Introdução à Investigação Operacional – Eng. Informática

2017/2018

Exercícios Extra

1 – Numa quinta de criação de porcos pretende-se determinar a quantidade diária de milho, trigo e alfafa que cada animal deve receber de modo a serem satisfeitas certas exigências nutricionais. Na tabela seguinte são indicadas as quantidades de nutrientes presentes em cada quilograma de ração.

Nutrientes:	Kg de milho	Kg de trigo	Kg de alfalfa
Hidratos de carbono	90	20	40
Proteínas	30	80	60
Vitaminas	10	20	60
Custo por kg (u.m.)	42	36	30

As quantidades diárias que cada animal necessita de hidratos de carbono, proteínas e vitaminas são pelo menos de 200, 180 e 150, respectivamente.

Sabendo que se pretende minimizar os custos da alimentação de cada animal, formule este problema como um modelo de Programação Linear.

2 – Existem 3 hospitais que devem servir as populações de 8 cidades. Na tabela que se segue é indicado o custo (em unidades monetárias (u.m.)) de servir cada cidade a partir de cada um dos três hospitais existentes.

	Cidades							
Hospital	1	2	3	4	5	6	7	8
1	13	12	3	8	11	5	7	10
2	7	9	9	7	10	9	3	12
3	9	8	11	6	2	4	8	14

Sabe-se também que:

- a população de cada cidade deve ser servida por um único hospital;
- o custo necessário para servir conjuntamente as populações das cidades 6 e 7 por hospitais não pode exceder o custo necessário para servir a população da cidade 8 por um hospital;
- o hospital 3 não deve servir as populações de mais do que 4 cidades, enquanto que o hospital 1 deve servir a população de pelo menos 2 cidades.

Sabendo que se pretende determinar que cidades são servidas por cada um dos hospitais de forma a minimizar os custos totais, formule este problema como um modelo de Programação Linear.

3- Formule o problema 17 da Colecção de Exercícios de Formulação. Que alterações devem ser introduzidas na formulação de modo a serem contempladas as seguintes situações:

a) O Rato ou leva 10 taças ou leva pelo menos 30 taças.

b) O número de pulseiras levadas pelo Rato é 70 ou 96 ou 113.

c) Sabe-se que o valor de cada colar depende da quantidade de colares que o Rato leva. Assim se o Rato levar até 30 colares o valor de cada colar é de 1000 plins. Se o Rato levar entre 31 e 40 colares então o valor de cada colar é de 1000 plins para cada um dos primeiros 30 colares sendo de 1100 plins para cada um dos restantes. Finalmente, se o número de colares for superior a 40 então o valor de cada colar é de 1000 plins para os primeiros 30 colares, é de 1100 plins para cada um dos 10 colares seguintes sendo de 1250 plins para cada um dos colares restantes.

4 - Considere a região admissível S de um problema de Programação Linear definida por

$$\begin{aligned} 2x + 2y &\leq 14 \\ x + y &\geq 2 \\ -x + y &\leq 2 \\ 3x - 2y &\leq 6 \\ x \geq 0,\ y &\geq 0. \end{aligned}$$

Resolva graficamente os seguintes problemas:

a) Max $z_1 = x + 2y$

s.a $(x,y) \in S$

b) Max $z_2 = x + y$

s.a $(x,y) \in S$

c) Min $z_3 = x + 2y$

s.a $(x,y) \in S$

d) Max $z_4 = -x + y$

s.a $(x,y) \in S$

e) Min $z_5 = x$

s.a $(x,y) \in S$

5 - Considere a região admissível T de um problema de Programação Linear definida por

$$\begin{aligned} -2x + 2y &\leq 6 \\ x + y &\geq 7 \\ x \geq 0,\ y &\geq 0. \end{aligned}$$

Resolva graficamente os seguintes problemas:

a) Min $g_1 = x + 2y$

s.a $(x,y) \in T$

b) Max $g_2 = 3x + y$

s.a $(x,y) \in T$

c) Max $g_3 = -x + y$

s.a $(x,y) \in T$

6 – Resolva o seguinte problema de Programação Linear pelo Método Revisto do Simplex, considerando (x,z) as variáveis básicas de partida:

$$\begin{aligned} \text{Min } G = \ & 3x + 2y + 4z \\ \text{s.a} \quad & x - y + 2z \geq 5 \\ & x + 2y + z \geq 5 \\ & x, y, z \geq 0 \end{aligned}$$

7 – Considere o seguinte problema de Programação Linear

$$\begin{aligned} \text{Max} \quad F = \ & 3x + Y \\ \text{s.a} \quad & x \geq 1 \\ & y \geq 2 \\ & x + y \leq 5 \\ & x, y \geq 0 \end{aligned}$$

a) Sabendo que x, y e f_1 são as variáveis básicas óptimas, construa o quadro óptimo do Simplex.

b) Admita que o coeficiente da variável y na função objectivo passou a ser β (β∈IR). Determine:

i) Os valores de β para os quais a solução obtida em a) permanece óptima e única.

ii) Para que valores de β a solução apresentada em a) permanece óptima mas existem bases óptimas alternativas? Apresente a solução óptima neste caso.

c) Admita que ao problema inicial foi adicionada uma variável não negativa w com coeficiente (-2) na função objectivo e coeficientes 1, 2 e 1 na primeira, segunda e terceira restrições respectivamente. Determine se a solução determinada em a) permanece óptima.

d) Se for adicionada a restrição $2x + y \geq 6$ a solução determinada em a) permanece óptima? E a região admissível?

8 – Considere o seguinte problema de transportes com 3 origens e 3 destinos, A tabela seguinte contem a procura nos destinos, a oferta nas origens e o custo de enviar uma unidade entre cada origem e cada destino.

		Destinos			
		1	2	3	Oferta
Origens	1	3	3	4	6
	2	1	4	2	9
	3	5	2	1	2
	Procura	5	8	4	

Resolva este problema de transportes determinando a solução inicial pelo método do canto NW.

9 – Considere o seguinte problema de transportes:

		Clientes			Disponibilidades
		C1	C2	C3	
Fábricas	F1	2	3	6	10
	F2	4	2	5	60
	F3	1	8	9	20
	Necessidades	50	25	25	

Resolva este problema de transportes determinando a solução inicial pelo método do canto NW.

10 – Resolva o seguinte problema pelo algoritmo *Branch and Bound* estudado:

Min $G = 2x + y$

s.t. $5x + 6y \geq 20$

$-5x + 6y \leq 10$

$x, y \geq 0$ e inteiros.

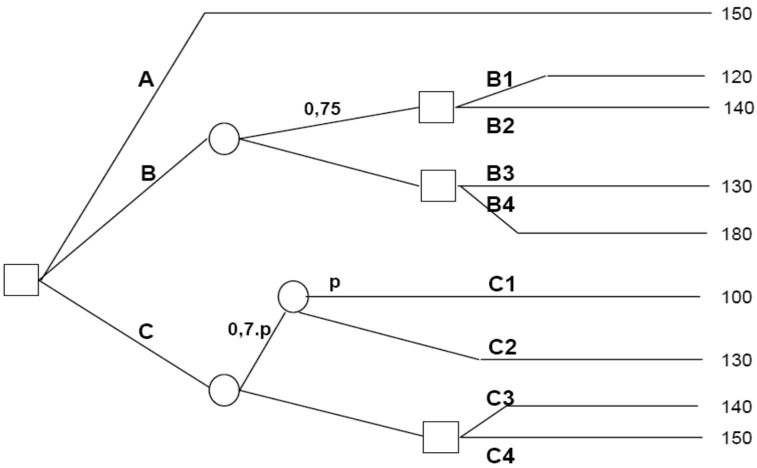
11 – Considere um problema de decisão com a seguinte matriz de custos (em unidades monetárias).

Decisão	**Estados da natureza**			
	?1	?2	?3	?4
A	160	100	80	70
B	90	110	113	140
C	115	80	120	102

a) Como classifica, em termos do nível de otimismo, um decisor que prefere a decisão A? Como classifica um decisor que prefere a decisão B?

b) Determine a matriz dos custos de oportunidade. Que decisão deve ser recomendada com base nesta matriz?

12 – Considere a seguinte árvore de decisão:



Qual a decisão inicial que recomenda baseada na probabilidade p, sabendo que os valores indicados nos ramos finais representam custos (em unidades monetárias).

13 – Numa clínica médica a vacinação contra a gripe A é feita por uma enfermeira que não presta quaisquer outros cuidados de enfermagem.

Sabe-se que em média a enfermeira demora cerca de 4 minutos a vacinar um doente, considerando-se que este procedimento é exponencialmente distribuído. Os pacientes chegam para serem vacinados segundo um Processo Poissoniano com média de 12 pacientes por hora.

Determine:

a) A taxa de ocupação e desocupação do serviço.
b) O comprimento médio da fila de espera.
c) O tempo médio de espera na fila.
d) A probabilidade de estarem dois pacientes na fila de espera.
e) A probabilidade de estarem pelo menos 3 pacientes no posto de vacinação.
f) A probabilidade de um paciente estar mais do que 5 minutos à espera para começar a ser vacinado.

Dada a forte afluência de pacientes para se imunizarem da gripe A, o director do posto médico resolveu deslocar mais um dos enfermeiros para o posto de vacinação. Considera-se que ambos os enfermeiros trabalham ao mesmo ritmo. Neste novo cenário determine:

g) A taxa de ocupação deste novo sistema.
h) O tempo médio de permanência de um paciente no posto de vacinação.
i) A probabilidade de um paciente chegar ao posto de vacinação e ser atendido imediatamente. Compare este resultado com o mesmo parâmetro do sistema anterior.

14 – Exame 2007/2008

Considere um sistema constituído por duas filas em série tal como se esquematiza na figura.

O Sector A só recebe clientes do exterior do sistema e os clientes que saem deste sector movem-se para o Sector B.

Sabe-se que os sectores A e B possuem 2 e 3 servidores respectivamente. Cada servidor passa em média minutos com cada cliente seguindo um processo de Poisson.

Sabe-se também que as chegadas de clientes ao Sector A seguem um processo de Poisson com uma taxa média de 50 clientes por hora e de que a probabilidade de não existirem clientes no sector B é de17.27%.

a) Determine o número médio de clientes aguardando para serem servidos no Sector A.

b) Determine o tempo médio em minutos que um cliente gasta no sector B.

c) Determine o número médio de clientes no sistema.

d) Calcule a probabilidade de um cliente que chega ao sistema encontrar 4 clientes no sector A e 2 clientes no sector B.

e) Considere agora que no sector A os clientes são divididos em 2 classes de prioridade e que os clientes da classe mais elevada correspondem a 40% dos clientes. Assuma que quando um cliente da classe de prioridade mais elevada chega e não existe outro cliente da mesma classe, ele é atendido logo que um dos servidores fica livre. Qual é o tempo médio que um cliente da classe de prioridade mais elevada passa no sistema?

15 – Exame época Normal 2009/2010

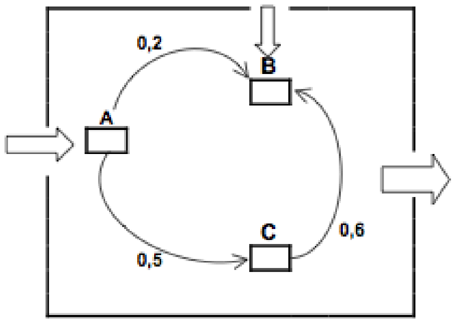
Considere um sistema de redes de filas de espera representado no esquema abaixo. Admita que todas as filas de espera ou são do tipo M/M/1 ou são do tipo M/M/s.

Os clientes podem entrar do exterior em direcção ao Sector A ou em direcção ao Sector B. Sabe-se que os clientes que entram do exterior em direcção ao Sector A chegam segundo um Processo Poissoniano com taxa média igual a 18 por hora. Os clientes que entram directamente para o Sector B chegam segundo um Processo Poissoniano com taxa média igual a 2 clientes por hora.

Do Sector A, 20% dos clientes transitam para o Sector B, 50% transitam para o Sector C e os restantes deixam o sistema. Do Sector C, 60% dos clientes transitam para o Sector B e os restantes para o sistema. Depois de atendidos no Sector B, todos os clientes deixam o sistema.

A taxa de serviço nos diferentes sectores, por servidor, é dada na tabela seguinte:

Sector	μ (por hora)
A	12
B	13
C	13



a) Determine as taxas de chegada aos diferentes sectores.

b) Proponha, justificando, o número de servidores que deveria estar ao serviço em cada sector.

c) A partir dos resultados apresentados no Anexo, determine o tempo médio de permanência de um cliente no sistema.

FORMULÁRIO

X ~ Exponencial(λ): $F_X(x) = 1 - e^{-\lambda . x}$, x > 0

Modelo M/M/1

- $L = \dfrac{\lambda}{\mu - \lambda}$
- Tempo de Espera no sistema M/M/1: ϖ ~ Exponencial(μ(1−ρ))

Fórmula de Pollaczek-Khintchine: $L_q = \dfrac{\lambda^2\sigma^2 + \rho^2}{2(1-\rho)}$

ANEXO

Modelo:	M/M/1	M/M/1	M/M/1	M/M/1	M/M/1	M/M/1
λ (por hora)	8	9	8	9	10	11
μ (por hora)	10	10	13	13	13	13
L	4	9,000	1,600	2,250	3,333	5,500
W (h)	0,5	1,000	0,200	0,250	0,333	0,500

Modelo:	M/M/2	M/M/2	M/M/2	M/M/2	M/M/2	M/M/2	M/M/3
λ (por hora)	8	9	8	9	11	18	18
μ (por hora)	10	10	13	13	13	12	12
L	0,952381	1,1285	0,6797	0,7866	1,0306	3,4286	1,7368
W (h)	0,119048	0,125392	0,085	0,0874	0,0937	0,1905	0,0965