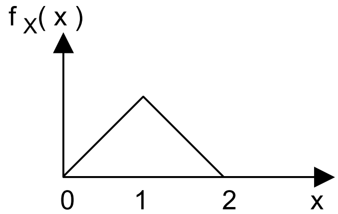
SIMULAÇÃO

- 1 -

Elabore uma rotina que lhe permita gerar números pseudo-aleatórios (NPA) com distribuição X ($f_X(x)$ representa a função de densidade de probabilidade de X e $F_X(x)$ representa a função de distribuição acumulada de X) :

a) X ~ Uniforme [a , b] , a < b .

b)



c) X ~ Normal (μ ; σ) .

d) X ~ Exponencial (λ) .

e)

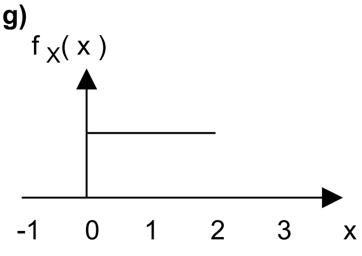
$$f_X(x) = \begin{cases} 0 & ; \; x \notin [0;1] \\ -6 \cdot x^2 + 6 \cdot x & ; \; x \in [0;1] \end{cases}$$

f)

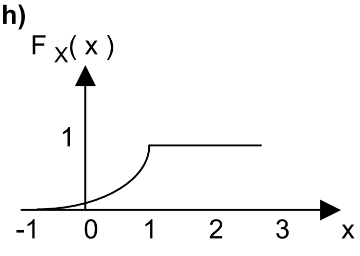
$$f_X(x) = \begin{cases} 0 & ; \; x \notin [0;1] \\ 3 \cdot x^2 - 6 \cdot x + 3 & ; \; x \in [0;1] \end{cases}$$

Ruy Costa, 2011

g)



h)



Nota : $F_X(x)$ é uma função quadrática no intervalo [-1 ; 1] com tangente horizontal em x = -1 .

- 2 -

Elabore uma rotina que lhe permita gerar números pseudo-aleatórios com distribuição X :

a) X ~ Uniforme { 1 , 2 , 3 , 4 , 5 , 6 }

b) X ~ Binomial (n = 5 ; p = 0,3)

Nota : $X \sim Bin(n ; p) \Leftrightarrow P(X = k) = C^{n}_{k}\, p^{k}\, (1-p)^{n-k}$; $k = 0 , 1 , ... , n$.

c) X ~ Poisson (m)

Notas: 1) $X \sim Poisson(m) \Leftrightarrow P(X = k) = m^{k} . e^{-m} / k!$; $k = 0 , 1 , 2 , ...$

2) As variáveis aleatórias Poisson(m) e Exponencial(λ) estão relacionadas...

d)

k	Azul	Verde	Amarelo	Branco
P (X = k)	2 / 6	1 / 6	1 / 6	2 / 6

- 3 -

Elabore um rotina que lhe permita gerar, tão eficientemente quanto possível, NPA com distribuição X, cuja função densidade de probabilidade é dada por :

a)
$$f_X(x) = \begin{cases} -0,5\,x + 0,5 & ; \ x \in [-1 , 1] \\ 0 & ; \ x \notin [-1 , 1] \end{cases}$$

b)
$$f_X(x) = \begin{cases} (2/3) + x^2 & ; \ x \in [-1 , 0] \\ 0 & ; \ x \notin [-1 , 0] \end{cases}$$

c)
$$f_X(x) = \begin{cases} 0,5 . \operatorname{sen}(x) & ; \ x \in [0 , \pi] \\ 0 & ; \ x \notin [0 , \pi] \end{cases}$$

d)
$$f_X(x) = \begin{cases} -2\,x & ; \ x \in [-1 , 0] \\ 0 & ; \ x \notin [-1 , 0] \end{cases}$$

e)
$$f_X(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x} & ; \ x \in [1 , e] \\ 0 & ; \ x \notin [1 , e] \end{cases}$$

f)
$$f_X(x) = \begin{cases} \dfrac{12}{7} x^3 + \dfrac{12}{7} x^2 & ; \ x \in [0 , 1] \\ 0 & ; \ x \notin [0 , 1] \end{cases}$$

Ruy Costa, 2011

- 4 -

Uma variável aleatória com distribuição Lognormal $L(m, \sigma)$, de mediana m e parâmetro de forma σ, relaciona-se com a distribuição $Z \sim$ Normal $(0, 1)$ do modo seguinte:

$$L(m, \sigma) \sim m \cdot \exp(\sigma \cdot Z)$$

Como poderia gerar NPA com distribuição $L(m, \sigma)$?

- 5 -

Seja $X \sim \gamma_5(0{,}5)$ a variável aleatória Gama, para a qual é válida a indicação seguinte:

$$X \sim Y_1 + Y_2 + Y_3 + Y_4 + Y_5 ,$$

com Y_i ($i = 1, \ldots, 5$) variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas com distribuição Exponencial ($\lambda = 0{,}5$), isto é ,

$$f_{Y_i}(y) = \begin{cases} 0 & ; \; y < 0 \\ 0{,}5 \; e^{-0{,}5\, y} & ; \; y \geq 0 \end{cases}$$

a) Elabore a rotina "GAMA5" , que lhe permita gerar números pseudo-aleatórios com distribuição X .

b) Elabore o fluxograma de um programa simplificado que permita estudar a distribuição da variável aleatória $H \sim$ Máximo (A , B) , sendo A e B duas variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas, com distribuição $X \sim \gamma_5(0{,}5)$.

Ruy Costa, 2011

- 6 -

a) Elabore a rotina NOR01 que lhe permita gerar NPA com distribuição Normal Reduzida, isto é, N ($\mu = 0$; $\sigma = 1$) .

b) A variável aleatória Qui-Quadrado com n graus de liberdade é definida do modo seguinte:

$$\chi_n^2 \sim Z_1^2 + Z_2^2 + \ldots + Z_n^2$$

com Z_i i.i.d. e $Z_i \sim N(\mu = 0 ; \sigma = 1)$, $i = 1, 2, \ldots, n$.

Elabore a rotina QUI5 que lhe permita gerar um NPA da distribuição χ_5^2 .

c) Sejam X_1, X_2 e X_3 variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas com distribuição χ_5^2 . Considere a variável aleatória W ~ Máximo (X_1, X_2, X_3) . Elabore um modelo de simulação simplificado que lhe permita estudar a distribuição da variável W.

- 7-

a) Elabore um modelo de simulação que lhe permita estudar a distribuição da variável aleatória $W = X - Y$, sendo X e Y duas variáveis aleatórias independentes:

X ~ Normal ($\mu = 2$; $\sigma = 3$) e Y ~ Exponencial ($\lambda = 0,5$).

Nota : $f_Y(y) = \begin{cases} 0,5 \cdot \exp(-0,5 \cdot y) & ; \; y \geq 0 \\ 0 & ; \; y < 0 \end{cases}$

b) Como poderia, a partir dos resultados fornecidos pelo modelo, estimar $P(X > Y)$?

- 8 -

Seja W_n ~ Mínimo ($X_1, X_2, \ldots, X_n$) , com X_i i.i.d. $X_i \sim N(\mu = 10, \sigma = 2)$, $i = 1, 2, \ldots, n$.

a) Elabore um modelo de simulação que lhe permita estudar a distribuição de W_n .

b) Utilize o modelo elaborado para comparar as distribuições W_n , para n = 1, 2, 3, 5, 10, 20 e 50.

Ruy Costa, 2011

- 9 -

Considere um processo de ocorrências Poissoniano de média 3 por semana.

Admita que a cada ocorrência corresponde uma intensidade $I \sim N(\mu = 10 ; \sigma = 2)$, e que o valor da intensidade de uma ocorrência é independente dos valores de intensidade das outras ocorrências.

Elabore um modelo de simulação que lhe permita estudar a distribuição do máximo anual da intensidade das ocorrências.

- 10 -

Considere o seguinte jogo aleatório:

Num saco (S1) são colocadas 10 fichas Azuis, 20 fichas Brancas, 40 fichas Verdes e 30 fichas Negras.

Noutro saco (S2) são colocadas 50 fichas Azuis, 5 fichas Brancas, 7 fichas Verdes e 38 fichas Castanhas.

Em cada jogada o jogador deve pagar 20$00 e retirar aleatoriamente uma ficha de cada saco.

O jogo só termina quando a cor das duas fichas extraídas for igual, recebendo então o jogador um Prémio (em função dessa cor) de acordo com a tabela seguinte:

Cor	Azul	Branco	Verde
Prémio	100 $ 00	500 $ 00	200 $ 00

Elabore um modelo de simulação simplificado que lhe permita estimar o valor médio e o desvio padrão do " lucro " associado a este jogo.

- 11 -

Considere o seguinte jogo aleatório para dois jogadores :

Cada jogador lança um par de dados equilibrados, sendo observadas as faces voltadas para cima.

O jogo termina se <u>apenas um</u> dos jogadores tiver obtido duas faces iguais voltadas para cima (caso tal não aconteça, os dois jogadores voltam a lançar os seus dados).

Elabore um modelo de simulação que lhe permita estimar a probabilidade de se terminar o jogo sem ultrapassar dez "lançamentos duplos" por jogador.

Ruy Costa, 2011

- 12 -

a) Elabore uma rotina simplificada que lhe permita gerar números pseudo-aleatórios com distribuição Uniforme { 501,502,...,1499,1500 }.

b) A produção diária de uma fábrica segue uma distribuição Uniforme { 501, 502, ... , 1499, 1500 } unidades. A procura diária do referido produto depende do dia da semana, de acordo com o Quadro seguinte:

Dia da semana	Procura diária (unidades)
2ª e 3ª Feira	Normal (μ = 800 ; σ = 150) (*)
4ª Feira	Normal (μ = 1000 ; σ = 180) (*)
5ª e 6ª Feira	Normal (μ = 1200 ; σ = 220) (*)

Nota (*) : Valores arredondados para números inteiros.

Se em determinado dia a produção for superior à procura, as unidades em excesso são armazenadas, ficando disponíveis para os dias seguintes.

Se em determinado dia a procura for superior ao número de unidades disponíveis (produção diária + unidades armazenadas), só se poderá satisfazer parcialmente a procura - haverá , portanto, "unidades pedidas mas não fornecidas" (esses pedidos não satisfeitos não transitam para o(s) dia(s) seguinte(s)).

Elabore um modelo de simulação que lhe permita determinar:

i) a distribuição do número de unidades armazenadas diariamente
ii) a distribuição do número de unidades pedidas mas não fornecidas

- 13 -

Considere um processo de chegadas de clientes a uma fila de espera descrito pelo quadro seguinte:

Cliente nº	Instante de chegada	Duração do atendimento	Cliente nº	Instante de chegada	Duração do atendimento
1	2	13	21	202	10
2	9	6	22	212	8
3	9	8	23	223	5
4	15	15	24	231	23
5	22	10	25	232	15
6	25	5	26	252	10
7	49	9	27	259	12
8	59	11	28	263	5
9	62	12	29	266	6
10	68	18	30	268	9
11	75	9	31	271	8
12	79	13	32	272	35
13	83	19	33	283	28
14	100	2	34	295	15
15	116	3	35	306	17
16	128	6	36	312	12
17	149	15	37	315	5
18	155	18	38	325	5
19	179	5	39	329	9
20	201	10	40	350	1

a) Simule "manualmente" o funcionamento da fila de espera, admitindo que é válida a *disciplina FIFO* (atendimento por ordem de chegada). Preencha um quadro como o seguinte:

T	Acontecimento	N	T espera	T fim	Tlivre

Ruy Costa, 2011

Notas: T - relógio
Acontecimento - chegada de cliente; partida de cliente; início de atendimento; final de atendimento
N - tamanho da fila de espera
T espera - tempo de espera de um cliente antes do início do seu atendimento.
T fim - instante previsto para o final do atendimento de um cliente
T livre - tempo livre do(s) atendedor(es)

i) Admita a existência de apenas um atendedor.
ii) Admita a existência de dois atendedores.

b) Elabore um modelo de simulação que lhe permita simular o funcionamento de uma fila de espera (FIFO / um atendedor).

- 14 -

O processo de chegadas de clientes a uma dada fila de espera pode ser considerado Poissoniano com taxa média igual a 0,7 por minuto.

Sabe-se que o tempo de atendimento de cada cliente se pode considerar com distribuição Tiangular [30; 60; 90] (*) segundos.

Admita que existe apenas um único servidor para proceder ao atendimento dos clientes.

Nota(*): Se U1 e U2 são v.a. i.i.d, tais que U1 ~ U2 ~ U[0;1], então U1 + U2 ~ Triangular[0; 1; 2]

Ruy Costa, 2011

a) Utilize os NPA U[0;1] seguintes para gerar as 10 primeiras chegadas de clientes após as 9:00 h.

0.1526 0.3063 0.4413 0.8898 0.0202 0.7723 0.1453 0.7020 0.4005 0.3174

b) Utilize os NPA U[0;1] seguintes para gerar as durações do atendimentos de cada um desses 10 clientes.

0.2114 0.8961 0.0415 0.7574 0.4862 0.4763 0.9575 0.0823 0.9456 0.2451
0.3940 0.1503 0.0740 0.3742 0.9603 0.7584 0.6057 0.2855 0.5159 0.9534

c) Simule manualmente o funcionamento da referida fila de espera, de modo a processar a entrada dos 10 primeiros clientes.

d) Relativamente ao instante em que entra o 10º cliente, determine o tamanho médio da fila de espera e o tempo médio de espera por cliente e o período total em que o servidor se encontra desocupado.

TABELA DE NÚMEROS PSEUDO-ALEATÓRIOS COM DISTRIBUIÇÃO UNIFORME [0 , 1]

0.1526	0.3063	0.4413	0.8898	0.0202	0.7723	0.1453	0.7020	0.4005	0.3174
0.0730	0.0229	0.5279	0.8635	0.5836	0.3996	0.8867	0.5824	0.2867	0.6288
0.2114	0.8961	0.0415	0.7574	0.4862	0.4763	0.9575	0.0823	0.9456	0.2451
0.3940	0.1503	0.0740	0.3742	0.9603	0.7584	0.6057	0.2855	0.5159	0.9534
0.5250	0.6509	0.1701	0.0322	0.0665	0.3923	0.2824	0.5417	0.7144	0.6815

0.4620	0.2787	0.2031	0.9405	0.5684	0.2901	0.5170	0.8411	0.7109	0.8728
0.8904	0.3051	0.2489	0.5737	0.8079	0.5045	0.7918	0.1896	0.0036	0.8612
0.1990	0.7674	0.4620	0.0469	0.5798	0.6040	0.4175	0.9836	0.2936	0.2463
0.3545	0.8432	0.9498	0.4911	0.0073	0.0474	0.4077	0.3853	0.3602	0.2683
0.7768	0.2258	0.6478	0.4277	0.4164	0.5595	0.3542	0.6974	0.9359	0.1832

0.2141	0.4993	0.1946	0.1438	0.2115	0.5054	0.3020	0.7383	0.5811	0.6374
0.6173	0.5134	0.8071	0.0673	0.7501	0.2660	0.6240	0.2169	0.5596	0.0430
0.0160	0.7581	0.1552	0.1413	0.2176	0.6127	0.8964	0.1078	0.7131	0.9528
0.3924	0.7394	0.2370	0.2000	0.5027	0.0828	0.7736	0.0264	0.3366	0.4350
0.5572	0.3537	0.2536	0.3429	0.0723	0.3539	0.8629	0.6034	0.0532	0.4488

0.0240	0.2632	0.4843	0.3103	0.8462	0.6194	0.5999	0.8603	0.6889	0.2187
0.8845	0.2706	0.1615	0.8580	0.0724	0.9632	0.1233	0.5843	0.1481	0.6099
0.6838	0.6943	0.3458	0.1325	0.2023	0.7350	0.1499	0.7030	0.2882	0.5033
0.2949	0.7432	0.8008	0.0459	0.7650	0.9251	0.8496	0.6599	0.7947	0.1704
0.7939	0.8920	0.8684	0.6510	0.2430	0.5392	0.7204	0.7889	0.0564	0.6482

0.3351	0.2559	0.3435	0.5161	0.9468	0.9738	0.4635	0.6896	0.0400	0.1146
0.0260	0.9657	0.3491	0.1002	0.8902	0.3912	0.8583	0.6023	0.1655	0.2629
0.8021	0.5429	0.2113	0.1279	0.6648	0.0939	0.6371	0.7828	0.1808	0.6771
0.3020	0.2747	0.3346	0.9644	0.3156	0.9004	0.3604	0.8776	0.0373	0.2067
0.7427	0.5888	0.0763	0.9906	0.2158	0.5196	0.2920	0.2989	0.7640	0.3421

0.7939	0.4285	0.6219	0.9780	0.9413	0.9262	0.2737	0.5993	0.3436	0.5890
0.4538	0.6278	0.8601	0.4637	0.1466	0.7354	0.6003	0.8472	0.5865	0.8439
0.9235	0.2863	0.2578	0.1254	0.4391	0.5780	0.8950	0.0015	0.0064	0.7691
0.4823	0.1443	0.7348	0.1565	0.2542	0.4755	0.9838	0.2870	0.6951	0.1671
0.3626	0.9576	0.5392	0.6409	0.7307	0.2151	0.7711	0.5689	0.1975	0.3564

0.6251	0.8728	0.1222	0.9284	0.5854	0.7245	0.1143	0.7279	0.3867	0.5460
0.0332	0.8018	0.0131	0.0090	0.9883	0.4470	0.6990	0.0356	0.3388	0.2104
0.9290	0.7975	0.6942	0.8888	0.4372	0.7166	0.9138	0.5291	0.2081	0.4649
0.1071	0.4282	0.4761	0.9641	0.6335	0.1330	0.7256	0.3861	0.1021	0.4403
0.6909	0.1529	0.3726	0.3970	0.3563	0.9363	0.5542	0.3000	0.9564	0.6582

0.0063	0.6962	0.9753	0.4904	0.3382	0.3824	0.1476	0.8548	0.4095	0.4056
0.4576	0.4234	0.3293	0.0625	0.1397	0.1179	0.4572	0.9001	0.6782	0.1102
0.4024	0.7152	0.8076	0.8223	0.0244	0.5547	0.5121	0.9260	0.4326	0.7156
0.0262	0.3432	0.9862	0.7446	0.8342	0.2457	0.2948	0.4386	0.6706	0.0555
0.2176	0.8445	0.5197	0.4444	0.8640	0.2593	0.6158	0.3342	0.5934	0.2297

0.4434	0.8969	0.0152	0.5526	0.7368	0.5543	0.9888	0.2749	0.4803	0.9783
0.6235	0.6936	0.9085	0.0908	0.2787	0.3554	0.5056	0.0636	0.5638	0.0572
0.0060	0.3187	0.3382	0.8460	0.3942	0.5278	0.7112	0.0185	0.9044	0.6130
0.0421	0.1217	0.0210	0.7460	0.9405	0.9525	0.4785	0.3487	0.2657	0.5577
0.2611	0.0930	0.1269	0.2341	0.6033	0.9008	0.8837	0.5287	0.9895	0.9440

0.1454	0.2384	0.1540	0.6444	0.7713	0.4100	0.0812	0.6738	0.8708	0.3403
0.0054	0.9543	0.8034	0.5763	0.4111	0.6576	0.1783	0.9149	0.0327	0.2056
0.8550	0.4029	0.8544	0.2703	0.9428	0.3371	0.1107	0.7734	0.8012	0.2646
0.2859	0.8869	0.0394	0.9820	0.1144	0.0325	0.5169	0.5364	0.5807	0.8823
0.3430	0.2246	0.9190	0.3581	0.8771	0.5934	0.6138	0.6317	0.7286	0.4398

Ruy Costa 2011