

e) $n+1$ pombos,
 n poleiros

$p_{ij} \rightarrow$ pombo i está no poleiro j .

- i) cada pombo está num poleiro.
- ii) cada poleiro só tem um pombo.

$i \quad (p_{i1} \vee p_{i2} \vee \dots \vee p_{in})$

$\quad \quad \quad \uparrow$
 $(p_{21}, \vee p_{22} \vee \dots \vee p_{2n})$

$\quad \quad \quad \uparrow$
 $\quad \quad \quad \dots$

Aula Prática 12

Ficha 15 (Matéria 3ª reser)

① $\{A, B, C \quad \subseteq SF_2 \quad (SF \rightarrow \text{função})$

$\{ \text{Filho, Antepassado} \subseteq SP_2 \quad (SP \rightarrow \text{true or false})$

$\rightarrow$ irmão, primos

① $\text{Filho}(A, C) \wedge \text{Filho}(B, C)$

② $\exists_x (\text{Filho}(x, C) \wedge \text{Adulto}(x))$
 $\quad \quad \quad \underbrace{\hspace{10em}}_{\text{variável}}$

③ $\{ \text{Adulto, Animal, Pessoa} \}$

$\forall_x (\text{Animal}(x) \rightarrow \neg \text{Pessoa}(x))$

$\subseteq SP_1$

④ $\forall_x (\neg \text{Antepassado}(x, x)) \wedge (\text{Antepassado}(A, B) \rightarrow \neg \text{Antepassado}(B, A))$

⑤ $\{ \text{Idade} \}$

$\forall_x (\text{Idade}(x) > 18) \rightarrow (\text{Adulto}(x))$

$\subseteq SF_1$

$$⑥ \quad \forall x \forall y \exists z ((\text{Mãe}(z, x) \wedge (x \neq y) \wedge (x \neq z) \wedge (y \neq z)) \wedge \text{Mãe}(z, y) \rightarrow \text{Irmão}(x, y))$$

Solução Alternativa:

$$\forall x \forall y ((\text{Mãe}(x) = \text{Mãe}(y) \wedge (x \neq y)) \rightarrow \text{Irmão}(x, y))$$

$$③ \quad \forall x \forall y ((\text{Mãe}(\text{Mãe}(x)) = \text{Mãe}(\text{Mãe}(y)) \wedge (x \neq y) \rightarrow \text{Primo}(x, y))$$

$$⑧ \quad \forall x ((\text{Pessoa}(x) \rightarrow \text{Mamífero}(x)) \wedge (\text{Mamífero}(x) \rightarrow \text{Animal}(x)))$$

$$⑨ \quad \exists x \forall z (\text{Filho}(x, z) \rightarrow \text{Oculhos}(z))$$

$$⑩ \quad \forall x (\text{vegetariano}(x) \rightarrow (\forall y (\text{Animal}(y) \rightarrow \neg \text{comer}(x, y))))$$

$$⑪ \quad \forall x (\text{Quadrado}(x) \rightarrow \text{Par}(x))$$

$$⑫ \quad \forall x (\text{Primo}(x) \rightarrow (x = 2 \vee \text{Impar}(x)))$$

$$⑬ \quad \exists x (\text{Natural}(x) \wedge \text{Par}(x))$$

$$⑭ \quad \neg \exists x (\text{Par}(x) \wedge \text{Primo}(x))$$

$$⑮ \quad \forall x \neg (\text{Primo}(x) \rightarrow \text{Impar}(x))$$

$$⑯ \quad \forall x \text{Par}(x+x)$$

$$⑰ \quad \forall x (\text{Par}(x) \rightarrow (\exists y (\text{Impar}(y) \wedge x = y+y)))$$

$$⑱ \quad \forall x \forall y \forall z$$

$$(((U(x, y) \wedge U(y, z)) \rightarrow U(x, z)) \wedge \neg U(x, x) \rightarrow (U(x, y) \rightarrow \neg U(y, x)))$$

$$① \quad \exists x, \exists y (\text{Teste}(x, A) \wedge \text{Teste}(y, A) \wedge x \neq y)$$

$$② \quad \neg \exists x, \exists y, \exists z (\text{Teste}(x, A) \wedge \text{Teste}(y, A) \wedge \text{Teste}(z, A) \wedge (x \neq y) \wedge (y \neq z) \wedge (x \neq z))$$

$$③ \quad \exists x, \exists y ((\text{Teste}(x, A) \wedge \text{Teste}(y, A) \wedge (x \neq y)) \wedge \forall z (\text{Teste}(z, A) \wedge ((z = y) \vee (z = x))))$$

$$④ \quad \forall A (\text{Assaltado}(A, A) \wedge \forall x (\text{conhecer}(x, A, \text{hoje}))$$

$$\forall A (\text{Assaltado}(A, A) \wedge \forall x (\text{conhecer}(x, A, \text{hoje}))$$

Ficha 16

①

a) $Q(x) \wedge (\widetilde{\exists y} (Q(y) \Rightarrow M(z, s(x))))$

Quantificador
→ M   predicado

↑
↑

y   m da.
variáveis livres

→ variável livre

$$\begin{aligned}
 VL(Q(x) \wedge y) &= VL(Q(x)) \cup VL(y) \\
 &= \{x\} \cup (VL(Q(y) \Rightarrow M(z, s(x))), \{y\}) \\
 &= \{x\} \cup (VL(Q(y)) \cup VL(M(z, s(x)))) \cup \{y\} \\
 &= \{x\} \cup (\{y\} \cup (V(z) \cup V(s(x)))) \cup \{y\} \\
 &= \{x\} \cup (\{y\} \cup \{z\} \cup \{x\}) \cup \{y\} \\
 &= \{x\} \cup \{x, y, z\} \cup \{y\} \\
 &= \{x, y, z\}
 \end{aligned}$$

→ variável m da

$$\begin{aligned}
 VM(Q(x) \wedge y) &= VM(Q(x)) \cup VM(y) = \\
 &= \emptyset \cup \{y\} \cup VM(Q(y) \Rightarrow M(z, s(x))) \\
 &= \{y\} \cup VM(Q(y)) \cup VM(M(z, s(x))) = \{y\} \cup \emptyset \cup \emptyset = \{y\}
 \end{aligned}$$

b) $Q(x) \wedge (\forall x (Q(y) \Rightarrow M(z, s(x))))$

$$\begin{aligned}
 VL(Q(x) \wedge y) &= VL(Q(x)) \cup VL(y) \\
 &= \{x\} \cup VL(Q(y) \Rightarrow M(z, s(x))) \cup \{x\} \\
 &= \{x\} \cup (VL(Q(y)) \cup VL(M(z, s(x)))) \cup \{x\} \\
 &= \{x\} \cup (V(y) \cup (V(z) \cup V(s(x)))) \cup \{x\} \\
 &= \{x\} \cup (\{y\} \cup \{z\} \cup \{x\}) \cup \{x\} \\
 &= \{x\} \cup \{y, z, x\} \cup \{x\} \\
 &= \{x, y, z\}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 VM(Q(x) \wedge y) &= VM(Q(x)) \cup VM(y) = \\
 &= \emptyset \cup \{x\} \cup VM(Q(y) \rightarrow M(z, scx))) = \\
 &= \{x\} \cup VM(Q(y)) \cup VM(M(z, scx))) = \{x\} \cup \emptyset \cup \emptyset \\
 &= \{x\}
 \end{aligned}$$

e) $\forall y (Q(x, y) \rightarrow \exists z M(z, scx))$

$$\begin{aligned}
 VL(\forall y (Q(x, y) \rightarrow \exists z M(z, scx))) &= \\
 &= VL(Q(x, y) \rightarrow \exists z M(z, scx)) \setminus \{y\} \\
 &= (VL(Q(x, y)) \cup VL(\exists z M(z, scx))) \setminus \{y\} \\
 &= (V(x) \cup V(y) \cup (VL(M(z, scx))) \setminus \{z\}) \setminus \{y\} \\
 &= (\{x\} \cup \{y\} \cup (V(z) \cup V(scx))) \setminus \{z\} \setminus \{y\} \\
 &= (\{x, y\} \cup (\{z\} \cup \{x\} \setminus \{z\})) \setminus \{y\} \\
 &= (\{x, y\} \cup (\{x, z\} \setminus \{z\})) \setminus \{y\} \\
 &= (\{x, y\} \cup \{x\}) \setminus \{y\} = \{x\}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 VM(\forall y (Q(x, y) \rightarrow \exists z M(z, scx))) &= \\
 &= \{y\} \cup VM(Q(x, y) \rightarrow \exists z M(z, scx)) \\
 &= \{y\} \cup VM(Q(x, y)) \cup VM(\exists z M(z, scx)) \\
 &= \{y\} \cup \{z\} \cup \emptyset = \{y, z\}
 \end{aligned}$$

②

a) $\varphi = Q(x) \wedge (\forall y (Q(y) \rightarrow M(z, scx)))$

i) $t = q(x)$, sendo a variável x

Como $V(t) \cap VM(\varphi) = \emptyset$ então t é livre em x na fórmula φ .



ii) $z = q(x)$, sendo a variável y .

como $y \notin VL(\varphi)$ então, por definição, temos $\varphi \{t/y\} = \varphi$.

iii) $t = q(y)$, sendo a variável x .

como $y \in V(t) \cap VM(\varphi)$ então o termo t não é livre para x em φ . Logo, não se aplica a substituição.

v) $t = q(z)$, sendo a variável x .

como $V(t) \cap VM(\varphi) = \emptyset$ portanto t é livre para x na fórmula φ . Então $\varphi \{t/x\} = Q(qz) \wedge (\forall y (Q(y) \rightarrow M(z, s(qz))))$.

"

2) $\varphi = \forall x (Q(x) \rightarrow \forall z M(z, s(y)))$.

i) $t = q(z)$, sendo a variável y .

como $z \in V(t) \cap VM(\varphi)$ então t não é livre para y em φ logo não se aplica a substituição.

ii) $t = q(z)$, sendo a variável z .

como $z \notin VL(\varphi)$ então $\varphi \{t/z\} = \varphi$.

3)

$\rightarrow$ não tem variáveis livres

a) se φ é uma fórmula fechada, então para qualquer termo t a variável x tem-se que $\varphi \{t/x\} = \varphi$.

Provemos por indução, na estrutura da fórmula φ .

- caso $\varphi \in \mathcal{SP}_0 \cup \{1\}$ então como $VL(\varphi) = \emptyset$ então é trivialmente satisfeito $\varphi \{t/x\} = \varphi$.

- Caso $\varphi = P(t_1, \dots, t_n)$, mas como $VL(\varphi) = \emptyset$
 $P \in SP_n$ e $t_1, \dots, t_n \in T_{\Sigma}^*$ então, por definição de
 VL , sabemos que $VL(\varphi) = \bigcup_{i=1}^n VL(t_i)$

Logo trivialmente $\varphi \uparrow^t_x \varphi$.

- Caso $\varphi = \varphi_1 * \varphi_2$ tal que $*$ $\in \{ \wedge, \vee, \rightarrow \}$ então como
 $VL(\varphi) = \emptyset$, por hipótese de indução, sabemos que
 $VL(\varphi_1) = \emptyset$ e $VL(\varphi_2) = \emptyset$

Logo, $VL(\varphi_1 * \varphi_2) = \emptyset$, ou seja,

$$\varphi_1 \uparrow^t_x \varphi = \varphi \text{ e } \varphi_2 \uparrow^t_x \varphi = \varphi \quad \text{portanto}$$

$$\varphi_1 * \varphi_2 \uparrow^t_x \varphi = \varphi_1 \uparrow^t_x \varphi * \varphi_2 \uparrow^t_x \varphi = \varphi_1 * \varphi_2 \text{ cqd}$$

- Caso $\varphi = \forall y \varphi_1$ ou $\exists y \varphi_1$ tal que $x \neq y$

Então como $VL(\varphi) = \emptyset$, sabemos por hipótese de indução que $\varphi_1 \uparrow^t_x \varphi$

$$\text{Logo } (\forall y \varphi_1) \uparrow^t_x \varphi = \forall y \varphi_1$$

Último caso: Trivialmente Satisfeito

- $\varphi = \forall x \varphi_1$ ou $\exists x \varphi_1$ então por definição sabemos que
 $\forall x \varphi_1 \uparrow^t_x \varphi = \forall x \varphi_1$

Aula Prática

Ficha 17

II $\rightarrow$ interpretação do termo.

$$\textcircled{1} \text{ Nat} = (\mathbb{N}_{\neq}, I)$$

$$P: X \rightarrow \mathbb{N}_{\neq} \text{ tal que } P(n) = 3 \text{ e } P(m) = 2$$

$$\text{a) } \llbracket \text{zero} \rrbracket_{\text{Nat}}^P = I(\text{zero}) = \emptyset \text{ pois zero} \in SF_{\emptyset}$$

$$b) \llbracket n \rrbracket_{\text{Nat}}^p = p(n) = 3 \text{ pois } n \in X$$

$$c) \llbracket \text{succ}(n) \rrbracket_{\text{Nat}}^p = I(\text{succ})(\llbracket n \rrbracket_{\text{Nat}}^p = p(n) + 1$$

$$d) \llbracket \oplus(\text{succ}(\text{zero}), m) \rrbracket_{\text{Nat}}^p = 3+1 = 4 = I(\oplus)(\llbracket \text{succ}(\text{zero}) \rrbracket_{\text{Nat}}^p, \llbracket m \rrbracket_{\text{Nat}}^p) =$$

$$= I(\text{succ})(\llbracket \text{zero} \rrbracket_{\text{Nat}}^p, \llbracket m \rrbracket_{\text{Nat}}^p) =$$

$$= I(\text{succ})(\llbracket \text{zero} \rrbracket_{\text{Nat}}^p) + p(m) =$$

$$= (I(\text{zero}) + 1) + 2 = 0 + 1 + 2 = 3$$

②

$$a) \text{Nat}, p \Vdash \text{leq}(\text{zero}, n)$$

$$\llbracket \text{leq}(\text{zero}, n) \rrbracket_{\text{Nat}}^p = I(\text{leq})(\llbracket \text{zero} \rrbracket_{\text{Nat}}^p, \llbracket n \rrbracket_{\text{Nat}}^p) =$$

$$= I(\text{zero}) \leq p(n) =$$

$$= 0 \leq 3 = 1$$

Logo a afirmação é verdadeira.

$$c) \text{Nat}, p \Vdash \text{Eq}(n, m) \wedge \text{leq}(n, \text{succ}(n))$$

Por defeito, então:

$$\text{Nat}, p \Vdash \text{Eq}(n, m) \text{ e } \text{Nat}, p \Vdash \text{leq}(n, \text{succ}(n))$$

$$\llbracket \text{Eq}(n, m) \rrbracket_{\text{Nat}}^p = I(\text{Eq})(\llbracket n \rrbracket_{\text{Nat}}^p, \llbracket m \rrbracket_{\text{Nat}}^p) =$$

$$= p(n) = p(m) =$$

$$= 3 = 2$$

$$= 0$$

Logo, $\text{Nat}, p \not\Vdash \text{Eq}(n, m)$ e, por isso, $\text{Nat}, p \not\Vdash \text{Eq}(n, m) \wedge \text{leq}(n, \text{succ}(n))$.

$$e) \text{Nat}, p \Vdash \exists n \text{impar} (\text{suc}(n))$$

Por definição, para algum $\mu \in \mathbb{N}_0$ queremos mostrar:

$$\text{Nat}, p \Vdash [n := \mu] \Vdash \text{impar}(\text{suc}(n))$$

$$[\text{impar}(\text{suc}(n))]_{\text{Nat}}^{p[n:=\mu]} = \text{I}(\text{impar})([\text{suc}(n)]_{\text{Nat}}^{p[n:=\mu]})$$

$$= \text{I}(\text{impar})(\text{I}(\text{suc}(n))([\![n]\!]_{\text{Nat}}^{p[n:=\mu]}))$$

$$= \text{I}(\text{impar})(p[n:=\mu](n) + 1) = \text{I}(\text{impar})(\mu + 1)$$

$$= \text{I}(\text{impar})(\mu + 1)$$

$$= (\mu + 1) - (2 \times k + 1)$$

$$\text{então } \exists \mu = k = 0$$

$$1 = 1 \text{ verdade}$$

$$f) \text{Nat}, p \Vdash \exists n \text{Eq}(\text{suc}(n), \text{zero})$$

Por definição:

Para algum $x \in \mathbb{N}_0$ temos:

$$\text{Nat}, p \Vdash [n := x] \Vdash \text{Eq}(\text{suc}(n), \text{zero})$$

$$p' = p[n := x]$$

$$[\text{Eq}(\text{suc}(n), \text{zero})]_{\text{Nat}}^{p'}$$

$$= \text{I}(\text{Eq})([\![\text{suc}(n)]\!]_{\text{Nat}}^{p'}, [\![\text{zero}]\!]_{\text{Nat}}^{p'})$$

$$= \text{I}(\text{suc})([\![n]\!]_{\text{Nat}}^{p'}) = \text{I}(\text{zero})$$

$$= p'(n) + 1 = 0$$

$$= x + 1 = 0$$

Como $x \in \mathbb{N}_0$ então qualquer atribuição de valores a x resulta em $\text{Nat}, p' \nVdash \text{Eq}(\text{suc}(n), \text{zero})$.

Logo, $\text{Nat}, p \nVdash \exists n \text{Eq}(\text{suc}(n), \text{zero})$

Aula Prática

Ficha 18

$$\{P(y)\} \models \forall x P(x)$$

- ① Considere-se a estrutura de interpretação $\mu = (N_0, I)$ tal que $I(P)(n) = 1$ se n for ímpar e $I(P): N_0 \rightarrow \{0, 1\}$
 $I(P)(n) = 0$ se n for não ímpar.

Então, seja p a atribuição de $x \mapsto N_0$ e $P(y) = 1$.

$$\text{Então tem-se } \mu, p \models P(y) \text{ pois } I(P)(\llbracket y \rrbracket_{\mu}^p) = I(P)(P(y)) = \\ = I(P)(1) = 1$$

Por,

$$\mu, p \not\models \forall x P(x) \text{ pois } \mu, p \llbracket x := 0 \rrbracket \not\models P(x) = \\ = I(P)(\llbracket x \rrbracket_{\mu}^{p[x:=0]}) = I(P)(P[x:=0](x)) \\ = I(P)(0) \\ = 0$$

- ④ $\{ \forall x P(x) \rightarrow \forall x Q(x) \} \models \forall x (P(x) \rightarrow Q(x))$

Considere-se a estrutura de interpretação $\mu = (N_0, I)$ tal que :

$I(P)(n) = 1$ se n for par e $I(Q)(n) = 1$ se n for primo.

sendo $I(P): N_0 \rightarrow \{0, 1\}$. Então, seja $p: x \mapsto N_0$.

Então para qualquer $v \in N_0$ tem-se $\mu, p \llbracket x := v \rrbracket \models P(x) \rightarrow Q(x)$ então sempre que $\mu, p \llbracket x := v \rrbracket \models P(x)$ então $\mu, p \llbracket x := v \rrbracket \models Q(x)$ mas $v = 3$ temos $\mu, p \llbracket x := 3 \rrbracket \not\models I(P)(\llbracket x \rrbracket_{\mu}^{p[x:=3]}) = 0$.

Logo $\mu, p \models \forall x P(x) \rightarrow \forall x Q(x)$. Então temos $\mu, p \not\models \forall x (P(x) \rightarrow Q(x))$, pois para qualquer $w \in N_0$ tem-se $\mu, p \llbracket x := w \rrbracket \models (P(x) \rightarrow Q(x))$, pois seja $w = 4$ tem-se que $\mu, p \llbracket x := 4 \rrbracket \not\models P(x) \rightarrow Q(x)$ pois $\mu \llbracket x := 4 \rrbracket \not\models P(x) = I(P)(\llbracket x \rrbracket_{\mu}^{p[x:=4]}) = 1$

$$\text{Por } \mu, p \llbracket x := 4 \rrbracket \not\models Q(x) = I(Q)(\llbracket x \rrbracket_{\mu}^{p[x:=4]}) = 0$$

Logo, $\{ \forall x P(x) \rightarrow \forall x Q(x) \} \not\models \forall x (P(x) \rightarrow Q(x))$

- ⑥ $\{ \exists x P(x) \wedge \exists x Q(x) \} \models \exists x (P(x) \wedge Q(x))$

Seja $\mu = (U, I)$ tal que $I(P): U \rightarrow \{0, 1\}$ e $I(Q): U \rightarrow \{0, 1\}$. Então existe um $v \in U$ tal que $\mu, p \llbracket x := v \rrbracket \models P(x) \wedge Q(x)$, ou seja, por definição

$$a) \mu, p \llbracket x := v \rrbracket \models P(x) \text{ e}$$

$$b) \mu, p \llbracket x := v \rrbracket \models Q(x)$$

ou seja, por (a) $\mu, p \models \exists x P(x)$ e por (b) $\mu, p \models \exists x Q(x)$

ou seja, $\mu, p \models \exists x P(x) \wedge \exists x Q(x)$ logo,

Aula Prática

Ficha 19

$$\textcircled{3} \{ \forall x \varphi \wedge \forall x \psi \} \models \forall x (\varphi \wedge \psi) \quad \mu = (U, I)$$

Então, por hipótese:

$\mu, \rho \models \forall x \varphi \wedge \forall x \psi$, então, por definição,

$\mu, \rho \models \forall x \varphi$ e $\mu, \rho \models \forall x \psi$. Então, para todo $v \in U$

$\mu, \rho[x := v] \models \varphi$ e $\mu, \rho[x := v] \models \psi$. Logo, por definição de conjunção,

$\mu, \rho[x := v] \models \varphi \wedge \psi$; como v é qualquer valor do universo U ,
 $\mu, \rho \models \forall x (\varphi \wedge \psi)$.

$$\textcircled{4} \{ \exists x \varphi \vee \exists x \psi \} \models \exists x (\varphi \vee \psi)$$

Então, por hipótese:

$\mu, \rho \models \exists x \varphi \vee \exists x \psi$; por definição:

$\mu, \rho \models \exists x \varphi$ ou $\mu, \rho \models \exists x \psi$. Então, para algum $v \in U$ e $w \in U$

$\mu, \rho[x := v] \models \varphi$ ou $\mu, \rho[x := w] \models \psi$. Por definição da disjunção: ^{temos:}

$\mu, \rho[x := v] \models \varphi \vee \psi$, ou $\mu, \rho[x := w] \models \varphi \vee \psi$.

Como v e w são valores concretos U .

$\mu, \rho \models \exists x (\varphi \vee \psi)$

$$\textcircled{5} \{ \forall x \neg \varphi \} \models \neg \exists x \varphi$$

Por hipótese:

$\mu, \rho \models \forall x \neg \varphi$, então para todo $v \in U$

$\mu, \rho[x := v] \models \neg \varphi$ logo

$\mu, \rho[x := v] \not\models \varphi$ (i)

Então assumimos por absurdo:

$\mu, \rho \models \exists x \varphi$ então existe $w \in U$

$\mu, \rho[x := w] \models \varphi$, mas contradiz com (i). Logo $\mu, \rho \not\models \exists x \varphi$, ou

seja, $\mu, \rho \models \neg \exists x \varphi$.

$$\textcircled{6} \forall x \varphi \equiv \neg \exists x \neg \varphi$$

$$\neg \exists x \neg \varphi \equiv \forall x \neg \neg \varphi \text{ (pois } \neg \exists x \varphi \equiv \forall x \neg \varphi)$$

$$\equiv \forall x \varphi \text{ (pois } \neg \neg \varphi \equiv \varphi)$$

$$\textcircled{9} \exists x (\varphi \rightarrow \psi) \equiv \varphi \rightarrow \exists x \psi, \text{ se } x \notin VL(\varphi)$$

$$\exists x (\varphi \rightarrow \psi) \equiv \exists x (\neg \varphi \vee \psi) \text{ (pois } \varphi \rightarrow \psi \equiv \neg \varphi \vee \psi)$$

$$\equiv \exists x (\varphi \vee \neg \varphi) \text{ (pois } \varphi \vee \neg \varphi \equiv \text{verdade})$$

$$\equiv \exists x \varphi \vee \neg \varphi \text{ (pois como } x \notin VL(\varphi) \text{ então } \exists x (\varphi \vee \neg \varphi) \equiv \exists x \varphi \vee \neg \varphi)$$

$$\equiv \neg \varphi \vee \exists x \varphi \text{ (pois } \textcircled{1})$$

$$\equiv \varphi \rightarrow \exists x \varphi \text{ (pois } \varphi \rightarrow \psi \equiv \neg \varphi \vee \psi)$$

$$\textcircled{10} \exists x (\varphi \rightarrow \psi) \equiv \forall x \varphi \rightarrow \psi, \text{ se } x \notin VL(\psi)$$

$$\exists x (\varphi \rightarrow \psi) \equiv \exists x (\neg \varphi \vee \psi) \text{ (pois } \varphi \rightarrow \psi \equiv \neg \varphi \vee \psi)$$

$$\equiv \exists x (\neg \varphi) \vee \psi \text{ (pois } x \notin VL(\psi) \text{ e } \exists x (\varphi \vee \psi) \equiv (\exists x \varphi) \vee \psi)$$

$$\equiv \neg \forall x \varphi \vee \psi \text{ (pois } \exists x \neg \varphi \equiv \neg \forall x \varphi)$$

$$\equiv \forall x \varphi \rightarrow \psi \text{ (pois } \neg \neg \varphi \equiv \varphi)$$

