

1ª Parte

Qualquer fraude no processo de avaliação de conhecimentos implica a reprovação no corrente ano lectivo (incluindo a Época Especial) e será participada ao Conselho Directivo para procedimento disciplinar.

(3,0) 1 – O recém-criado Departamento de Informática da Universidade da Lusólia necessita de formar o seu corpo docente. As disciplinas asseguradas pelo Departamento estão divididas em três grupos: A, B e C.

Considera-se que um mesmo docente não deve leccionar disciplinas de dois grupos distintos.

Na tabela seguinte encontram-se registados alguns dados relativos a cada grupo de disciplinas, nomeadamente:

- a carga horária semanal do grupo de disciplinas por docente;
- a utilização dos laboratórios, medido em número de horas de laboratório por semana e por docente;
- o potencial de publicações científicas, medido em número médio anual de publicações científicas por docente;
- as necessidades lectivas mínimas e máximas de cada grupo de disciplinas, por semana.

	Grupo de disciplinas		
	A	B	C
Carga horária semanal (h/docente)	12	9	8
Utilização de laboratórios (h / (semana x docente))	3,2	1,4	2,3
Potencial Anual de Publicações Científicas	0,3	0,75	0,9
Nº mínimo de horas lectivas por semana	35	20	15
Nº máximo de horas lectivas por semana	85	65	80

Admita que a carga horária total dos docentes do departamento não deve exceder as 150 horas semanais, que apenas se dispõem de 42 horas de laboratório livres por semana e que o Departamento não poderá contratar mais do que 20 docentes.

Formule este problema com um modelo de Programação Linear adequado, sabendo que se pretende maximizar o potencial das publicações científicas anuais do novo Departamento.

2 – Considere o seguinte problema de Programação Linear

$$\begin{aligned}
 \text{(P): } \quad & \mathbf{Min} \quad F = \quad 2 \quad X \quad + 3 \quad Y \quad + 5 \quad Z \\
 & \text{s.a.} \quad \quad \quad X \quad + 2 \quad Y \quad + \quad Z \quad \geq \quad 20 \\
 & \quad \quad \quad X \quad + \quad Y \quad + 2 \quad Z \quad \leq \quad 60 \\
 & \quad \quad \quad X \quad , \quad Y \quad , \quad Z \quad \geq \quad 0
 \end{aligned}$$

e a correspondente matriz inversa da base óptima de P

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} -1/2 & 1 \\ 1/2 & 0 \end{bmatrix}$$

(1,0) a) Utilizando a formulação matricial do Simplex construa o quadro óptimo do Simplex.

(1,5) b) Admita que no problema P, os coeficientes da variável X na primeira e na segunda restrições foram alterados, respectivamente, para β e -2β ($\beta \in \mathfrak{R}$). Determine o valor do parâmetro β por forma a que a solução óptima determinada na alínea a) não se altere.

(1,5) c) Se ao problema inicial P se adicionar a restrição $X+Y \leq 5$, manter-se-á a solução óptima determinada na alínea a)? Em caso negativo, determine a nova solução óptima utilizando o algoritmo simplex dual, ou o algoritmo simplex revisto, partindo da base (X, Z, F_2), sendo F_i a variável de folga correspondente à i-ésima restrição.

3 – Considere o seguinte problema de transportes, com 3 origens e 3 destinos, cuja matriz de custos é a matriz **C** e cujos vectores de ofertas e procura são respectivamente o vector **o** e **p**:

$$C = \begin{bmatrix} 2 & 7 & 3 \\ 8 & 9 & 6 \\ 5 & 5 & 4 \end{bmatrix}, \quad o = [30 \quad 35 \quad 27], \quad p = [21 \quad 14 \quad 32]$$

(0,5) a) Determine uma solução básica admissível pelo método do Custo Mínimo.

(1,5) b) Resolva o problema utilizando o algoritmo de transportes, tomando como solução inicial, a solução obtida após completar a solução parcial formada pelas variáveis $x_{11} = 21$; $x_{12} = 4$; $x_{13} = 5$; $x_{33} = 27$.

(1,0) c) Suponha que a matriz C está expressa em unidades monetárias (u.m.) e que por cada unidade não escoada da origem 2, se pagam 2 u.m.. A solução obtida na alínea anterior mantém-se óptima com esta alteração? Justifique.

2ª Parte

Qualquer fraude no processo de avaliação de conhecimentos implica a reprovação no corrente ano lectivo (incluindo a Época Especial) e será participada ao Conselho Directivo para procedimento disciplinar.

(2,5) 4 – O conhecido investigador da União Europeia, Peter Vanvolkiverm, foi convidado pela Universidade da Lusólia (UL) para assinar um contrato.

Peter Vanvolkiverm valoriza a assinatura deste contrato com 3900 unidades de satisfação (u.s.). Se durante o próximo ano, a UL fizer uma avaliação positiva do seu desempenho, o que poderá acontecer com 60% de probabilidade, aumentará a sua satisfação em 300 u.s..

Peter Vanvolkiverm poderá não assinar este contrato, pois espera que, com 20% de probabilidade, lhe seja feito outro convite, desta vez por uma universidade estrangeira. No entanto, se esse convite não se concretizar, terá de dedicar-se apenas à investigação.

Peter Vanvolkiverm atribui à aceitação do convite para a universidade estrangeira uma satisfação pessoal de 6000 u.s.. Se for convidado e não aceitar este contrato, Peter Vanvolkiverm irá dedicar-se apenas à investigação.

Apesar da complexidade da sua área de investigação, estima-se que, com 80 % de probabilidade, a produção científica seja elevada, a que corresponderá uma satisfação de 3600 u.s.. No entanto, com 20% de probabilidade, os resultados poderão não ser interessantes, correspondendo neste caso a uma satisfação de apenas 1680 u.s.

Ajude este investigador a tomar a melhor decisão.

5 – Considere um sistema de Filas de Espera ilimitadas em série, constituído por dois sectores, A e B.

O sector A acolhe apenas clientes vindos do exterior do sistema e os clientes que saírem deste sector, terão ainda que passar pelo sector B, conforme se esquematiza na figura seguinte.



Sabe-se que os sectores A e B têm, respectivamente, dois e três servidores e que cada servidor demora em média 2 minutos a atender um cliente, segundo um processo Poissoniano.

VOLTE, SE FAZ FAVOR →→→→→→→→→→

Sabe-se também, que as chegadas de clientes ao sector A, vindos do exterior, seguem um processo de Poisson, de taxa média igual a 50 clientes por hora e que a probabilidade de não existir nenhum cliente no sector B é de 17,27%.

(1,0) a) Determine o número médio de clientes que aguardam a sua vez para ser atendidos no sector A.

(1,0) b) Determine o tempo médio em minutos, que um cliente despende no sector B.

(0,5) c) Determine o número médio de clientes no sistema total.

(1,0) d) Qual a probabilidade de um cliente chegar ao sistema e encontrar 4 clientes no sector A e 2 clientes no sector B?

(1,5) e) Admita agora que no sector A os clientes são divididos em duas classes de prioridade e que os clientes da classe de prioridade mais elevada representam 40% dos clientes totais. Suponha que um cliente da classe de prioridade mais elevada ao chegar ao sector, e não havendo mais nenhum cliente da sua classe em espera, é atendido logo que um dos servidores se encontre desocupado. Qual o tempo médio que um cliente da classe de prioridade mais elevada despende no sistema total?

6 – O distinto investigador Peter Vanvolkiverm, com a sua elevada produtividade científica, publica os seus artigos segundo um processo de Poisson com uma taxa média de 1,2 artigos por ano.

Quando o intervalo de tempo entre duas publicações consecutivas é inferior a meio ano, existe uma probabilidade de 1/6 de o investigador vir a ser convidado para orador de uma conferência internacional, o que lhe trará um lucro que se pode considerar com distribuição Uniforme no intervalo [2000 u.m.; 5000 u.m.] (u.m. – unidades monetárias).

Nota:

$$X \sim \text{Exp}(\lambda) \Leftrightarrow F_X(x) = 1 - e^{-\lambda x}, x > 0$$

$$X \sim \text{Poisson}(m) \Leftrightarrow P(X = k) = e^{-m} \frac{m^k}{k!}, k = 0, 1, 2, 3, \dots$$

(1,0) a) Elabore a rotina “**Tempo**” que lhe permite gerar o intervalo de tempo entre duas publicações consecutivas de Peter Vanvolkiverm.

(0,5) b) Elabore a rotina “**Lucro**” que lhe permite gerar o lucro que Peter Vanvolkiverm pode vir a ter se for convidado para proferir uma palestra numa conferência internacional.

(1,0) c) Elabore a rotina “**Receita**” que lhe permita gerar o valor da receita total obtida por Peter Vanvolkiverm, em palestras de conferências internacionais, durante três anos. Assuma que os convites para estas palestras dependem exclusivamente do intervalo de tempo entre duas publicações consecutivas, como se referiu acima.