Lógica Computacional

Duração: 3h

Época de 2012 / 13 – Exame de Recurso (sem Consulta)

Grupos para Avaliar (Todos por Omissão)

G1	G2	G3	G4

Nome: **nº:**

1.1. **(5 valores)** Considere as seguintes frases

- O Rui estuda na FCT, mas a Ana não.
- O director da FCT não é presidente do DI.
- Quando o Rui vai à FCT a Ana também vai.

a) Apresente uma assinatura Σ = <NP, $NF_0 \cup NF_1$> de uma linguagem de 1ª ordem que lhe permita escrever fórmulas de 1ª ordem corespondentes

NF_0: Constantes	*NF_1: Funções*	*NP: Predicados*
fct di rui ana	director/1 presidente/1	Estudar/2 Ir/2 =/2

b) Traduza para fórmulas de 1ª ordem as frases acima indicadas:

i) O Rui estuda na FCT, mas a Ana não.

Estuda(rui, fct) ∧ ¬Estuda(ana, fct)

ii) O director da FCT não é presidente do DI.

director(fct) ≠ presidente(di)

iii) Quando o Rui vai à FCT a Ana também vai.

Ir(rui, fct) → Ir(ana, fct)

1.2. **(2 valores)** Classifique cada uma das fórmulas abaixo, indicando no quadro (com S e N, respectivamente) se são ou não

V-TT: Verdade Tautológica; V-FO: Verdade Lógica V-TW: Verdade Analítica (Tarski)
P-TT: Possibilidade Tautológica; P-FO: Possibilidade Lógica; P-TW: Pssibilidade Analítica (Tarski)

	V-TT	V-FO	V-TW	P-TT	P-FO	P-TW
(a = b) ∧ Tet(a) ∧ Cube(b)	N	N	N	S	S	N
LeftOf(a,b) ∨ LeftOf(b,a)	N	N	N	S	S	S
(a = b) → (Tet(a) ∨ ¬Tet(b))	N	S	S	S	S	S

1.3. **(3 valores)** Considerando os mundos e a linguagem de Tarski, indique se os seguintes argumentos são válidos tautologica (Val-TT), logica (Val-FO) e/ou analiticamente (nos mundos de Tarski Val-TW).

{Premissa 1, ..., Premissa n } |= Conclusão	Val-TT	Val-FO	Val-TW
{ SameRow(a,c), a = b } |= SameRow(b,c)	N	S	S
{ Small(a), Large(b) } |= Smaller(a,b)	N	N	S
{ Tet(a) → Tet(b), ¬ Tet(b)} |= ¬Tet(a)	S	S	S

1.4. (5 valores) Considere as fórmulas P1: **(B ∨ C) → A** e P2: **(A ∧ B) → C,** bem como as fórmulas C1: **B → (A ↔ C)** e C2: **(A ↔ C) → B.**

a) Preencha a seguinte tabela de verdade relativas às fórmulas P1, P2, C1 e C2.

A	B	C	(B ∨ C)	→ A	(A ∧ B)	→ C	B →	(A ↔ C)	(A ↔ C)	→ B
V	**V**	**V**	V	**V**	V	**V**	**V**	V	V	**V**
V	**V**	**F**	V	**V**	V	**F**	**F**	F	F	**V**
V	**F**	**V**	V	**V**	F	**V**	**V**	V	V	**F**
V	**F**	**F**	F	**V**	F	**V**	**V**	F	F	**V**
F	**V**	**V**	V	**F**	F	**V**	**F**	F	F	**V**
F	**V**	**F**	V	**F**	F	**V**	**V**	V	V	**V**
F	**F**	**V**	V	**F**	F	**V**	**V**	F	F	**V**
F	**F**	**F**	F	**V**	F	**V**	**V**	V	V	**F**

b) Por análise da tabela, indique justificando se as fórmulas **C1** e **C2** são ou não consequências tautológicas das premissas P1 e P2.

Justificação:

A fórmula C1 é consequência tautológica das premissas P1 e P2 pois sempre que estas são verdadeiras ela também o é.

Já a fórmula C2 é falsa em algumas interpretações (nomeadamente em que A e C têm o mesmo valor de verdade e B é Falso) em que as premissas são verdadeiras,. Assim sendo, C2 não é consequência tautológica de P1 e P2.

1.5. **(5 valores)** Considere a fórmula **¬((A ∨ B) → C) ∨ ¬(A ∨ B).** Converta-a para as formas normais conjuntiva (CNF) e disjuntiva (DNF), simplificando-as da forma mais conveniente.

¬((A ∨ B) → C) ∨ ¬(A ∨ B)

⇔ ¬(¬(A ∨ B) ∨ C) ∨ ¬(A ∨ B) — Equivalência de →

⇔ (¬¬(A ∨ B) ∧ ¬C) ∨ (¬A ∧ ¬B) — Lei de Morgan

⇔ ((A ∨ B) ∧ ¬C) ∨ (¬A ∧ ¬B) — Dupla Negação

⇔ (A ∧ ¬C) ∨ (B ∧ ¬C) ∨ (¬A ∧ ¬B) — Distribuição

Esta fórmula já está em DNF

⇔ ((A ∨ B) ∧ (A ∨ ¬C) ∧ (B ∨ ¬C) ∧ (¬C ∨ ¬C)) ∨ (¬A ∧ ¬B) — Distribuição

⇔ ((A ∨ B) ∧ (A ∨ ¬C) ∧ (B ∨ ¬C) ∧ ¬C) ∨ (¬A ∧ ¬B) — Idempotência

⇔ ((A ∨ B) ∧ ¬C) ∨ (¬A ∧ ¬B) — Simplificação

⇔ (A ∨ B ∨ ¬A) ∧ (A ∨ B ∨ ¬B) ∧ (¬C ∨ ¬A) ∧ (¬C ∨ ¬B) — Distribuição

⇔ (¬A ∨ ¬C) ∧ (¬B ∨ ¬C) — Simplificação (e comutação)

Esta fórmula já está em CNF e dela pode obter-se uma forma DNF simplificada

⇔ (¬A ∧ ¬B) ∨ ¬C — Distribuição

Grupo 2

(corresponde ao 2º teste)

2.1. (4 valores) Considerando os predicados da linguagem do Mundo de Tarski, traduza para essa linguagem as seguintes proposições

a) O cubo a só está à esquerda do tetraedro b se este for grande.

```
Cube(a) ∧ Tet(b) ∧ (LeftOf(a,b) → Large(b))
```

b) Os cubos a e b estão na mesma linha ou na mesma coluna

```
Cube(a) ∧ Cube(b) ∧ (SameRow(a,b) ∨ SameCol(a,b))
```

c) Se o dodecadedro a for pequeno então os blocos b e c não são ambos grandes.

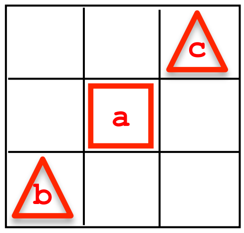
```
Dodec(a) ∧ (Small(a) → ¬(Large(b) ∧ Large(c)))
```

d) Apenas um dos blocos a e b é pequeno.

```
(Small(a) ∧ ¬Small(b)) ∨ (¬Small(a) ∧ Small(b))
```

2.2. **(4 valores)** Considere os mundos e a linguagem do Mundo de Tarski (com tabuleiro de 3 × 3 casas), desenhe um mundo (em 2D) em que sejam verdadeiras as seguintes proposições

```
1. SameShape(b,c) ∧ ¬SameShape(a,c)
2. LeftOf(b,c) ∨ LeftOf(b,b)
3. BackOf(c,a) ∨ BackOf(a,a)
4. Between(a,b,c)
5. Cube(a) ∧ ¬Dodec(c)
```



2.3. (3 valores) Considere o seguinte argumento usando a linguagem de Tarski, e a respectiva demonstração.

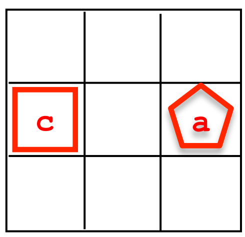
a) Verifique que a demonstração está *errada*, e indique o(s) passo(s) em que as regras do sistema de Dedução Natural não foram corretamente utilizadas

```
1. | Cube(c) → ¬ (Tet(a) ∧ Dodec(a))
2. | Dodec(a)
   |-----------------------------
3. | | Cube(c)
   | |----------------
4. | | ¬(Tet(a) ∧ Dodec(a))      Elim →: 1, 3
5. | | ¬ Dodec(a)                Elim ∧ : 4
6. | | ⊥                         Intr ⊥ : 2, 5
7. | ¬ Cube(c)                   Intr ¬ : 3, 6
```

Erro(s):

No passo 5, a eliminação da conjunção está errada, pois a fórmula 4 não é uma conjunção, mas sim a negação de uma conjunção !

b) Indique no tabuleiro ao lado um contra-exemplo que mostre que o argumento não é válido



2.4. (4 valores) Complete a demonstração abaixo no sistema de Dedução Natural, preenchendo as caixas assinaladas

```
 1.  | A → (B ∨ C)
 2.  | ¬ (B ∧ C)
 3.  | D → A
 4.  | B ↔ C
     |----------
 5.  |  | D
     |  |--------
 6.  |  | A                    Elim → : 3, 5
 7.  |  | B ∨ C                Elim → : 1, 6
 8.  |  |  | B
     |  |  |--------
 9.  |  |  | C                 Elim ↔ : 4, 8
10.  |  |  | B ∧ C             Intr ∧ : 8, 9
11.  |  |  | ⊥                 Intr ⊥ : 2, 10
12.  |  |  | C
     |  |  |--------
13.  |  |  | B                 Elim ↔ : 4, 12
14.  |  |  | B ∧ C             Intr ∧ : 12, 13
15.  |  |  | ⊥                 Intr ⊥ : 2, 14
16.  |  | ⊥                    Elim ∨ : 7, 8 - 11, 12 - 15
17.  | ¬ D                     Intr ¬ : 5 - 16
```

2.5. (5 valores) Valide o argumento abaixo apresentando a respectiva demonstração no sistema de Dedução Natural

```
 1.  | (B ∨ C) → A
 2.  | (A ∧ B) → C
     |------------
 3.  |  | B
     |  |---------
 4.  |  |  | A
     |  |  |------
 5.  |  |  | A ∧ B             Intr ∧ : 3, 4
 6.  |  |  | C                 Elim → : 2, 5
 7.  |  |  | C
     |  |  |------
 8.  |  |  | B ∨ C             Intr ∨ : 7
 9.  |  |  | A                 Elim → : 1, 8
10.  |  | A ↔ C                Intr ↔ : 4 - 6, 7 - 9
11.  | B → (A ↔ C)             Intr → : 3 - 10
```

Grupo 3

(corresponde ao 3º teste)

3.1. (5 valores) Considerando os predicados da linguagem do Mundo de Tarski, traduza para essa linguagem as seguintes proposições

a) Há cubos de diferentes tamanhos.

∃x (Cube(x) ∧ ∃y (Cube(y) ∧ ¬SameSize(x,y)))

b) Todos os tetraedros à esquerda do bloco a estão ao lado de algum bloco.

∀x ((Tet(x) ∧ LeftOf(x,a)) → ∃y Adjoins(x,y))

c) Não há cubos entre dois dodecaedros.

¬∃x ∃y ∃z (Dodec(x) ∧ Dodec(y) ∧ Cube(z) ∧ Between(z,x,y))

d) Apenas cubos são maiores que o tetraedro a.

Tet(a) ∧ ∀x (Larger(x,a) → Cube(x))

e) Se dois blocos estão ao lado um do outro um deles é um cubo.

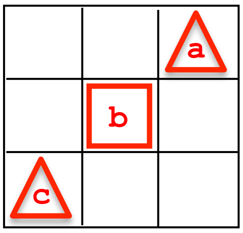
∀x ∀y (Adjoins(x,y) → (Cube(x) ∨ Cube(y)))

f) O maior bloco é um tetraedro.

∃x (Tet(x) ∧ ∀y (x ≠ y → Larger(x,y)))

3.2. (4 valores) Considere os mundos e a linguagem do Mundo de Tarski (com tabuleiro de 3 × 3 casas), desenhe um mundo (em 2D) em que sejam verdadeiras as seguintes proposições

1. ∀x (Cube(x) → ∃y ∃z Between(x,y,z))
2. ¬∃x (Large(x) ∨ Small(x))
3. ∀x (Dodec(x) → Large(x))
4. ∃x ∃y BackOf(x,y)
5. Tet(a) ∧ RightOf(a,b) ∧ ¬ SameShape(a,b)
6. FrontOf(c,a)



3.3. (2 valores) O seguinte argumento é válido analiticamente nos Mundos de Tarski.

```
1 | ∀x (Cube(x) → Medium(x))
2 | ∀x (Dodec(x) → Large(x))
  |---------------------------
3 | ¬ ∃x (Small(x) ∧ ¬ Tet(x))
```

Assinale em baixo, quais os axiomas de Tarski que seria necessário colocar explicitamente como premissas para que o argumento fosse válido logicamente (válido-FO).

- [ ] ∀x (Large(x) ∨ Medium(x) ∨ Small(x))
- [ ] ¬ ∃x (Large(x) ∧ Medium(x))
- [x] ¬ ∃x (Large(x) ∧ Small(x))
- [x] ¬ ∃x (Medium(x) ∧ Small(x))
- [x] ∀x (Tet(x) ∨ Cube(x) ∨ Dodec(x))
- [ ] ¬ ∃x (Tet(x) ∧ Cube(x))
- [ ] ¬ ∃x (Tet(x) ∧ Dodec(x))
- [ ] ¬ ∃x (Cube(x) ∧ Dodec(x))

3.4. (4 valores) Complete a demonstração abaixo no sistema de Dedução Natural, preenchendo as caixas assinaladas.

```
1  | ∀y (Cube(x) ↔ Large(x))
2  | ∃x (Medium(x) ∧ ¬∃y Larger(y,x))
3  | ∀x ∀y ((Medium(x) ∧ Large(y)) → Larger(y,x))
   |-------------------------------------------------
4  | | ∃x Cube(x)
   | |----------
5  | | | a: Cube(a)
   | | |----------
6  | | | Cube(a) ↔ Large(a)                              Elim ∀ : 1
7  | | | Large(a)                                        Elim ↔ : 5, 6
8  | | | | b: Medium(b) ∧ ¬∃y Larger(y,b)
   | | | |-------------------------------
9  | | | | Medium(b)                                     Elim ∧ : 8
10 | | | | ∀y ((Medium(b) ∧ Large(y)) → Larger(y,b))     Elim ∀ : 3
11 | | | | (Medium(b) ∧ Large(a)) → Larger(a,b)          Elim ∀ : 10
12 | | | | Medium(b) ∧ Large(a)                          Intr ∧ : 7, 9
13 | | | | Larger(a,b)                                   Elim → : 11, 12
14 | | | | ∃y Larger(y,b)                                Intr ∃ : 13
15 | | | | ¬∃y Larger(y,b)                               Elim ∧ : 8
16 | | | | ⊥                                             Intr ⊥ : 14, 15
17 | | | ⊥                                               Elim ∃ : 2, 8 - 16
18 | | ⊥                                                 Elim ∃ : 4, 5 - 17
19 | ¬∃x Cube(x)                                         Intr ¬ : 4 - 18
```

3.5. (5 valores) Valide o argumento abaixo apresentando a respectiva demonstração no sistema de Dedução Natural.

```
1  | ∀x ((Cube(x) ∧ ∃y Adjoins(x,y)) → Large(x))
2  | ¬ ∃x Large(x)
   |-------------------------------------------------
3  | | b:
   | |----------
4  | | | Cube(b)
   | | |----------
5  | | | | ∃y Adjoins(b,y)
   | | | |----------
6  | | | | Cube(b) ∧ ∃y Adjoins(b,y)                     Intr ∧: 4, 5
7  | | | | (Cube(b) ∧ ∃y Adjoins(b,y)) → Large(b)        Elim ∀: 1
8  | | | | Large(b)                                      Elim →: 6, 7
9  | | | | ∃x Large(x)                                   Intr ∃: 8
10 | | | | ⊥                                             Intr ⊥: 2, 9
11 | | | ¬ ∃y Adjoins(b,y)                               Intr ¬: 5 - 10
12 | | Cube(b) → ¬ ∃y Adjoins(b,y)                       Intr →: 4 - 11
13 | ∀x (Cube(x) → ¬ ∃y Adjoins(x,y))                    Intr ∀: 3 - 12
```

Grupo 4

(corresponde ao 4º teste)

4.1. (2 valores) Prove que o conjunto S de cláusulas Horn abaixo indicado não é satisfazível.

1. $E \to F$	5. $B \to E$
2. $(A \land E) \to D$	6. $T \to A$
3. $T \to B$	7. $(C \land F) \to E$
4 $B \land C \to \bot$	8. $A \land F \to \bot$

Pelas cláusulas 3 e 6 temos $A = T$ e $B = T$.
Pelas cláusula 5 temos $E = T$.
Pelas cláusula 1 temos $F = T$.
Pelas cláusula 8 temos $\bot = T$ o que prova a contradição.

4.2. (5 valores) Mostre por resolução a validade do seguinte argumento em lógica proposicional.

P1	$A \to (B \lor C)$
P2	$\neg(B \land C)$
P3	$D \to A$
P4	$B \leftrightarrow C$
X	$\neg D$

a) Coloque as premissas e a negação da conclusão na forma clausal.

1	$\neg A \lor B \lor C$	(P1)
2	$\neg B \lor \neg C$	(P2)
3	$\neg D \lor A$	(P3)
4	$\neg B \lor C$	(P4)
5	$B \lor \neg C$	(P4)
6	D	($\neg$X)

b) Mostre que as cláusulas obtidas em a) são inconsistentes, derivando por resolução a cláusula vazia.

7	A	Res 6, 3
8	$B \lor C$	Res 7, 1
9	C	Res 8, 4
10	$\neg B$	Res 9, 2
11	$\neg C$	Res 10, 5
11	$\square$	Res 11, 9

4.3. **(2 valores)** Converta as fórmulas abaixo para a forma Prenex, com a matriz na forma normal CNF.

a) $\neg\exists x\ \exists y\ (Cube(x) \land Tet(y) \land FrontOf(x,y)$

$$\forall x\ \forall y\ (\neg Cube(x) \lor \neg Tet(y) \lor \neg FrontOf(x,y))$$

b) $\forall x\ (Cube(x) \to \exists y\ (Tet(y) \land LeftOf(x,y))$

$$\forall x\ \exists y\ ((\neg Cube(x) \lor Tet(y)) \land (\neg Cube(x) \lor LeftOf(x,y)))$$

4.4. **(1 valor)** Coloque na forma clausal, incluindo a Skolemização, a seguinte fórmula:

$\exists x\ (Cube(x) \land \forall y\ (Tet(y) \to Smaller(y,x)))$

1. $Cube(a)$
2. $\neg Tet(x2) \lor Smaller(x2,a)$

4.5. **(5 valores)** Mostre por resolução a validade do seguinte argumento de lógica de predicados de 1ª ordem.

P1	∀y (Cube(x) ↔ Large(x))
P2	∃x (Medium(x) ∧ ¬∃y Larger(y,x))
P3	∀x ∀y ((Medium(x) ∧ Large(y)) → Larger(y,x))
C	¬∃x Cube(x)

a) Coloque as premissas e a negação da conclusão na forma clausal

1. ¬Cube(x1) ∨ Large(x1)
2. Cube(x1) ∨ ¬Large(x1)
3. Medium(a)
4. ¬Larger(x4,a)
5. ¬Medium(x5) ∨ ¬Large(y5) ∨ Larger(y5,x5)
6. Cube(b)

b) Mostre que as cláusulas obtidas são inconsistentes, derivando por resolução a cláusula vazia.

7. Large(b)	Res 6, 1	{ x1/ b}
8. ¬Medium(x5) ∨ Larger(b,x5)	Res 7, 5	{ y5/ b}
9. Larger(b,a)	Res 8, 3	{ x5/ a}
10. □	Res 9, 4	{ x4/ b}

4.6. **(5 valores)** A sucessão 1, 7, 19, 37, 61, ... definida pelo termo geral $T(n) = 3n^2 - 3n + 1$ tem a propriedade de a soma dos seus primeiros termos ser um número cúbico: $S(n) = \sum_{i=1}^{n} T(i) = n^3$. Prove esta propriedade por indução sobre os números naturais.

Passo Base: $S(1) = 1 = 1^3$

Para $n = 1$ temos $S(1) = 1 = 1^3$

Passo de Indução: $S(n) = n^3 \Rightarrow S(n+1) = (n+1)^3$

$$\begin{aligned} S(n+1) &= (1 + 7 + 19 + \ldots + T(n)) + T(n+1) \\ &= S(n) + T(n+1) \\ &= n^3 + 3(n+1)^2 - 3(n+1) + 1 \\ &= n^3 + 3n^2 + 6n + 3 - 3n - 3 + 1 \\ &= n^3 + 3n^2 + 3n + 1 \\ &= (n+1)^3 \end{aligned}$$

q.e.d.