Lógica Computacional

LEI FCT UNL, 2º Semestre 2010/2011

Exame de recurso, versão D

Grupos I a III — teste sobre Lógica Proposicional

Grupos IV a VI — teste sobre Lógica de Primeira Ordem

Justifique cuidadosamente todas as respostas

Data: 06/07/2011 Duração: Exame 3h30m; Teste 1h45m

Identificação

Nome:

Número:

Grupo I (1+1+1 valores)

Sejam p, q e r símbolos proposicionais. Verifique, justificando cuidadosamente, se:

1. $\models \neg(p \to q) \to (p \wedge \neg q)$
2. $\neg(p \wedge q) \equiv \neg p \wedge \neg q$
3. $(\bigwedge_{i=1}^{n} \varphi_i) \vee \psi \equiv \bigwedge_{i=1}^{n}(\varphi_i \vee \psi)$, para $n \geq 0$ e sendo cada φ_i uma fórmula de Lógica Proposicional.

Grupo II (1.5+1.5 valores)

Sejam φ, ψ fórmulas de Lógica Proposicional. Mostre que são verdadeiras as seguintes afirmações.

1. $\{\neg(\neg\varphi \vee \neg\psi)\} \vdash \varphi \wedge \psi$
2. $\{\neg(\varphi \to \psi)\} \vdash \neg(\neg\varphi \vee \psi)$

Grupo III (2+1+1 valores)

1. Seja $\varphi \stackrel{\text{def}}{=} (p \vee ((r \to \neg q) \wedge r)) \to (\neg q \vee p)$. Calcule $\psi \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{T}(\varphi)$, diga se ψ é uma fórmula de Horn, e verifique se é válida.

2. Determine, usando o algoritmo de Horn, a natureza da seguinte fórmula.

   $\neg p \wedge q \wedge (\neg r \vee s) \wedge q \wedge (\neg r \vee \neg s \vee q) \wedge r$

3. Mostre por resolução SLD que a seguinte fórmula é contraditória, indicando o selector usado.

   $(\neg d \vee \neg c \vee \neg c) \wedge (\neg b \vee a) \wedge e \wedge (\neg e \vee d) \wedge b \wedge (c \vee \neg a)$

Grupo IV (1+1+1 valores)

Sejam P e Q símbolos de predicado unários. Verifique se:

1. $\{\exists x\,((P(x) \wedge Q(x)) \to R(x)), \forall x\, Q(x)\} \models \exists x\, R(x)$
2. $\exists x\,(\psi \to \varphi) \equiv \psi \to \exists x\, \varphi$, se $x \notin \mathsf{VL}(\psi)$
3. $\{(R(y,z) \vee R(f(x),z)) \wedge (S(x,y) \vee S(x,f(x)))\} \models R(f(x),x) \wedge S(x,f(x))$, usando resolução-L.

Grupo V (1.5+1.5+1 valores)

Sejam P, Q e R símbolos de predicado unários. Mostre que:

1. $\{\exists x\, P(x) \wedge \exists x\, \neg Q(x)\} \vdash \neg(\forall x\, \neg P(x) \vee \forall x\, Q(x))$
2. $\{\forall x\, (P(x) \to \neg Q(x)), P(y)\} \vdash \exists x\, \neg Q(x) \wedge \exists x\, P(x)$
3. a seguinte derivação não é uma prova de dedução natural em Lógica de Primeira Ordem

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{(\forall x\, Raiz(x,x))^1}{Raiz(x,x)}\,\forall_E}{\forall y\, Raiz(x,y)}\,\forall_I}{\exists x\, \forall y\, Raiz(x,y)}\,\exists_I$$

Grupo VI (2+1 valores)

1. Seja $\varphi \stackrel{\text{def}}{=} \forall y\,(R(x) \wedge \exists x\, S(f(x)))$ e $t = g(y)$, com $\{x, y\} \subseteq X$, $\{f, g\} \subseteq SF_1$ e $\{R, S\} \subseteq SP_1$.
   (a) Justifique que φ é uma fórmula de Lógica de Primeira Ordem.
   (b) Indique quais são as variáveis livres e as mudas de φ.
   (c) Calcule $\varphi\{t/x\}$.
   (d) O termo t é livre para a variável y em φ?
2. Considere-se uma estrutura de interpretação $\mathcal{M} = (U, I)$ sobre uma assinatura Σ, uma atribuição $\rho \in ATR_{\mathcal{M}}^{X}$, uma variável $x \in X$ e um valor $u \in U$. Mostre que, dado $t \in T_{\Sigma}^{X}$, se $r \in T_{\Sigma}^{X}$ tal que $[\![r]\!]_{\mathcal{M}}^{\rho} = u$ então $[\![t]\!]_{\mathcal{M}}^{\rho[x:=u]} = [\![t\{r/x\}]\!]_{\mathcal{M}}^{\rho}$.