema de exploração (“online”)

Exemplo: mundo do aspirador

- Estado único, início em 5.
 - Solução: [Right, Suck]
- Conformidade, início em {1,2,3,4,5,6,7,8}
Right transita para {2,4,6,8}
 - Solução: [*Right, Suck, Left, Suck*]
- Contingência.
Lei de Murphy. *Suck* pode sujar carpete limpa.
Percepção local: [*A, Clean*]
 - Sol: [*Right, while dirt then Suck*]



Formulação de problema de estado único

Um problema de procura é definido por 4 constituintes:

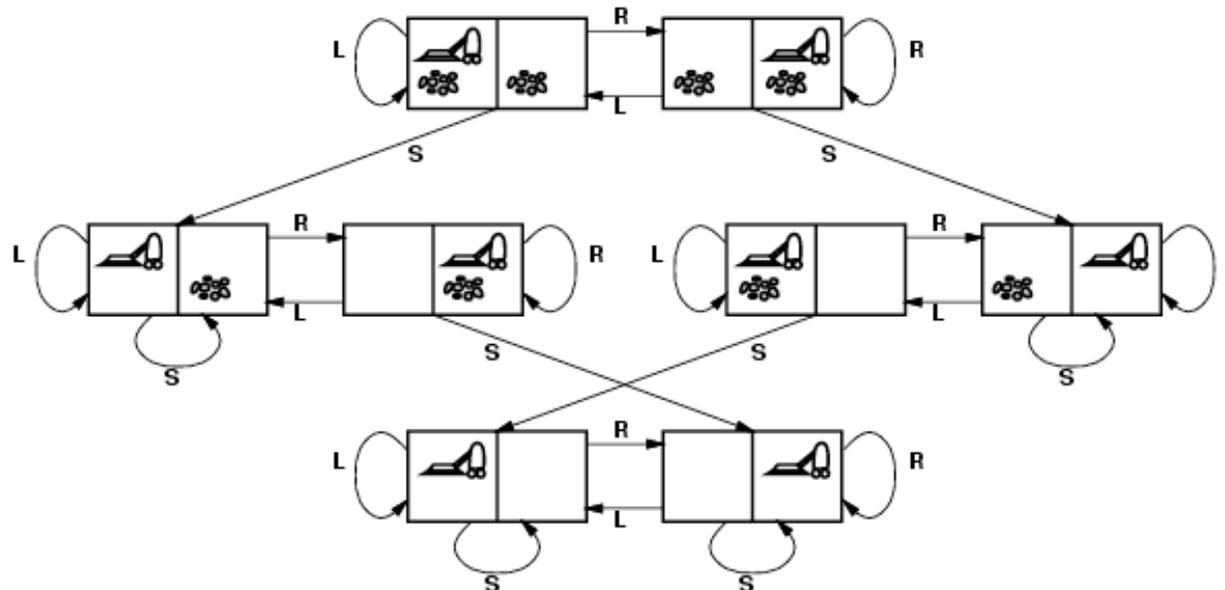
1. estado inicial e.g., “em Arad”
 2. acções, operadores, função sucessor ou modelo de transição
Função sucessor: $S(x)$ = conjunto de pares acção-estado
 - e.g., $S(\text{Arad}) = \{ \langle \text{Arad} \rightarrow \text{Zerind}, \text{Zerind} \rangle, \dots \}$
 - Modelo de transição** especificado pela função $\text{RESULT}(s,a)$
 - e.g., $\text{RESULT}(\text{Go}(\text{Zerind}), \text{Arad}) = \text{Zerind}$
 3. teste objectivo, pode ser
 - explícito, e.g., $x = \text{“em Bucareste”}$
 - implícito, e.g., $\text{XequeMate}(x)$
 4. custo do caminho (aditivo)
 - e.g., soma de distâncias, número de acções executadas, etc.
 - $c(x,a,y)$ é o custo de um passo, sendo ≥ 0
- Uma **solução** é uma sequência de acções que partindo do estado inicial permite atingir o estado objectivo



Seleccção de um espaço de estados

- A realidade é absurdamente complexa
 - o espaço de estados deve ser **abstraído** para a resolução de problemas
- Estado (abstracto) = conjunto de estados reais
- Acção (abstracta) = combinação complexa de acções reais
 - "Arad → Zerind" representa um conjunto complexo de rotas.
- Para ser concretizável, **qualquer** estado real "em Arad" deve permitir chegar a **algum** estado real "em Zerind"
- Solução (abstracta) =
 - Conjunto de caminhos reais que são soluções na realidade
- Cada acção abstracta deverá ser mais simples do que no problema original!

Grafo de espaços de estados do aspirador



- estados? vector booleanos e inteiro
- acções? *Left, Right, Suck* e *NoOp*
- teste objectivo? tudo limpo
- custo caminho? número de acções
(1 por acção, 0 para *NoOp*)

Exemplo: charada de 8

7	2	4
5		6
8	3	1

Start State

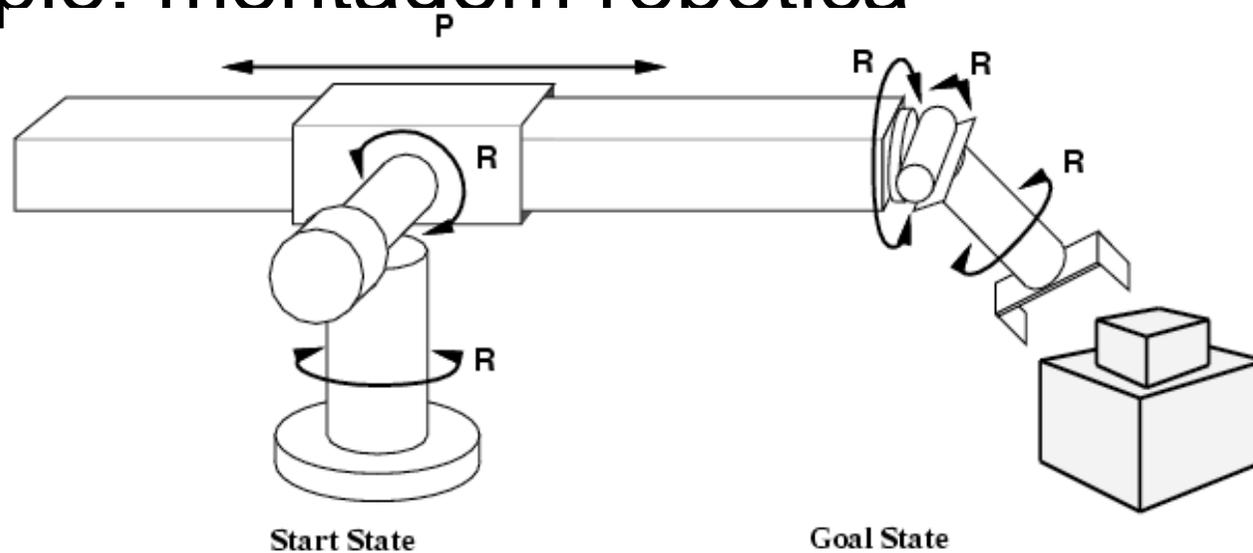
	1	2
3	4	5
6	7	8

Goal State

- estados? inteiros com localização das peças
- acções? movimentar casa nas 4 direcções
- teste objectivo? = estado objectivo
- custo caminho? número de movimentos
(1 por movimento)

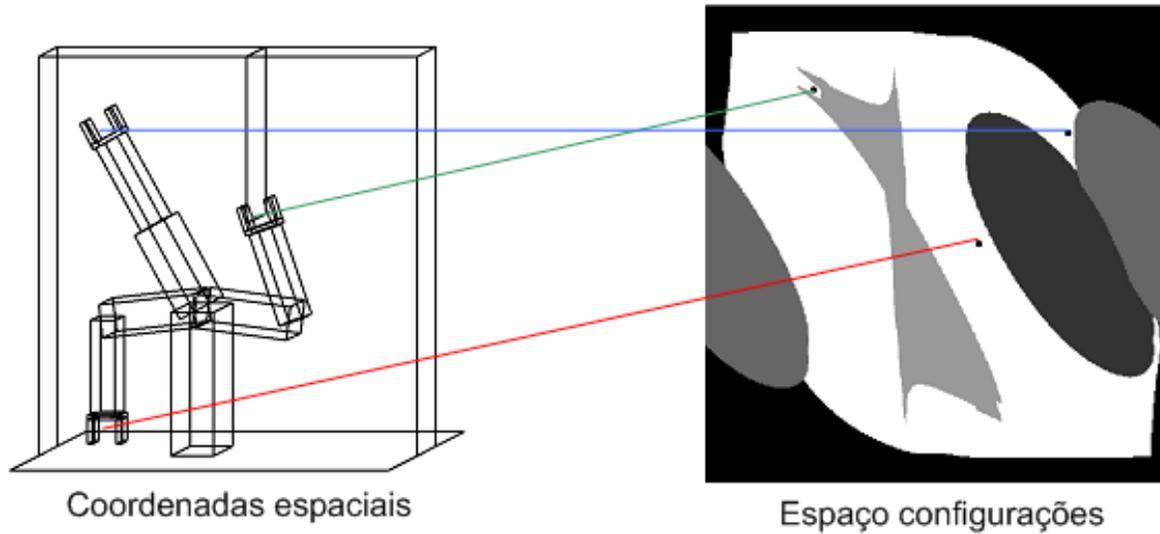
[Nota: solução óptima para a família de charadas-n é NP-hard]

Exemplo: montagem robótica



- estados? Coordenadas reais das articulações do robô e dos objectos a montar
- acções? Movimento contínuo das articulações
- teste objectivo? montagem completa
- custo caminho? tempo para executar

Espaço de configurações (2 DOF)



Campos Potencial

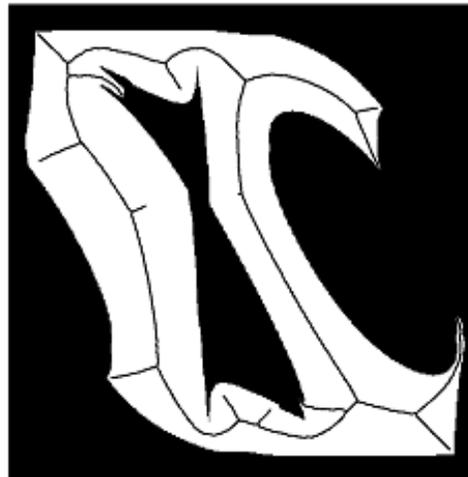
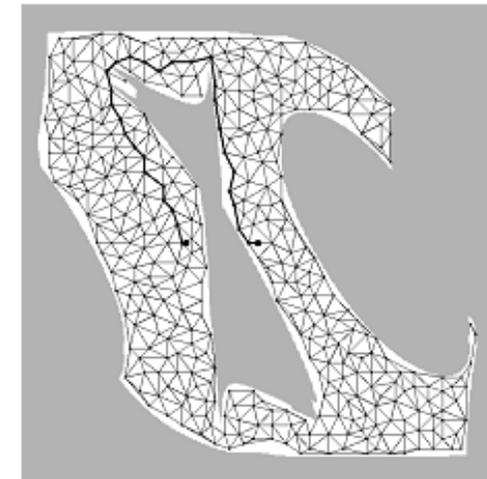
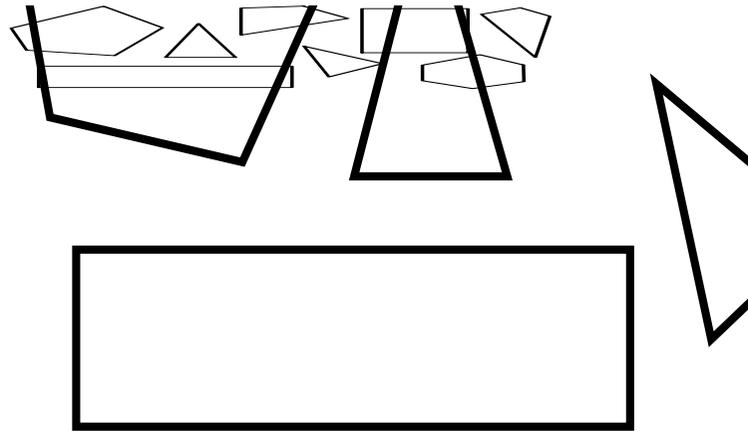


Diagrama de Voronoi



Mapas probabilísticos

Exemplo: navegação robótica



- estados? vértices dos polígonos, posições inicial e final
- acções? viajar para outro vértice
- teste objectivo? chegar ao objectivo
- custo caminho? distância percorrida

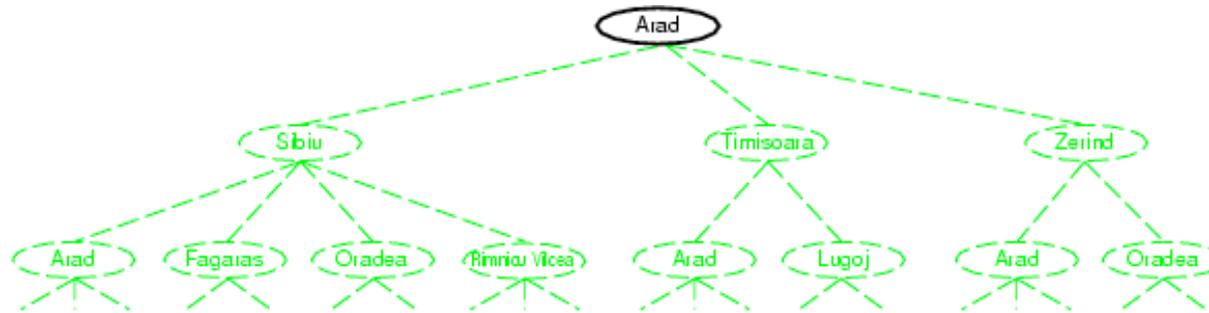
Algoritmos de procura em árvores

■ Ideia básica:

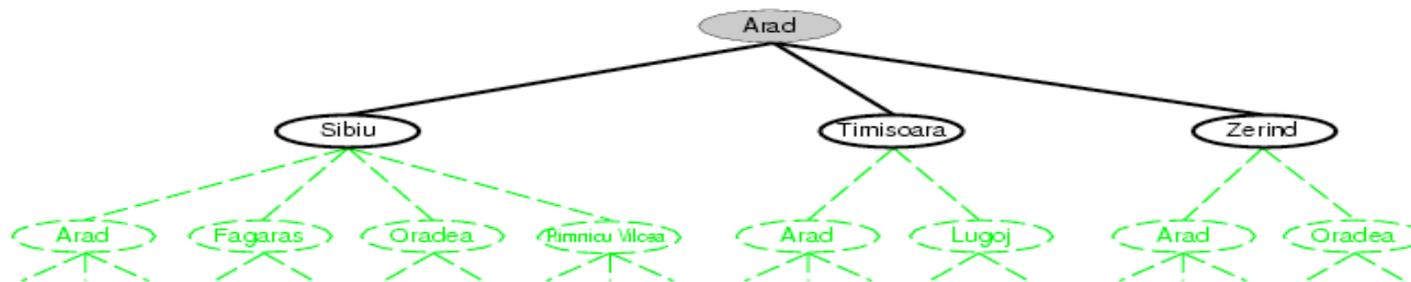
- Simulação *offline* da exploração do espaço de estados através da geração de sucessores de estados já explorados

```
function TREE-SEARCH( problem ) returns a solution, or failure
  initialize the frontier using the initial state of problem
  loop do
    if the frontier is empty then return failure
    choose a leaf node and remove it from the frontier
    if the node contains a goal state then return the corresponding solution
    expand the chosen node, adding the resulting nodes to the frontier
```

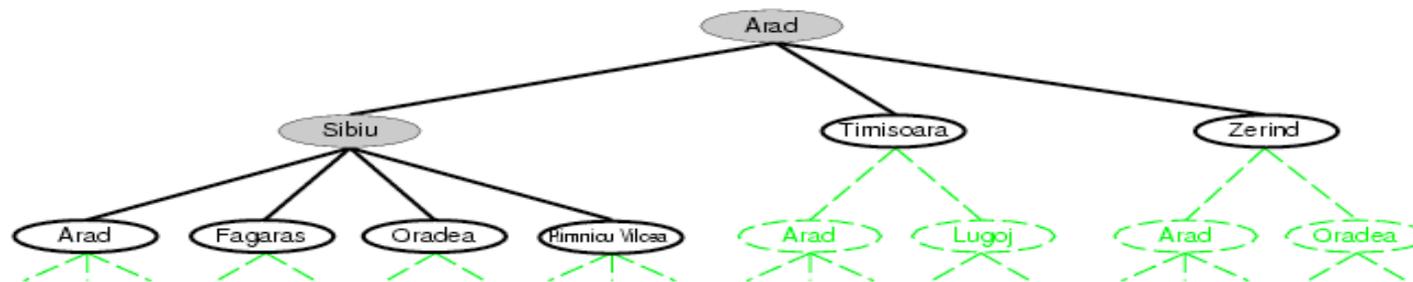
Exemplo de procura em árvore



Exemplo de procura em árvore

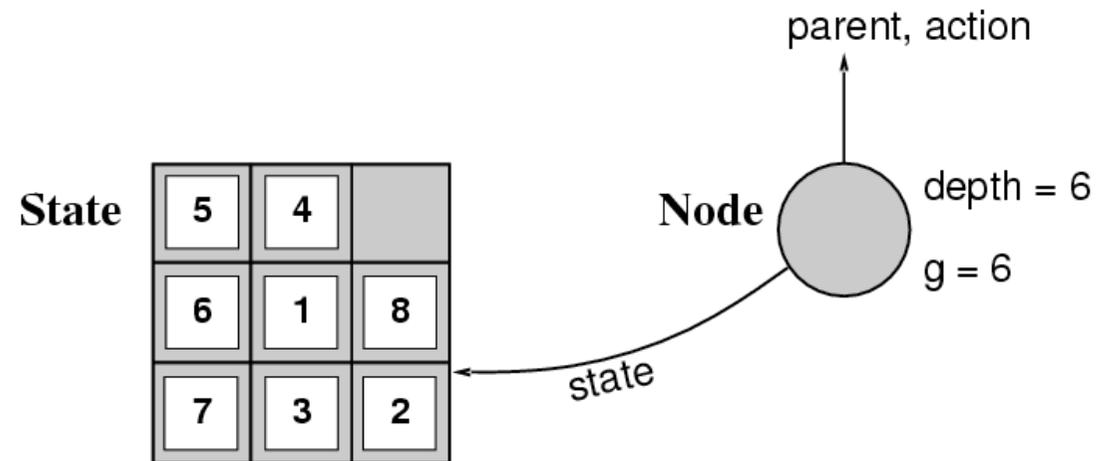


Exemplo de procura em árvore



Implementação: estados vs. nós

- Um **estado** é uma (representação) de uma configuração física.
- Um **nó** é uma estrutura de dados constituinte da árvore de procura incluindo o **estado**, **pai**, **nó**, **acção**, **profundidade** e custo de caminho acumulado $g(x)$



- A função `CHILD-NODE` cria um novo nó a partir do pai e da acção a executar.
- Estados não têm pais, profundidade ou custo do caminho!

Implementação: procura genérica em árvores

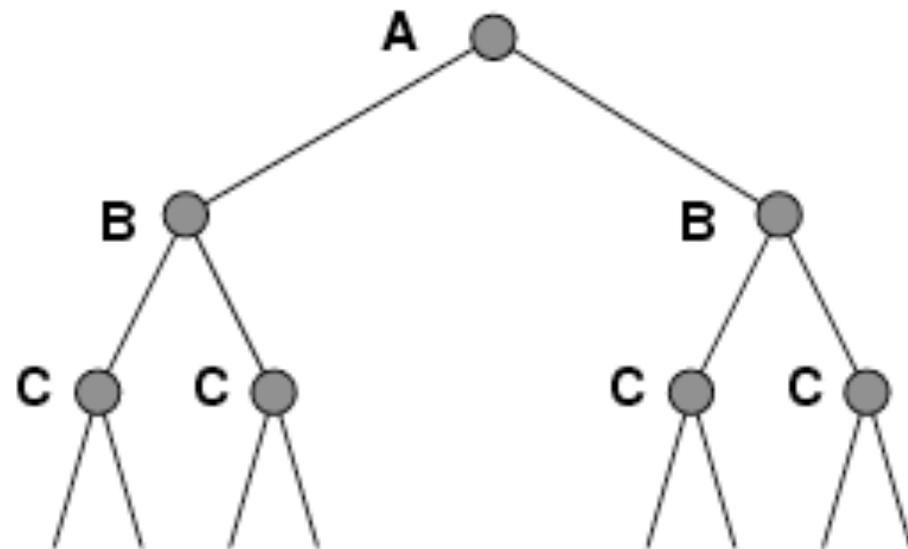
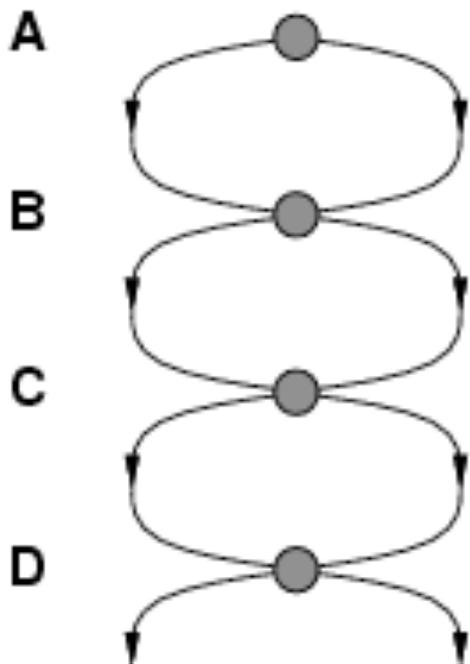
```
function TREE-SEARCH( problem, frontier ) returns a solution, or failure
  node ← node with STATE = problem.INITIAL-STATE, PATH-COST = 0
  frontier ← INSERT(node, frontier)
  loop do
    if EMPTY?(frontier) return failure
    node ← POP( frontier )
    if problem.GOAL-TEST(node.STATE) then return SOLUTION(node)
    frontier ← INSERT-ALL(EXPAND(node,problem),frontier)
```

```
function EXPAND( node, problem ) returns a set of nodes
  successors ← the empty set
  for each action in problem.ACTIONS (node.STATE) do
    s ← CHILD-NODE(problem,node,action)
    add s to successors
  return s
```

```
function CHILD-NODE( problem, par, action ) returns a node
return a node with
  STATE = problem.RESULT(par.STATE,action),
  PARENT = par, ACTION = action , DEPTH ← parent.DEPTH+1
  PATH-COST = par.PATH-COST + problem.STEP-COST(par.STATE, action)
```

Estados repetidos

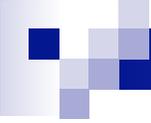
- A não detecção de estados repetidos pode tornar um problema linear num problema exponencial!



Procura em grafos

```
function GRAPH-SEARCH( problem, frontier ) returns a solution, or failure
  explored ← an empty set
  node ← node with STATE = problem.INITIAL-STATE, PATH-COST = 0
  frontier ← INSERT(node, frontier)
  loop do
    if EMPTY?(frontier) return failure
    node ← POP( frontier )
    if problem.GOAL-TEST(node.STATE) then return SOLUTION(node)
    if node.STATE is not in explored then
      add node.STATE to explored
      frontier ← INSERT-ALL(EXPAND(node,problem),frontier)
```

Esquema genérico! Pode ser melhorado em algumas circunstâncias.



Estratégias de procura

- Uma estratégia de procura é definida pela **ordem de expansão dos nós**.
- As estratégias são avaliadas segundo as dimensões:
 - **completude**: encontra garantidamente uma solução, caso exista?
 - **complexidade temporal**: número de nós gerados
 - **complexidade espacial**: número máximo de nós em memória
 - **optimalidade**: encontra sempre uma solução de custo mínimo?
- A complexidade temporal e espacial são avaliadas em função de
 - **b** : factor de ramificação máximo da árvore de procura
 - **d** : profundidade da solução de custo mínimo
 - **m** : profundidade máxima do espaço de estados (pode ser ∞)



Estratégias de procura cegas

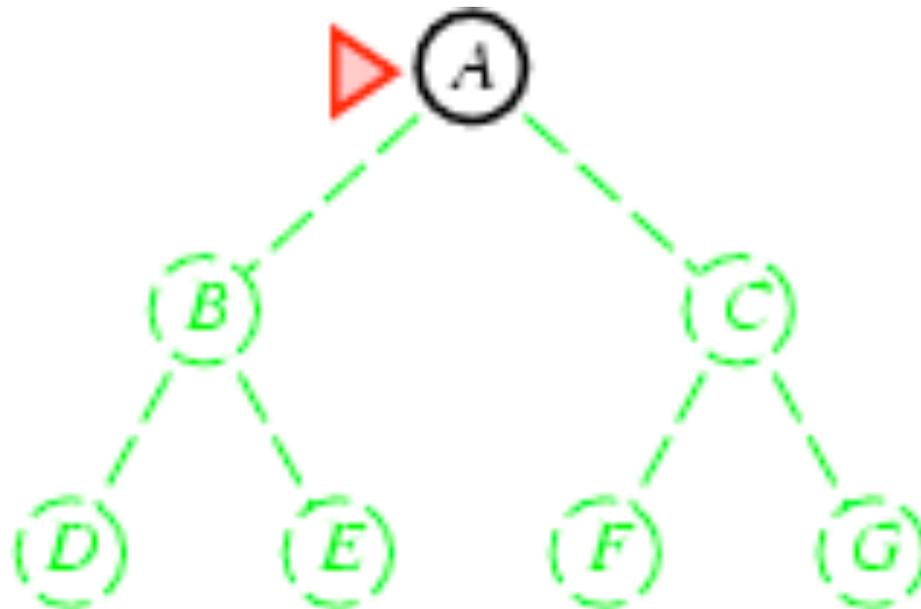
As estratégias de procura **cegas** (ou não informadas) recorrem apenas à informação disponibilizada no problema

- Procura em largura primeiro (breadth-first)
- Procura de custo uniforme (uniform-cost)
- Procura bidireccional

- Procura em profundidade primeiro (depth-first)
- Procura em profundidade limitada (depth-limited)
- Procura por aprofundamento progressivo (iterative deepening)

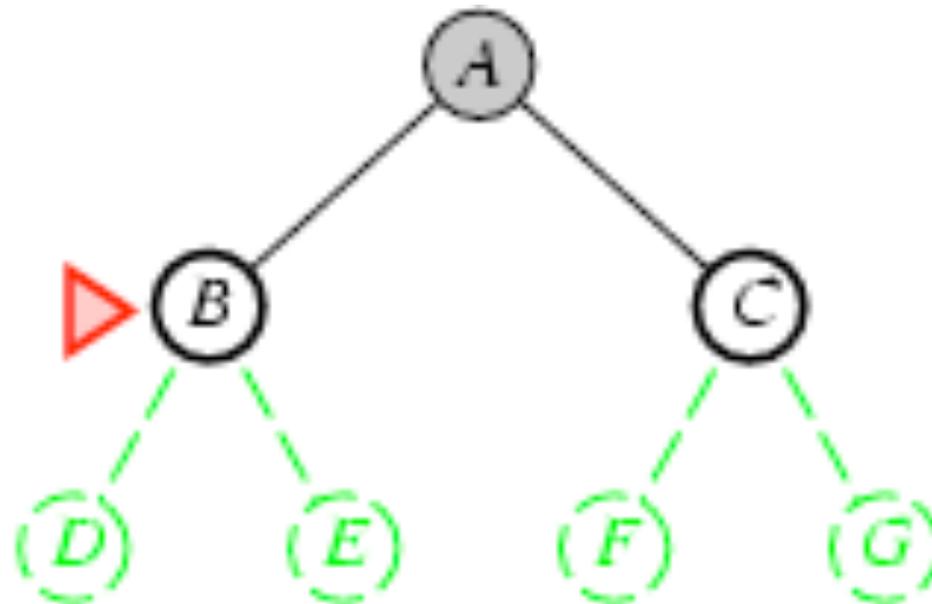
Procura em largura primeiro

- Expandir um nó de menor profundidade
- Implementação: *frontier* é uma fila FIFO; novos sucessores vão para o fim



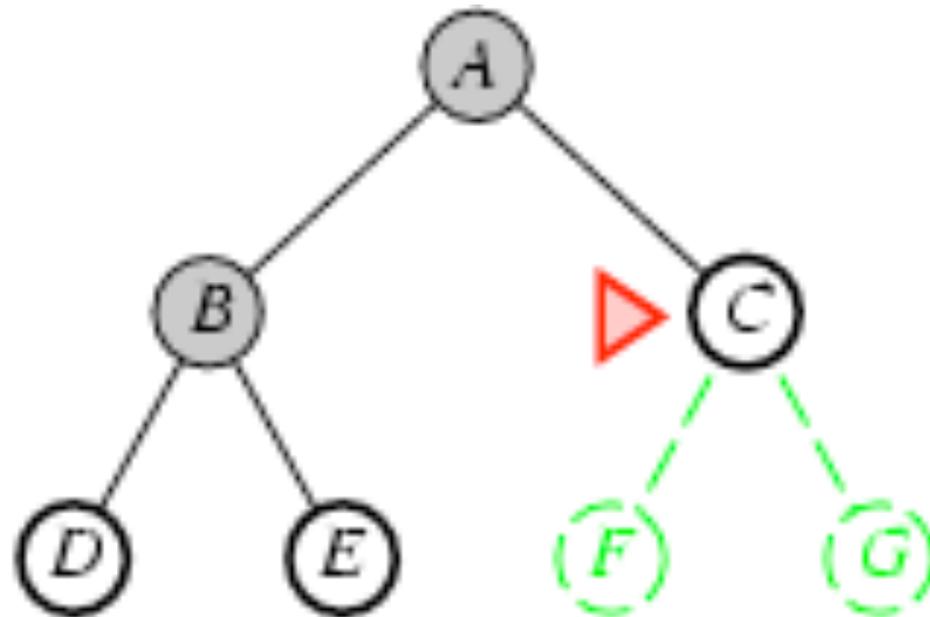
Procura em largura primeiro

- Expandir um nó de menor profundidade
- Implementação: *frontier* é uma fila FIFO; novos sucessores vão para o fim



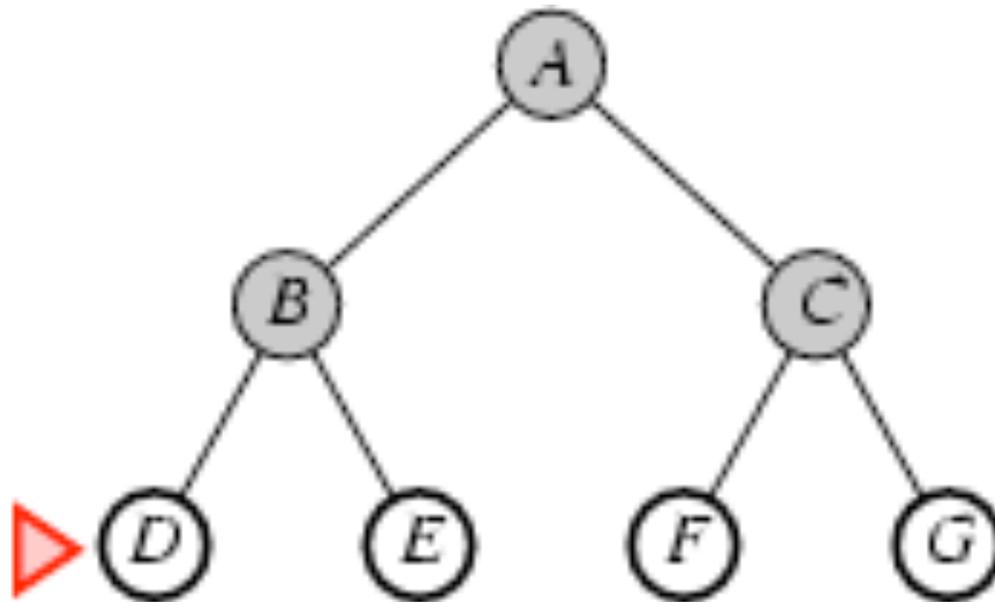
Procura em largura primeiro

- Expandir um nó de menor profundidade
- Implementação: *frontier* é uma fila FIFO; novos sucessores vão para o fim



Procura em largura primeiro

- Expandir um nó de menor profundidade
- Implementação: *frontier* é uma fila FIFO; novos sucessores vão para o fim



Propriedades da procura em largura primeiro

- Completa? Sim (se b é finito)
 - Tempo? $1+b+b^2+b^3+\dots +b^d + b(b^d-1) = O(b^{d+1})$
 - Espaço? $O(b^{d+1})$ (mantém todos os nós)
 - Optimal? Sim (se custo = 1 por passo)
-
- **Espaço** é o maior problema (mais do que o tempo)
 - A análise anterior só é válida para procura em árvores!

Requisitos temporais e espaciais da procura em largura

Profundidade	Nós	Tempo	Memória
2	110	1,1ms	107 Kb
4	11 110	111 ms	10,6 Mb
6	10^6	11 seg	1 Gb
8	10^8	19 minutos	103 Gb
10	10^{10}	31 horas	10 Tb
12	10^{12}	129 dias	1 Petabytes
14	10^{14}	35 anos	99 Petabytes
16	10^{16}	3500 anos	10 Exabytes

b=10 gerando 100000 nós/segundo ocupando 1000 bytes/nó

Procura em Largura Primeiro (otimizada)

```
function BREADTH-FIRST-SEARCH( problem ) returns a solution, or failure
  node ← a node with STATE=problem.INITIAL-STATE, PATH-COST = 0
  if problem.GOAL-TEST(node.STATE) then return SOLUTION(node)
  frontier ← a FIFO queue with node as the only element
  explored ← an empty set
  loop do
    if EMPTY?( frontier ) then return failure
    node ← POP( frontier ) /* chooses the shallowest node in frontier */
    add node.STATE to explored
    for each action in problem.ACTIONS(node.STATE) do
      child ← CHILD-NODE( problem , node , action )
      if child.STATE is not in explored or frontier then do
        if problem.GOAL-TEST(child.STATE) then return
          SOLUTION(child )
        frontier ← INSERT(child , frontier )
```

Complexidade temporal e espacial reduzidas para $O(b^d)$ em vez de $O(b^{d+1})$

Procura de custo uniforme

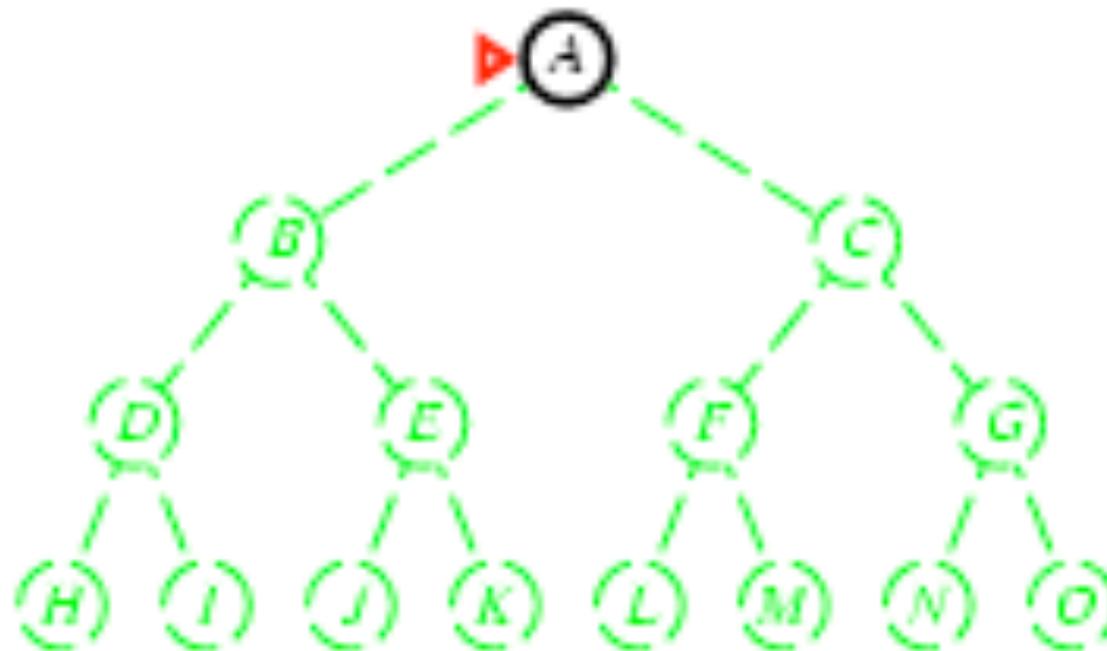
- Expandir o nó por tratar de menor custo
- Implementação:
 - *frontier* = fila ordenada pelo custo do caminho acumulado
- Equivale à procura em largura se custos forem constantes
- Completa? Sim, se custo do passo $\geq \epsilon$
- Tempo? n° de nós com $g \leq$ custo da solução óptima, $O(b^{1+\text{ceil}(C^*/\epsilon)})$ em que C^* é o custo da solução óptima
- Espaço? n° de nós com $g \leq$ custo da solução óptima, $O(b^{1+\text{ceil}(C^*/\epsilon)})$
- Óptima? Sim – nós expandidos por ordem crescente de $g(n)$

Procura de custo uniforme (em grafos)

```
function UNIFORM-COST-SEARCH( problem ) returns a solution, or failure
  node ← a node with STATE=problem.INITIAL-STATE, PATH-COST = 0
  frontier ← a priority queue ordered by PATH-COST with node as the only element
  explored ← a singleton set with node.STATE
  loop do
    if EMPTY?( frontier ) then return failure
    node ← POP( frontier ) /* chooses the node with lowest cost in frontier */
    if problem.GOAL-TEST(node.STATE) then return SOLUTION(node)
    for each action in problem.ACTIONS(node.STATE) do
      child ← CHILD-NODE( problem , node , action )
      if child.STATE is not in explored or frontier then do
        add child.STATE to explored
        frontier ← INSERT(child , frontier )
      else if child.STATE is in frontier with higher PATH-COST then
        replace that frontier node with child
```

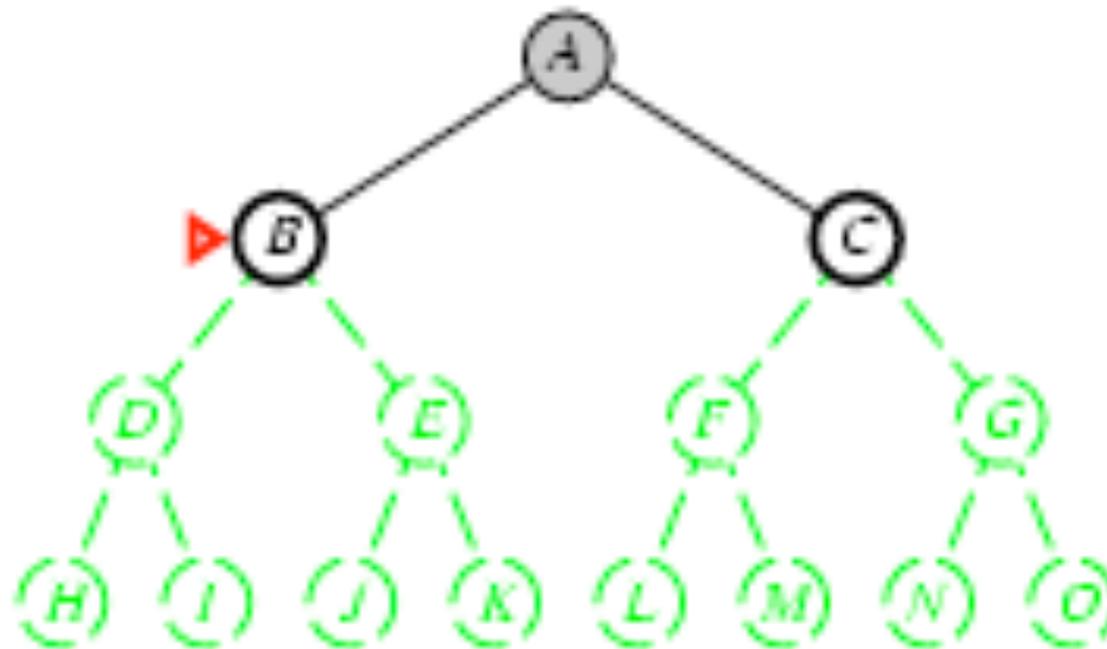
Procura em profundidade primeiro

- Expandir um dos nós mais profundos
- **Implementação:** *fronteira* = pilha LIFO, i.e., colocar sucessores à frente



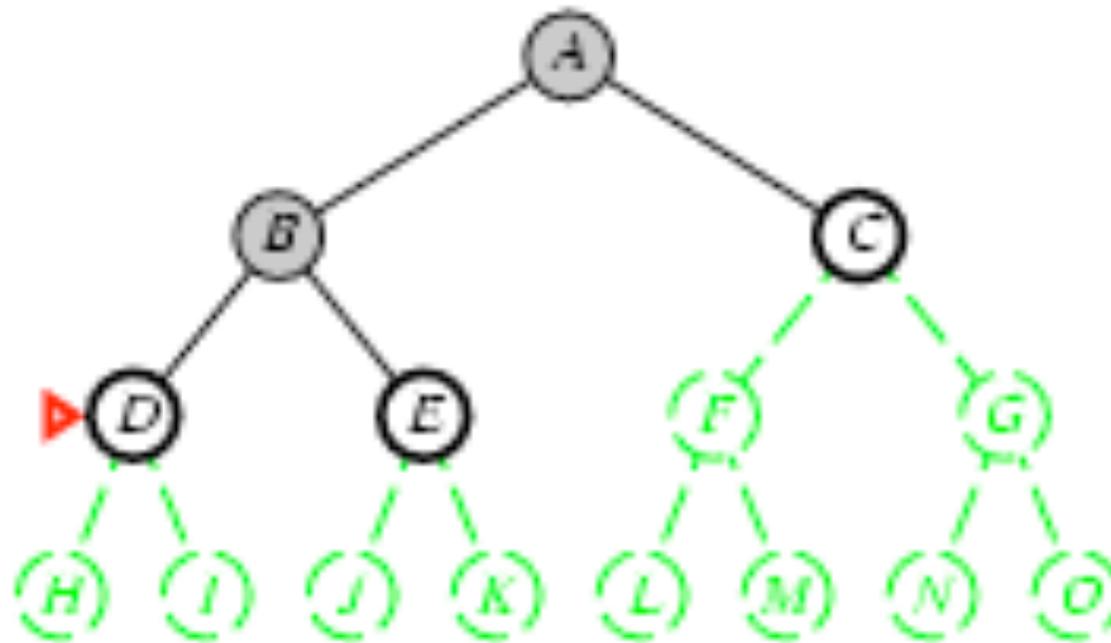
Procura em profundidade primeiro

- Expandir um dos nós mais profundos
- Implementação: *fronteira* = pilha LIFO, i.e., colocar sucessores à frente



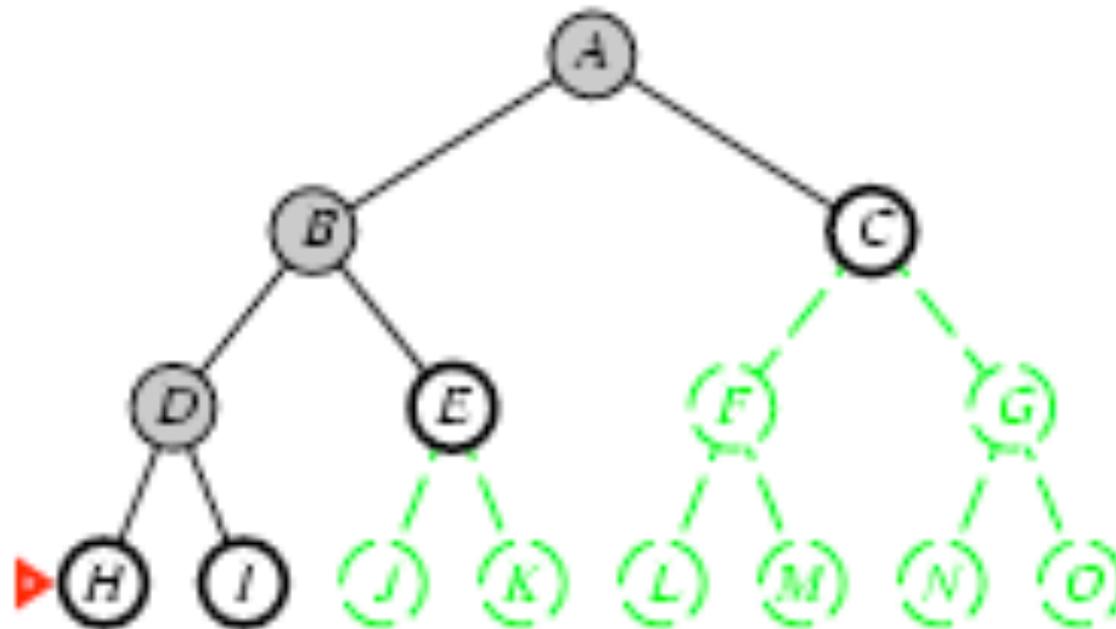
Procura em profundidade primeiro

- Expandir um dos nós mais profundos
- **Implementação:** *fronteira* = pilha LIFO, i.e., colocar sucessores à frente



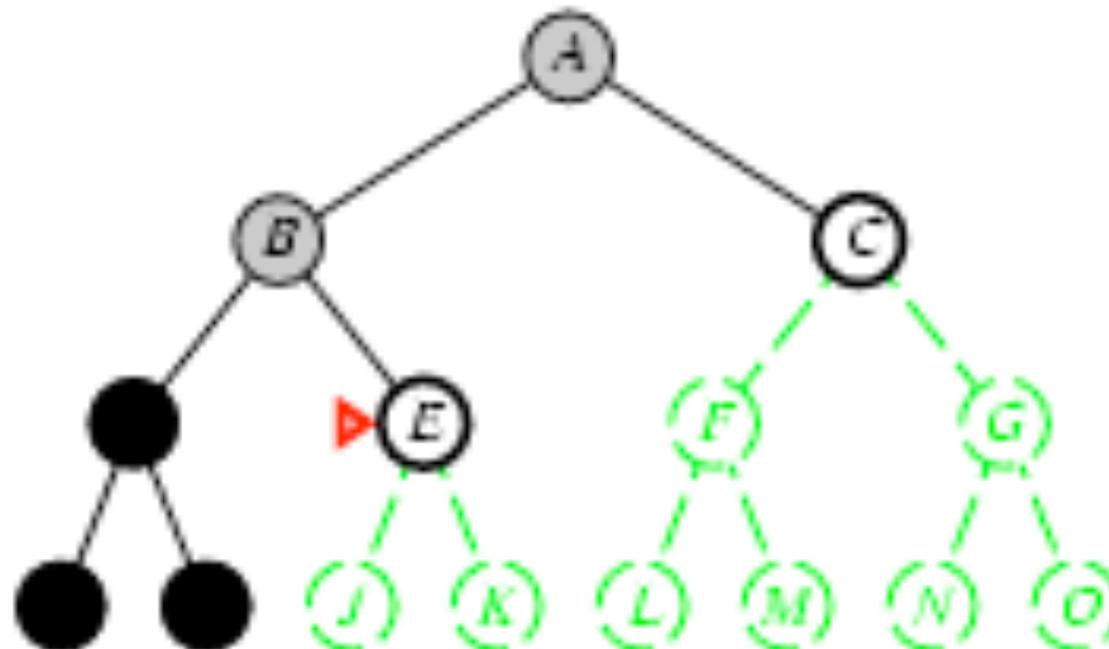
Procura em profundidade primeiro

- Expandir um dos nós mais profundos
- **Implementação:** *fronteira* = pilha LIFO, i.e., colocar sucessores à frente



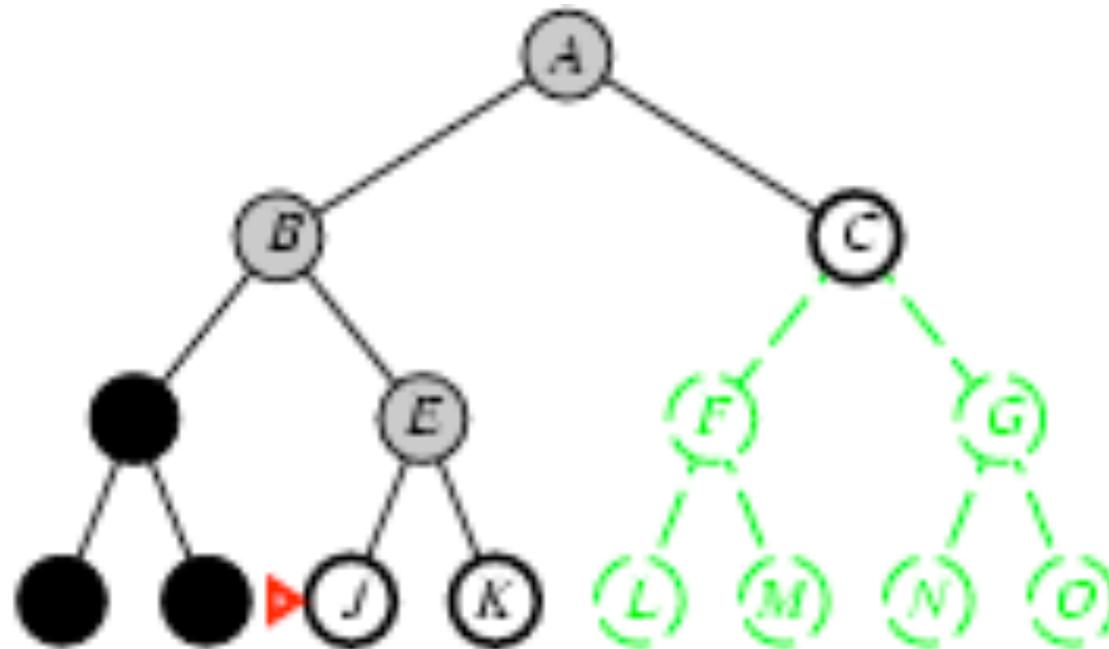
Procura em profundidade primeiro

- Expandir um dos nós mais profundos
- Implementação: *fronteira* = pilha LIFO, i.e., colocar sucessores à frente



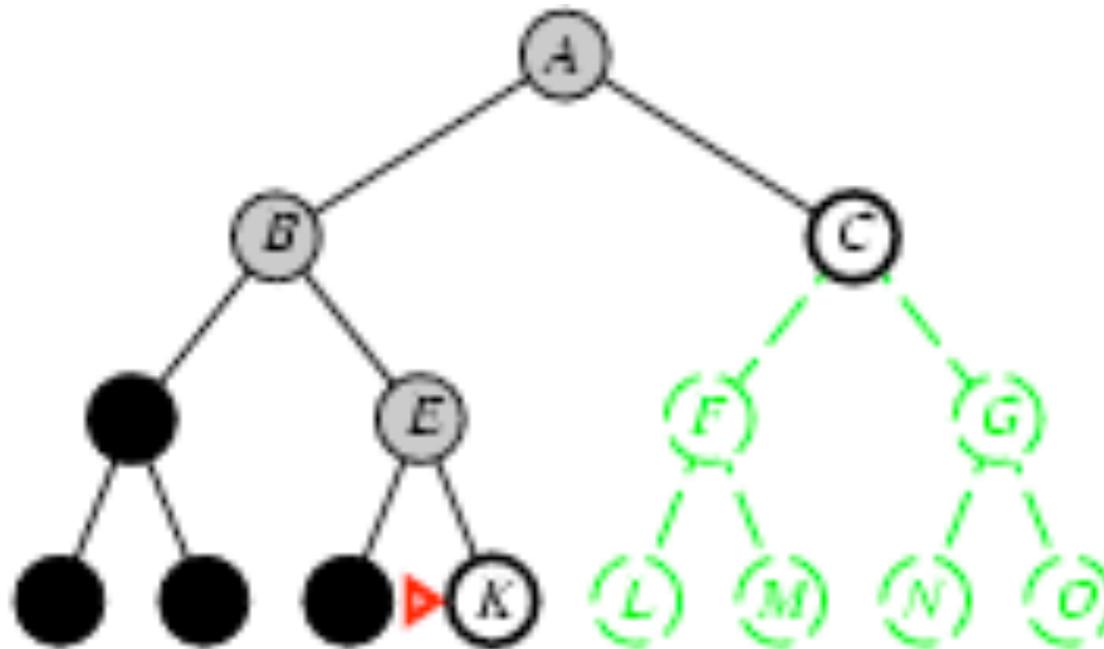
Procura em profundidade primeiro

- Expandir um dos nós mais profundos
- Implementação: *fronteira* = pilha LIFO, i.e., colocar sucessores à frente



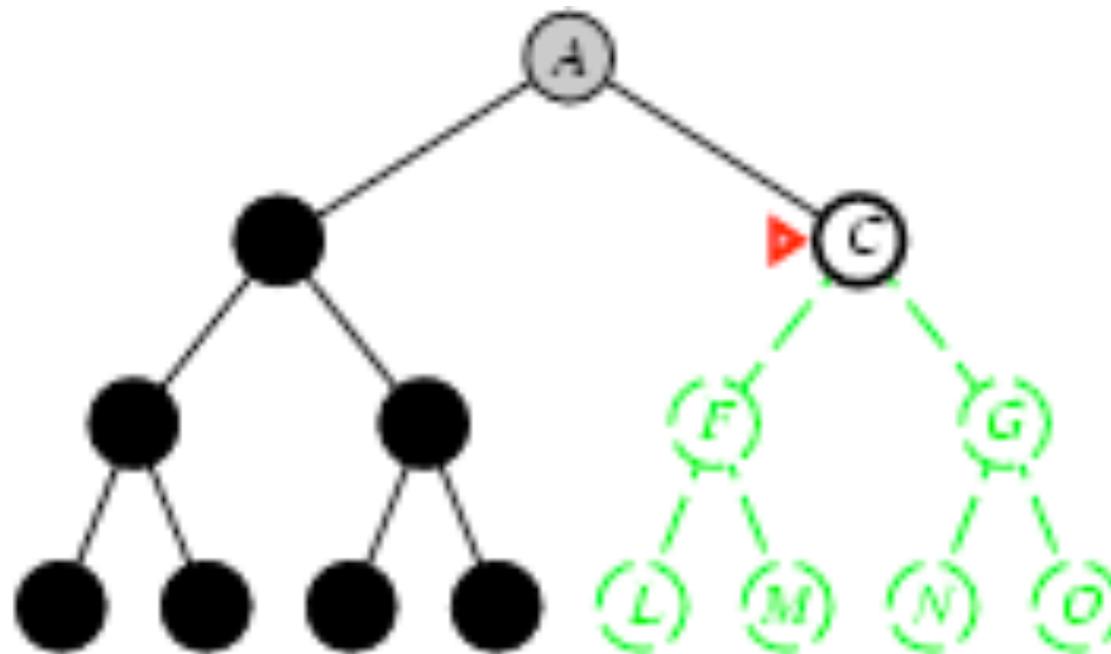
Procura em profundidade primeiro

- Expandir um dos nós mais profundos
- Implementação: *fronteira* = pilha LIFO, i.e., colocar sucessores à frente



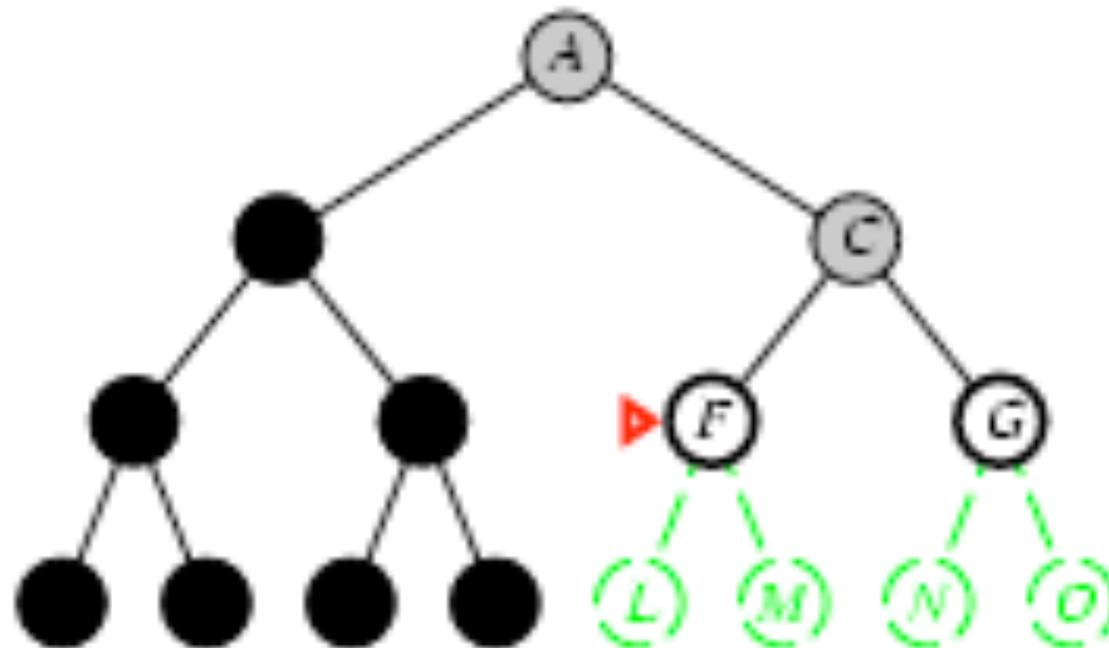
Procura em profundidade primeiro

- Expandir um dos nós mais profundos
- Implementação: *fronteira* = pilha LIFO, i.e., colocar sucessores à frente



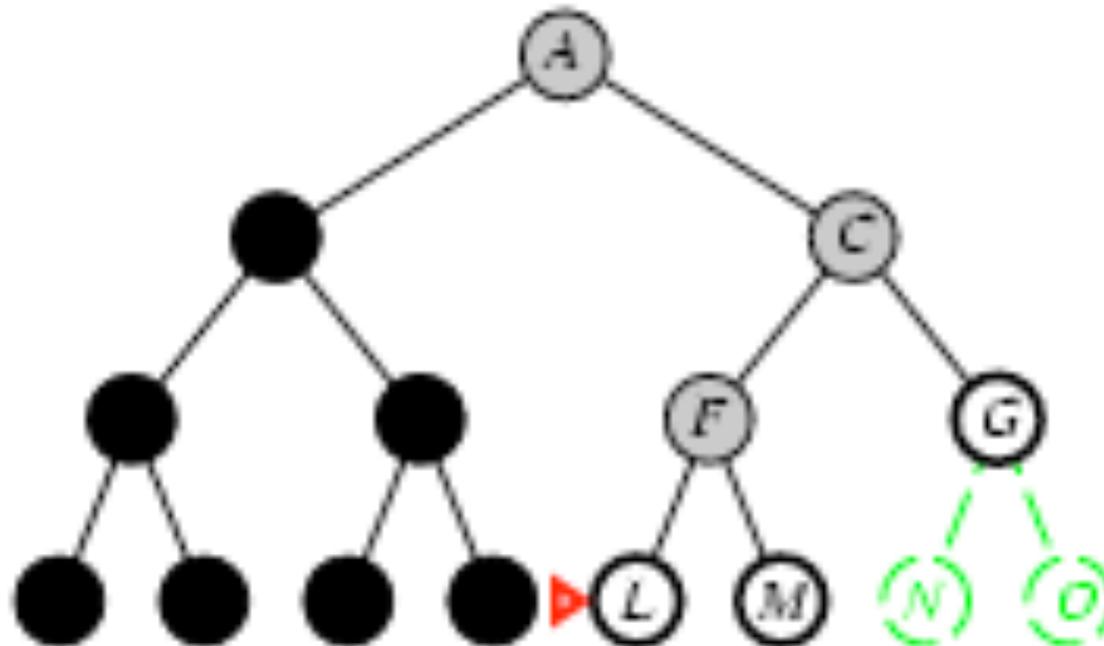
Procura em profundidade primeiro

- Expandir um dos nós mais profundos
- Implementação: *fronteira* = pilha LIFO, i.e., colocar sucessores à frente



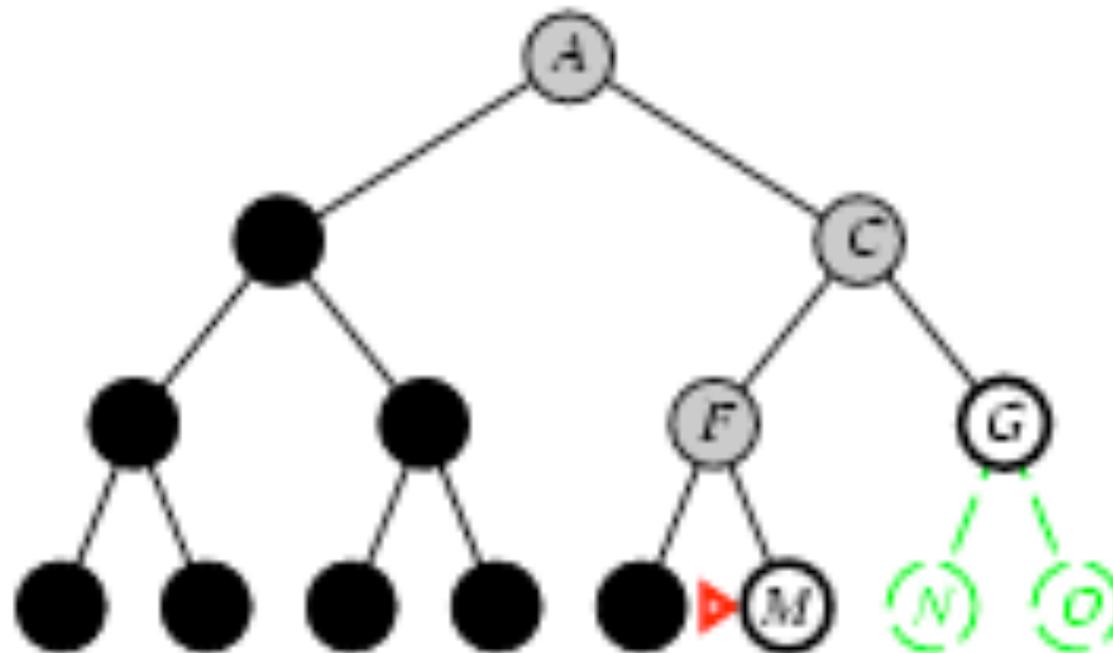
Procura em profundidade primeiro

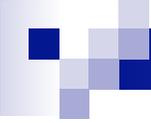
- Expandir um dos nós mais profundos
- Implementação: *fronteira* = pilha LIFO, i.e., colocar sucessores à frente



Procura em profundidade primeiro

- Expandir um dos nós mais profundos
- Implementação: *fronteira* = pilha LIFO, i.e., colocar sucessores à frente





Procura em profundidade primeiro

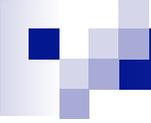
- Completa? Não: falha em espaços de profundidade infinita, espaços com ciclos
 - Modificação para evitar espaços repetidos no mesmo caminho
 - → completa para espaços finitos
- Tempo? $O(b^m)$: terrível se m muito maior do que d
 - mas se as soluções são densas, pode ser muito mais eficiente do que a procura em largura primeiro
- Espaço? $O(bm)$, i.e., espaço linear!
- Óptima? Não

Procura de profundidade limitada

= procura em largura primeiro com limite de profundidade l ,
i.e., nós à profundidade l não têm sucessores

```
function DEPTH-LIMITED-SEARCH(problem, limit) returns solution, or failure/cutoff  
return RECURSIVE-DLS(MAKE-NODE(problem.INITIAL-STATE), problem, limit )
```

```
function RECURSIVE-DLS(node, problem, limit) returns a solution, or failure/cutoff  
  if problem.GOAL-TEST(node.STATE) then return SOLUTION(node)  
  else if limit = 0 then return cutoff  
  else  
    cutoff_occurred? ← false  
    for each action in problem.ACTIONS(node.STATE) do  
      child ← CHILD-NODE( problem, node, action )  
      result ← RECURSIVE-DLS( child, problem, limit-1 )  
      if result = cutoff then cutoff_occurred? ← true  
      else if result ≠ failure then return result  
  if cutoff_occurred? then return cutoff else return failure
```



Procura por aprofundamento progressivo

```
function ITERATIVE-DEEPENING-SEARCH(problem) returns a solution, or fail-  
ure  
  inputs: problem, a problem  
  for depth  $\leftarrow$  0 to  $\infty$  do  
    result  $\leftarrow$  DEPTH-LIMITED-SEARCH(problem, depth)  
    if result  $\neq$  cutoff then return result
```

Aprofundamento progressivo $\neq 0$

Limit = 0



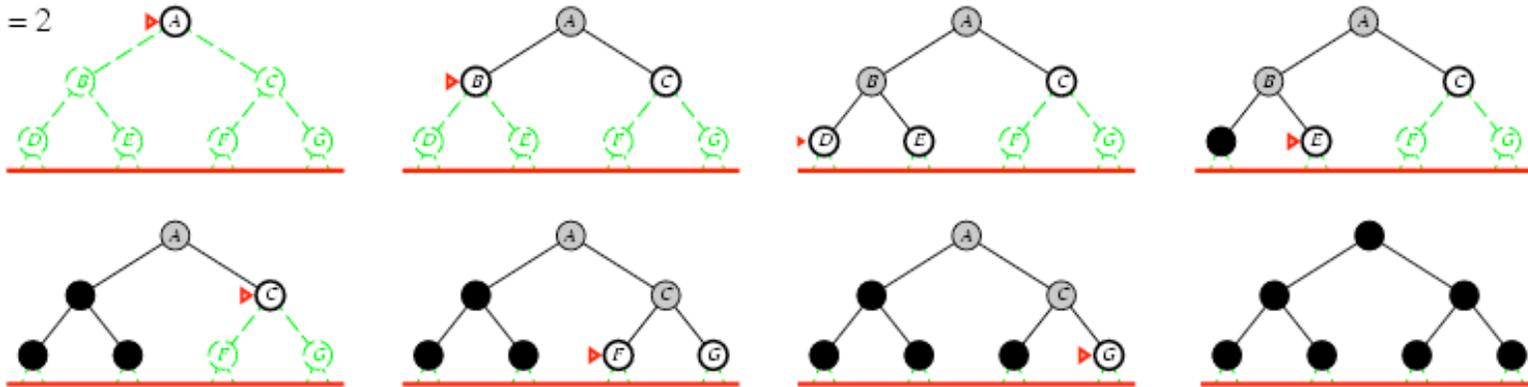
Aprofundamento progressivo / = 1

Limit = 1



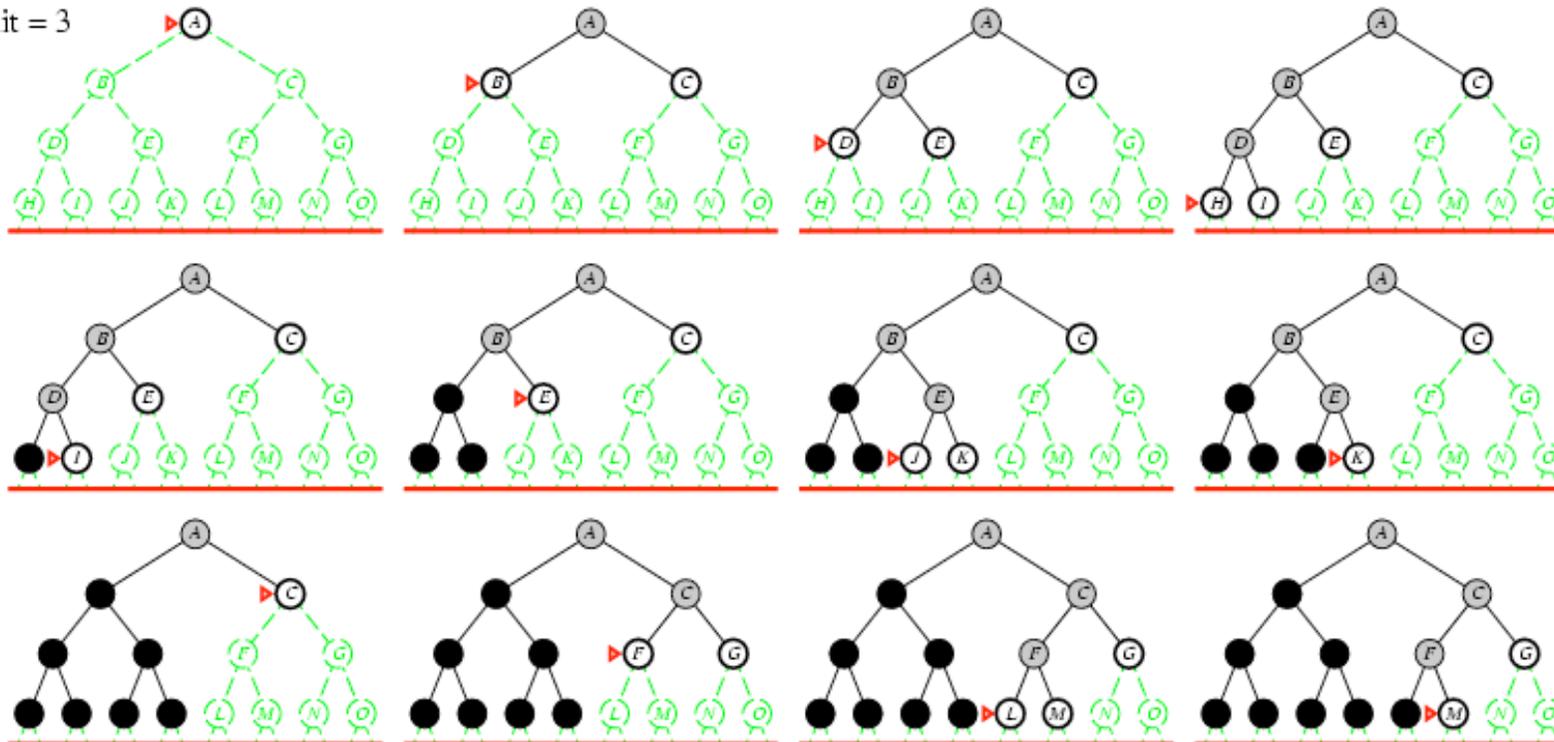
Aprofundamento progressivo $l = 2$

Limit = 2



Aprofundamento progressivo / =3

Limit = 3



Procura por aprofundamento progressivo

- Completa? Sim

- Tempo?

$$(d+1)b^0 + d b^1 + (d-1)b^2 + \dots + b^d = O(b^d)$$

NB: Estamos a contabilizar nós gerados!

- Espaço? $O(bd)$

- Óptima? Sim, se custos constantes

Comparação estratégias (nós gerados)

- Número de nós gerados com profundidade limitada d e factor ramificação b :

$$N_{DLS} = b^0 + b^1 + b^2 + \dots + b^{d-2} + b^{d-1} + b^d$$

$$N_{BFS} = b^0 + b^1 + b^2 + \dots + b^{d-2} + b^{d-1} + (b^d - b)$$

- Número de nós gerados em aprofundamento progressivo com profundidade d e factor ramificação b :

$$N_{IDS} = (d+1)b^0 + d b^1 + (d-1)b^2 + \dots + 3b^{d-2} + 2b^{d-1} + 1b^d$$

- Para $b = 10$, $d = 5$,

- $N_{DLS} = 1 + 10 + 100 + 1.000 + 10.000 + 100.000 = 111.111$

- $N_{IDS} = 6 + 50 + 400 + 3.000 + 20.000 + 100.000 = 123.456$

- $N_{BFS} = 1 + 10 + 100 + 1.000 + 10.000 + (100.000 - 10) = 111.101$

- Sobrecarga IDS/DLS e IDS/BFS = $(123.456 - 111.111)/111.111 = 11\% \approx b/(b-1)$
- Sobrecarga BFS sem optimização/IDS = $(1.111.100 - 123.456)/123.456 = 800\% \approx b-1$

Sumário de procura em árvore

Critério	Breadth-First	Uniform-Cost	Depth-First	Depth-Limited	Iterative Deepening	Bidireccional (se aplicável)
Completa ?	Sim ^a	Sim ^{a,b}	Não	Não	Sim ^a	Sim ^{a,d}
Tempo	$O(b^d)$	$O(b^{1+\text{ceil}(C^*/\epsilon)})$	$O(b^m)$	$O(b^l)$	$O(b^d)$	$O(b^{d/2})$
Espaço	$O(b^d)$	$O(b^{1+\text{ceil}(C^*/\epsilon)})$	$O(bm)$	$O(bl)$	$O(bd)$	$O(b^{d/2})$
Óptima?	Sim ^c	Sim	Não	Não	Sim ^c	Sim ^{c,d}

^a completa se o factor de ramificação for finito

^b completa se custos do passo $\geq \epsilon$ para ϵ positivo (não nulo!)

^c óptima se custo do caminho for monótono na profundidade da árvore (e.g. custos constantes e idênticos)

^d se ambas as direcções utilizarem procura em largura primeiro



Optimalidade de procura em grafos

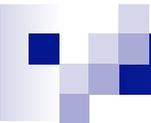
O algoritmo de procura em grafos ignora novos caminhos para o mesmo estado, portanto a questão da optimalidade não é imediata

- Para grafos com custos de passos constantes, quer a procura em largura primeiro quer a procura de custo uniforme com conjunto de nós explorados garantem a solução óptima.
- Se a inserção na fronteira adicionar apenas nós correspondentes a estados **não expandidos** e mantiver o nó com o menor custo total na fronteira, então a procura de custo uniforme com lista fechada é óptima (ver atrás). Muito semelhante ao algoritmo de Dijkstra para encontrar o melhor caminho num grafo dirigido.



Complexidade de procura em grafos

- A procura em profundidade primeiro torna-se completa para espaços finitos.
- Claramente, no pior caso, a complexidade espacial para qualquer dos algoritmos básicos de procura passa a ser da ordem b^{d+1} quando se utiliza o conjunto de nós explorados.
- Recorrendo ao conjunto de nós explorados, a complexidade dos algoritmos de procura é limitada pelo **número de estados** no espaço de procura e não pelo número de caminhos nesse espaço. Para alguns problemas, pode resultar em diminuições exponenciais em tempo e espaço.
- Contudo, em espaços de procura muito grandes pode continuar a ser proibitivo.



Implementação dos algoritmos

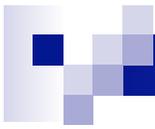
Obviamente, deve-se ter algum cuidado na selecção das estruturas de dados para implementar a fronteira e o conjunto de estados explorados. Habitualmente o conjunto de estados explorados é implementado com uma tabela de dispersão (hash table). Quanto à fronteira, normalmente opta-se por:

- Fila de prioridade (priority queue) quando o grafo de estados é esparso: número reduzido de nós sucessores limitados por uma constante pequena. Complexidade temporal $O(N * \log_2 N + L * \log_2 N)$, em que N o número de estados e L o número de arcos. Esta é a situação habitual:
 - No pior caso têm de se retirar N nós da fila de prioridade, cada uma destas operações da ordem de $\log_2 N$
 - São necessárias no pior caso L inserções na fila de prioridade, cada uma com custo $\log_2 N$.

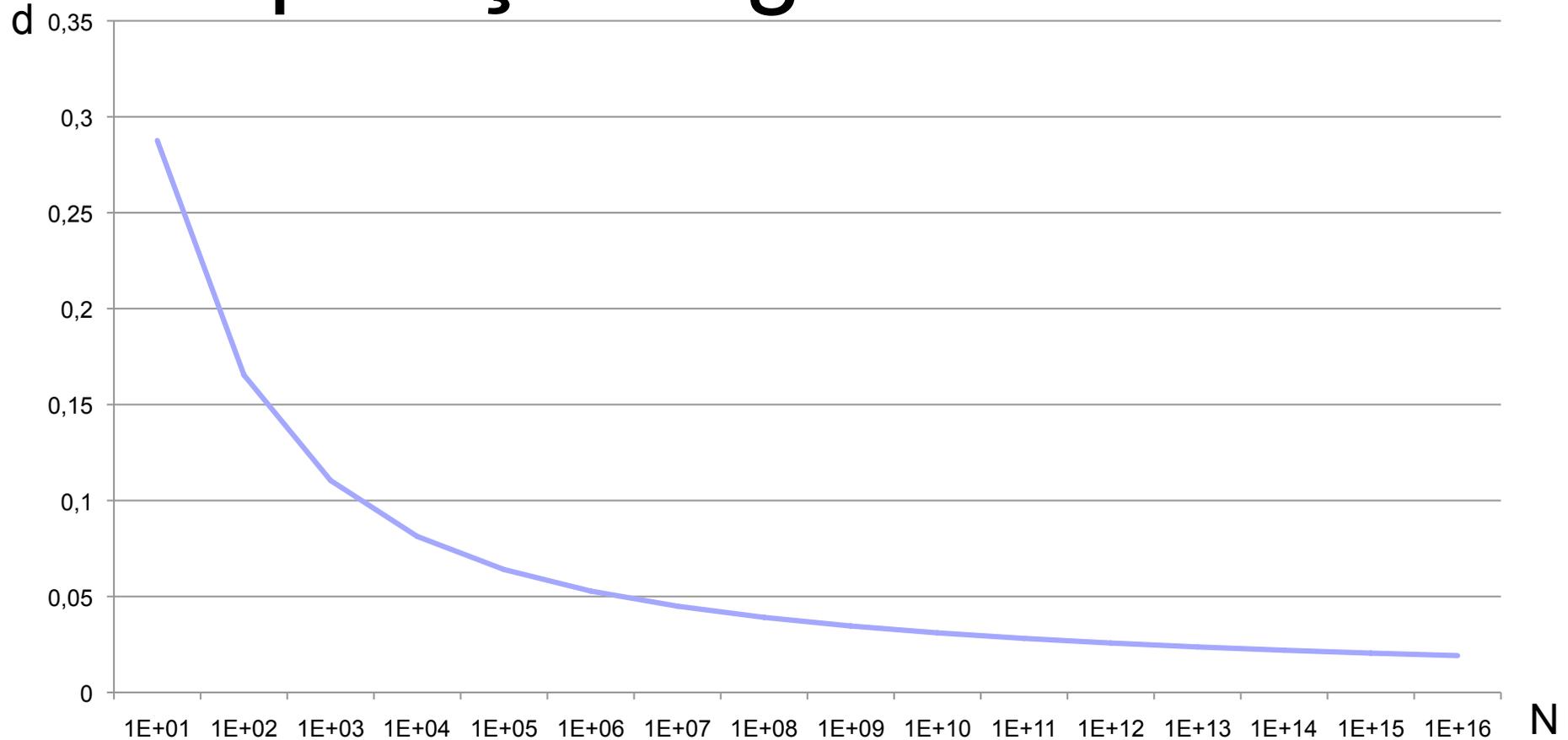
- Quando o grafo é denso, então deve-se utilizar uma lista ou tabela de dispersão. Complexidade temporal da ordem de $O(N^2 + L)$
 - Retirar o nó com menor custo é operação $O(N)$, no máximo N vezes.
 - A inserção de um nó sucessor na fronteira pode ser feita com uma operação de $O(1)$

Comparação implementações

N	Densidade	L	$N \cdot \log N + L \cdot \log N$	$N \cdot N + L$	Rácio
10	1%	1	37	101	0,36
10	10%	10	66	110	0,60
10	50%	50	199	150	1,33
10	90%	90	332	190	1,75
10	100%	100	365	200	1,83
100	1%	100	1329	10100	0,13
100	10%	1000	7308	11000	0,66
100	50%	5000	33884	15000	2,26
100	90%	9000	60459	19000	3,18
100	100%	10000	67103	20000	3,36
1000	1%	10000	109624	1010000	0,11
1000	10%	100000	1006544	1100000	0,92
1000	50%	500000	4992858	1500000	3,33
1000	90%	900000	8979172	1900000	4,73
1000	100%	1000000	9975750	2000000	4,99
10000	1%	1000000	13420590	101000000	0,13
10000	10%	10000000	133010001	110000000	1,21
10000	50%	50000000	664518496	150000000	4,43
10000	90%	90000000	1196026991	190000000	6,29
10000	100%	100000000	1328904115	200000000	6,64
100000	1%	100000000	1662625011	10100000000	0,16
100000	10%	1000000000	16611301438	11000000000	1,51
100000	50%	5000000000	83049863336	15000000000	5,54
100000	90%	9000000000	149488425234	19000000000	7,87
100000	100%	10000000000	166098065708	20000000000	8,30



Comparação algoritmos



Implementação em lista é preferível quando valor de densidade $d = L/N^2$ dos arcos é superior a $(N - \log_2 N) / (N * \log_2 N - N)$



Sumário

- A formulação do problema normalmente requer uma abstracção dos detalhes da realidade para definir um espaço de estados que possa ser explorado
- Variedade de estratégias de procura cega
- Procura de aprofundamento progressivo usa apenas espaço linear e da mesma ordem de grandeza temporal do que outros algoritmos de procura cega. É o algoritmo de escolha para procura cega.
- Procura bidireccional pode reduzir enormemente a complexidade temporal, mas nem sempre é aplicável e requer espaço exponencial.