Lógica Computacional

Duração: 3h

Época de 2012 / 13 – Exame de Recurso (sem Consulta)

Grupos para Avaliar (Todos por Omissão)

G1	G2	G3	G4

Nome:	**nº:**

1.1. (5 valores) Considere as seguintes frases

- O Rui estuda na FCT, mas a Ana não.
- O director da FCT não é presidente do DI.
- Quando o Rui vai à FCT a Ana também vai.

a) Apresente uma assinatura Σ = <NP, $NF_0 \cup NF_1$> de uma linguagem de 1ª ordem que lhe permita escrever fórmulas de 1ª ordem corespondentes

NF_0: Constantes	*NF_1: Funções*	*NP: Predicados*

b) Traduza para fórmulas de 1ª ordem as frases acima indicadas:

i) O Rui estuda na FCT, mas a Ana não.

ii) O director da FCT não é presidente do DI.

iii) Quando o Rui vai à FCT a Ana também vai.

1.2. (2 valores) Classifique cada uma das fórmulas abaixo, indicando no quadro (com S e N, respectivamente) se são ou não

V-TT: Verdade Tautológica; V-FO: Verdade Lógica V-TW: Verdade Analítica (Tarski)
P-TT: Possibilidade Tautológica; P-FO: Possibilidade Lógica; P-TW: Verdade Analítica (Tarski)

	V-TT	V-FO	V-TW	P-TT	P-FO	P-TW
(a = b) ∧ Tet(a) ∧ Cube(b)						
LeftOf(a,b) ∨ LeftOf(b,a)						
(a = b) → (Tet(a) ∨ ¬Tet(b))						

1.3. (3 valores) Considerando os mundos e a linguagem de Tarski, indique se os seguintes argumentos são válidos tautologica (Val-TT), logica (Val-FO) e/ou analiticamente (nos mundos de Tarski Val-TW).

{Premissa 1, ..., Premissa n } |= Conclusão	**Val-TT**	**Val-FO**	**Val-TW**
{ SameRow(a,c), a = b } |= SameRow(b,c)			
{ Small(a), Large(b) } |= Smaller(a,b)			
{ Tet(a) → Tet(b), ¬ Tet(b)} |= ¬Tet(a)			

1.4. (5 valores) Considere as fórmulas P1: $(B \lor C) \to A$ e P2: $(A \land B) \to C$, bem como as fórmulas C1: $B \to (A \leftrightarrow C)$ e C2: $(A \leftrightarrow C) \to B$.

a) Preencha a seguinte tabela de verdade relativas às fórmulas P1, P2, C1 e C2.

A	B	C	(B ∨ C) → A	(A ∧ B) → C	B → (A ↔ C)	(A ↔ C) → B
V	V	V				
V	V	F				
V	F	V				
V	F	F				
F	V	V				
F	V	F				
F	F	V				
F	F	F				

b) Por análise da tabela, indique justificando se as fórmulas **C1** e **C2** são ou não consequências tautológicas das premissas P1 e P2.

Justificação:

1.5. (**5 valores)** Considere a fórmula $\neg((A \lor B) \to C) \lor \neg(A \lor B)$. Converta-a para as formas normais conjuntiva (CNF) e disjuntiva (DNF), simplificando-as da forma mais conveniente.

Grupo 2

(corresponde ao 2º teste)

2.1. (4 valores) Considerando os predicados da linguagem do Mundo de Tarski, traduza para essa linguagem as seguintes proposições

a) O cubo a só está à esquerda do tetraedro b se este for grande.

b) Os cubos a e b estão na mesma linha ou na mesma coluna

c) Se o dodecadedro a for pequeno então os blocos b e c não são ambos grandes.

d) Apenas um dos blocos a e b é pequeno.

2.2. **(4 valores)** Considere os mundos e a linguagem do Mundo de Tarski (com tabuleiro de 3 × 3 casas), desenhe um mundo (em 2D) em que sejam verdadeiras as seguintes proposições

1. `SameShape(b,c) ∧ ¬SameShape(a,c)`
2. `LeftOf(b,c) ∨ LeftOf(b,b)`
3. `BackOf(c,a) ∨ BackOf(a,a)`
4. `Between(a,b,c)`
5. `Cube(a) ∧ ¬Dodec(c)`

2.3. (3 valores) Considere o seguinte argumento usando a linguagem de Tarski, e a respectiva demonstração.

a) Verifique que a demonstração está *errada*, e indique o(s) passo(s) em que as regras do sistema de Dedução Natural não foram corretamente utilizadas

```
1. | Cube(c) → ¬ (Tet(a) ∧ Dodec(a))
2. | Dodec(a)
   |------------------------------------
3. | | Cube(c)
   | |-----------------
4. | | ¬(Tet(a) ∧ Dodec(a))     Elim →: 1, 3
5. | | ¬ Dodec(a)               Elim ∧ : 4
6. | | ⊥                        Intr ⊥ : 2, 5
7. | ¬ Cube(c)                  Intr ¬ : 3, 6
```

Erro(s):

b) Indique no tabuleiro ao lado um contra-exemplo que mostre que o argumento não é válido

2.4. (4 valores) Complete a demonstração abaixo no sistema de Dedução Natural, preenchendo as caixas assinaladas

```
 1. | A → (B ∨ C)
 2. | ¬(B ∧ C)
 3. | D → A
 4. | B ↔ C
    |-----------
 5. | | [        ]
    | |----------
 6. | | A                    Elim → : 3, 5
 7. | | B ∨ C                Elim → : 1, 6
 8. | | | B
    | | |--------
 9. | | | C                  Elim ↔ : 4, 8
10. | | | B ∧ C              Intr ∧ : 8, 9
11. | | | [        ]         [                ]
12. | | | C
    | | |--------
13. | | | B                  Elim ↔ : 4, 12
14. | | | B ∧ C              Intr ∧ : 12, 13
15. | | | ⊥                  Intr ⊥ : 2, 14
16. | | [        ]           [                ]
17. | ¬ D                    [                ]
```

2.5. (5 valores) Valide o argumento abaixo apresentando a respectiva demonstração no sistema de Dedução Natural

```
1. | (B ∨ C) → A
   |
2. | (A ∧ B) → C
   |--------------
   |
   |
   |
   | B → (A ↔ C)
```

Grupo 3

(corresponde ao 3º teste)

3.1. (5 valores) Considerando os predicados da linguagem do Mundo de Tarski, traduza para essa linguagem as seguintes proposições

a) Há cubos de diferentes tamanhos.

b) Todos os tetraedros à esquerda do bloco a estão ao lado de algum bloco.

c) Não há cubos entre dois dodecaedros.

d) Apenas cubos são maiores que o tetraedro a.

e) Se dois blocos estão ao lado um do outro um deles é um cubo.

f) O maior bloco é um tetraedro.

3.2. (4 valores) Considere os mundos e a linguagem do Mundo de Tarski (com tabuleiro de 3 × 3 casas), desenhe um mundo (em 2D) em que sejam verdadeiras as seguintes proposições

1. **∀x (Cube(x) → ∃y ∃z Between(x,y,z))**
2. **¬∃x (Large(x) ∨ Small(x))**
3. **∀x (Dodec(x) → Large(x))**
4. **∃x ∃y BackOf(x,y)**
5. **Tet(a) ∧ RightOf(a,b) ∧ ¬ SameShape(a,b)**
6. **FrontOf(c,a)**

3.3. (2 valores) O seguinte argumento é válido analiticamente nos Mundos de Tarski.

1	**∀x (Cube(x) → Medium(x))**
2	**∀x (Dodec(x) → Large(x))**
3	**¬ ∃x (Small(x) ∧ ¬ Tet(x))**

Assinale em baixo, quais os axiomas de Tarski que seria necessário colocar explicitamente como premissas para que o argumento fosse válido logicamente (válido-FO).

- ☐ **∀x (Large(x) ∨ Medium(x) ∨ Small(x))**
- ☐ **¬ ∃x (Large(x) ∧ Medium(x))**
- ☐ **¬ ∃x (Large(x) ∧ Small(x))**
- ☐ **¬ ∃x (Medium(x) ∧ Small(x))**
- ☐ **∀x (Tet(x) ∨ Cube(x) ∨ Dodec(x))**
- ☐ **¬ ∃x (Tet(x) ∧ Cube(x))**
- ☐ **¬ ∃x (Tet(x) ∧ Dodec(x))**
- ☐ **¬ ∃x (Cube(x) ∧ Dodec(x))**

3.4. (4 valores) Complete a demonstração abaixo no sistema de Dedução Natural, preenchendo as caixas assinaladas.

```
1  │ ∀y (Cube(x) ↔ Large(x))
2  │ ∃x (Medium(x) ∧ ¬∃y Larger(y,x))
3  │ ∀x ∀y ((Medium(x) ∧ Large(y)) → Larger(y,x))
   ├──────────────────────────────────────────────
4  │ │ ∃x Cube(x)
   │ ├──────────
5  │ │ │ [          ]
   │ │ ├──────────
6  │ │ │ Cube(a) ↔ Large(a)                                Elim ∀ : 1
7  │ │ │ Large(a)                                          Elim ↔ : 5, 6
8  │ │ │ │ b: Medium(b) ∧ ¬∃y Larger(y,b)
   │ │ │ ├──────────────────────────────
9  │ │ │ │ Medium(b)                                       Elim ∧ : 8
10 │ │ │ │ ∀y ((Medium(b) ∧ Large(y)) → Larger(y,b))       Elim ∀ : 3
11 │ │ │ │ (Medium(b) ∧ Large(a)) → Larger(a,b))           [          ]
12 │ │ │ │ [          ]                                    Intr ∧ : 7, 9
13 │ │ │ │ Larger(a,b)                                     Elim → : 11, 12
14 │ │ │ │ ∃y Larger(y,b)                                  [          ]
15 │ │ │ │ [          ]                                    Elim ∧ : 8
16 │ │ │ │ ⊥                                               Intr ⊥ : 14, 15
17 │ │ │ ⊥                                                 [          ]
18 │ │ [          ]                                        Elim ∃ : 4, 5 - 17
19 │ ¬∃x Cube(x)                                           [          ]
```

3.5. (5 valores) Valide o argumento abaixo apresentando a respectiva demonstração no sistema de Dedução Natural.

```
1 │ ∀x ((Cube(x) ∧ ∃y Adjoins(x,y)) → Large(x))
2 │ ¬ ∃x Large(x)
  ├──────────────────────────────
  │
  │
  │
  │ ∀x (Cube(x) → ¬ ∃y Adjoins(x,y))
```

Grupo 4

(corresponde ao 4º teste)

4.1. (2 valores) Prove que o conjunto S de cláusulas Horn abaixo indicado não é satisfazível.

1. $E \rightarrow F$	5. $B \rightarrow E$
2. $(A \wedge E) \rightarrow D$	6. $T \rightarrow A$
3. $T \rightarrow B$	7. $(C \wedge F) \rightarrow E$
4 $B \wedge C \rightarrow \bot$	8. $A \wedge F \rightarrow \bot$

4.2. (5 valores) Mostre por resolução a validade do seguinte argumento em lógica proposicional.

P1	$A \rightarrow (B \vee C)$
P2	$\neg(B \wedge C)$
P3	$D \rightarrow A$
P4	$B \leftrightarrow C$
X	$\neg D$

a) Coloque as premissas e a negação da conclusão na forma clausal.

b) Mostre que as cláusulas obtidas em a) são inconsistentes, derivando por resolução a cláusula vazia.

4.3. (2 valores) Converta as fórmulas abaixo para a forma Prenex, com a matriz na forma normal CNF**.**

a) $\neg\exists x\ \exists y\ (Cube(x) \wedge Tet(y) \wedge FrontOf(x,y)$

b) $\forall x\ (Cube(x) \rightarrow \exists y\ (Tet(y) \wedge LeftOf(x,y))$

4.4. (1 valor) Coloque na forma clausal, incluindo a Skolemização, a seguinte fórmula**:**

$\exists x\ (Cube(x) \wedge \forall y\ (Tet(y) \rightarrow Smaller(y,x)))$

4.5. (5 valores) Mostre por resolução a validade do seguinte argumento de lógica de predicados de 1ª ordem**.**

P1	`∀y (Cube(x) ↔ Large(x))`
P2	`∃x (Medium(x) ∧ ¬∃y Larger(y,x))`
P3	`∀x ∀y ((Medium(x) ∧ Large(y)) → Larger(y,x))`
C	`¬∃x Cube(x)`

a) Coloque as premissas e a negação da conclusão na forma clausal

b) Mostre que as cláusulas obtidas são inconsistentes, derivando por resolução a cláusula vazia.

4.6. **(5 valores)** A sucessão 1, 7, 19, 37, 61, ... definida pelo termo geral $T(n) = 3n^2 - 3n + 1$ tem a propriedade de a soma dos seus primeiros termos ser um número cúbico: $S(n) = \sum_{i=1}^{n} T(i) = n^3$. Prove esta propriedade por indução sobre os números naturais.

Passo Base:

Passo de Indução: