FACULDADE DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
UNIVERSIDADE NOVA DE LISBOA
Departamento de Matemática

INTRODUÇÃO À INVESTIGAÇÃO OPERACIONAL

Exame de Recurso

16 de janeiro de 2017 - Duração: **3 horas**

ATENÇÃO: QUALQUER FRAUDE DETETADA NESTA PROVA IMPLICARÁ A REPROVAÇÃO NO CORRENTE ANO LETIVO NESTA UNIDADE CURRICULAR E SERÁ PARTICIPADA AO CONSELHO EXECUTIVO PARA PROCEDIMENTO DISCIPLINAR.

I

O coro "emCantus" irá realizar três pequenos concertos no próximo mês. Em cada um dos concertos o espetáculo deverá ter uma duração máxima de 30 minutos.

De entre o repertório de peças musicais que o coro pode apresentar, a organização dos concertos pretende determinar qual a melhor distribuição das peças musicais pelos três dias de apresentações, bem como a sequência das peças musicais de cada concerto.

A organização considera que as primeiras três peças musicais apresentadas no concerto definem completamente a opinião do público, não tendo as restantes peças musicais impacto na satisfação geral do mesmo.

Na tabela seguinte apresentam-se o conjunto de peças musicais que o coro poderá apresentar, as respetivas durações e uma estimativa da satisfação do público, expressa em unidades de satisfação, em função da posição em que a peça é apresentada no concerto:

	Duração	Satisfação em função da posição no concerto		
Peça Musical	**(minutos)**	**1º lugar**	**2º lugar**	**3º lugar**
1	12	30	20	10
2	9	15	13	10
3	5	20	23	12
4	9	8	10	9
5	13	5	13	17
6	14	18	23	27
7	9	19	15	9
8	5	7	6	2
9	8	12	15	13
10	7	25	23	18
11	7	17	16	23
12	10	13	9	5
13	9	17	19	25
14	6	23	18	9
15	8	5	14	23

Sabe-se que as peças musicais 5 e 12 não deverão fazer parte do mesmo concerto.

Naturalmente, nenhuma peça deve ser apresentada mais do que uma vez num concerto e pretende-se apresentar um repertório de peças variado. Assim sendo, só é permitida a apresentação de uma mesma peça em concertos que não sejam consecutivos, isto é, se uma peça for apresentada no primeiro concerto, não poderá ser escolhida para integrar o conjunto de peças do segundo concerto. Para além disso, havendo lugar à apresentação de uma mesma peça em dois concertos distintos, ela deverá ser apresentada numa posição diferente da apresentada no concerto anterior.

As peças musicais 3 e 8 deverão ser incorporadas no mesmo concerto e nesse caso, a peça 8 deverá ser apresentada imediatamente a seguir à peça 3.

a) Formule um modelo de Programação Linear que ajude a organização a planear a programação dos concertos que maximiza a satisfação global do público.

(2,0)

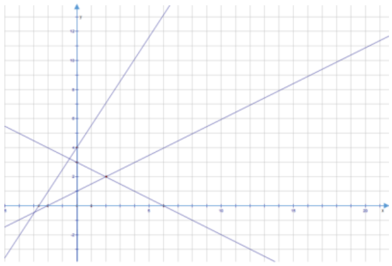
b) A organização decidiu que pelo menos uma das peças musicais 2, 4 ou 6, deverá ser incorporada na programação de dois concertos. Acrescente as condições necessárias à formulação anterior, por forma a satisfazer esta nova restrição.

(1,0)

II

Considere o Problema de Programação Linear seguinte, cuja região admissível se começou a esboçar:

$$
\begin{array}{lrrcr}
\text{Max } F = & -6x & +\ 2y & & \\
\text{s.a} & -x & +\ 2y & \geq & 2 \\
 & -3x & +\ 2y & \leq & 8 \\
 & x & +\ 2y & \geq & 6 \\
 & x, & y & \geq & 0
\end{array}
$$



a) Sombreie a área correspondente à região admissível e resolva o problema **(resolução desta alínea na folha fornecida).**

(1,5)

b) Admita que o termo independente da 2ª restrição passou a ser **θ,** com **$-2 \leq \theta \leq 8$.** Resolva o problema de Programação Linear Paramétrica resultante.

(2,0)

c) Suponha que ao problema original se acrescentou uma nova variável não negativa **z**, com coeficiente 3 na função objetivo e coeficientes 1, 3 e 2 respetivamente na 1ª, 2ª e 3ª restrições.

Sabendo que uma solução básica ótima deste novo problema é (x*, y*, z*) = (0, 1, 2), escreva o correspondente quadro ótimo do Simplex.

(1,5)

$$
\begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 \\ -3 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & -2/9 & 1/3 \\ 0 & 1/9 & 1/3 \\ -1 & 1/3 & 0 \end{bmatrix}; \quad
\begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 3/2 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}; \quad
\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1/2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix}
$$

III

Considere um problema de transportes com 3 fábricas (F1, F2 e F3) e 3 clientes (A, B e C).

Nas tabelas seguintes apresentam-se os custos unitários de transporte das fábricas para os clientes, expressos em unidades monetárias (u.m.), bem como as necessidades semanais de cada cliente e as disponibilidades das fábricas.

Custos unitários de transporte (u.m.).

	A	B	C
F1	2	3	5
F2	3	1	4
F3	7	2	6

Disponibilidades semanais das fábricas e necessidades dos clientes.

	F1	**F2**	**F3**
Disponibilidades	50	100	60
	A	**B**	**C**
Necessidades	80	60	90

Os clientes B e C deverão ter as suas necessidades completamente satisfeitas.
Utilizando o Método do Custo Mínimo para determinar uma solução básica admissível inicial, resolva o problema de distribuição semanal, que minimiza o custo total de transporte.
(2,0)

IV

Considere um problema de Teoria da Decisão caracterizado pelo quadro seguinte onde se indicam os lucros (em unidades monetárias) associados a cada par (decisão; estado da natureza):

	θ_1	θ_2	θ_3
A	80	50	15
B	50	45	40

a) Que decisão recomendaria a este agente de decisão? Justifique a sua resposta.

(1,5)

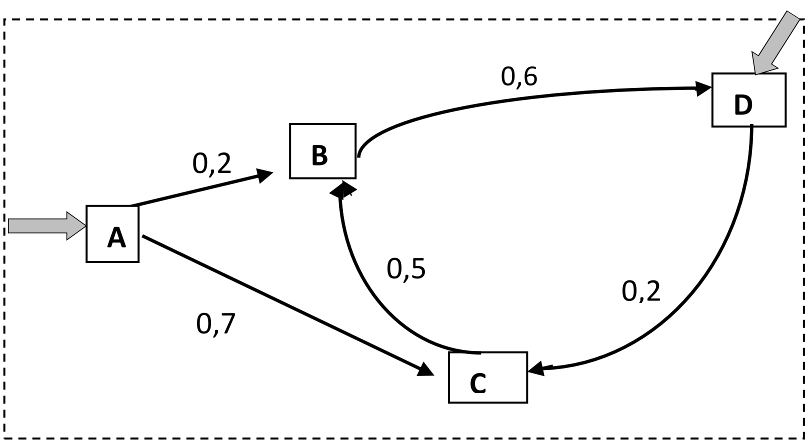
b) Admita que a probabilidade do estado da natureza θ_1 é de 5%. Qual a decisão recomendada nestas circunstâncias? Justifique.

(1,5)

V

Considere o sistema de filas de espera (todas do tipo M/M/s) que se esquematiza ao lado.

Os clientes vindos do exterior entram no setor A ou no setor D, com uma taxa de 20 e 2,8 clientes por hora, respetivamente. As transições entre setores, fazem-se com as probabilidades de transição indicadas.



a) Sabendo que no setor A existe um único servidor e que a duração do atendimento de um cliente tem um valor médio de 2,4 minutos, determine a probabilidade do tempo de permanência neste setor ser superior a 10 minutos.

(1,0)

Tempo de Espera no sistema M/M/1: $\mathcal{W} \sim$ Exponencial($\mu(1-\rho)$)

Se X ~ Exponencial(λ), então $F_X(x) = 1 - e^{-\lambda . x}$, $x \geq 0$

b) Determine as taxas efetivas de chegada a cada um dos setores B, C e D.

(1,0)

c) Sabendo que as taxas de serviço em cada setor são dadas pela tabela abaixo, indique justificando, o número de servidores que propõe para cada um dos setores B, C e D.

Setor	**B**	**C**	**D**
μ (por hora)	8	15	15

(0,5)

d) Tendo em conta os resultados abaixo apresentados, determine o tempo médio de permanência de um cliente no sistema total.

(1,0)

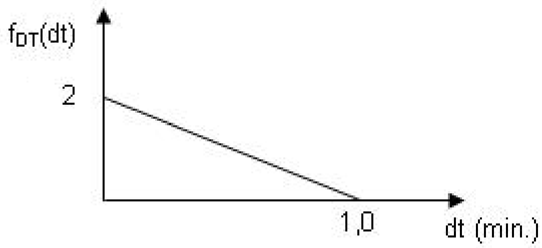
e) Sem efetuar cálculos, indique como determinaria a probabilidade de se encontrar apenas um cliente no sistema total.

(1,0)

	λ_A	λ_B		λ_C		λ_D	
Servidores	**1**	**2**	**3**	**2**	**3**	**1**	**2**
L	4	3,429	1,737	1,491	1,125	2	0,75
W	0,2	0,286	0,145	0,093	0,07	0,2	0,075
P_0	0,2	0,143	0,211	0,304	0,339	0,333	0,5
P_1	0,16	0,214	0,316	0,325	0,362	0,222	0,333

VI

Considere um processo de chegadas de clientes a um sistema com um único servidor, caraterizado por intervalos de tempo entre chegadas consecutivas cuja função densidade de probabilidade se esquematiza ao lado.



a) Indique os instantes de chegada dos dois primeiros clientes. Utilize a sequência de NPA's Uniforme[0; 1] seguinte: **0,896 0,987 0,569 0,413 0,248 0,693**

(1,5)

b) A duração do atendimento segue uma distribuição Exponencial de média 7 minutos. Determine o tempo que o segundo cliente aguarda para ser atendido. Utilize a sequência de NPA's Uniforme[0; 1] seguinte: **0,351 0,266 0,610 0,704 0,483 0,194**

(1,0)