Lógica Computacional

Aula Teórica 11: Forma de Horn

António Ravara

Departamento de Informática

28 de Março de 2011

Como determinar a natureza de uma fórmula na FNC?

Custo computacional

- Se FNC(φ) então verificar $\models \varphi$ é simples: demora no máximo um tempo proporcional ao número de símbolos proposicionais da fórmula.
- Transformar fórmulas arbitrárias para a FNC pode ser um processo moroso.
- E como determinar se dada fórmula é possível ou contraditória? Vamos ver um algoritmo que só funciona para uma dada classe de fórmulas.

Fórmulas de Horn básicas

Terminologia

- Uma fórmula atómica (p, com $p \in P$, ou $\perp$) diz-se um literal positivo.
- A negação de um literal positivo ($\neg p$, com $p \in P$, ou $\top$) diz-se um literal negativo.

Definição

Uma fórmula de Horn básica é uma disjunção de literais (com no máximo um a ocorrer positivamente).

Exemplos

- $\perp$, p, $p \vee \neg q$, $\neg p \vee \neg q$ são fórmulas de Horn básicas;
- $p \vee q$ ou $\perp \vee p$ não são fórmulas de Horn básicas.

Fórmulas de Horn básicas

Há 3 casos de fórmulas de Horn básicas

- Sem literais positivos.
- Sem literais negativos (sendo então apenas uma fórmula atómica).
- Com literais negativos e um positivo.

Lema

Seja L um literal positivo.

1. $L \equiv \top \to L$
2. $\bigvee_{i=1}^{n} \neg L_i \equiv (\bigwedge_{i=1}^{n} L_i) \to \bot$
3. $\bigvee_{i=1}^{n} \neg L_i \vee L \equiv (\bigwedge_{i=1}^{n} L_i) \to L$

Provas

Por via axiomática (exercícios simples).

Fórmulas de Horn

Definição

Uma fórmula $\varphi \in F_P$ tal que $\mathrm{FNC}(\varphi)$ é uma fórmula de Horn, se cada disjunção tem no máximo um literal positivo.

Note-se que a conjunção de:

- fórmulas de Horn básicas é uma fórmula de Horn;
- fórmulas de Horn é uma fórmula de Horn, mas a sua disjunção não.

Linguagem de Horn

Definição do conjunto E_P das fórmulas proposicionais

O conjunto E_P é definido pelas regras que definem o conjunto F_P e pela regra de fecho para a negação (considerando tal operador parte do alfabeto proposicional).

Relembra-se que $\top \overset{\text{abv}}{=} \neg\bot$ (sendo então um literal negativo).

Forma de Horn

Se $\varphi \in E_P$ então, para $n \geq 1$, tem-se $\varphi = \bigwedge_{i=1}^{n}(C_i \to L_i)$, sendo para todo o $i \in \{1, \ldots, n\}$, $C_i = \top$ ou $C_i = \bigwedge_{j=1}^{k_i} L_{i,j}$, com $k_i \geq 1$ e onde cada $L_{i,j}$ é um literal positivo.

Considera-se $\{C_i\} = \{L_{i,j} \mid \forall\, j \in \{1, \ldots, k_i\}\}$.

Algoritmo de Horn

Definição: seja $\mathcal{H}(\varphi) : E_P \to \{0,1\}$ a seguinte função recursiva

Seja $\varphi = \bigwedge_{j=1}^{n}(C_j \to A_j)$, com $n \geq 1$.

$$\mathcal{H}(\varphi) = \begin{cases} 1, & \text{se } \bot \notin \mathcal{A}(\varphi, \{\top\}) \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

sendo $\mathcal{A} : E_P \times (\{\bot, \top\} \cup P) \to (\{\bot, \top\} \cup P)$ a seguinte função:

$$\mathcal{A}(\varphi, \mathcal{C}) = \begin{cases} \mathcal{A}(\varphi \setminus (C_i \to A_i), \mathcal{C} \cup \{A_i\}), & \text{se } \exists_{i \in \{1,\ldots,n\}}.\{C_i\} \subseteq \mathcal{C} \\ \mathcal{C}, & \text{caso contrário ou se } \varphi \equiv \top \end{cases}$$

onde

- $\varphi \setminus (C_i \to A_i) \stackrel{\text{def}}{=} (\bigwedge_{j=1}^{i-1}(C_j \to A_j)) \wedge (\bigwedge_{j=i+1}^{n}(C_j \to A_j))$, se $i > 1$;
- $\varphi \setminus \varphi \stackrel{\text{def}}{=} \top$

Correcção do algoritmo $\mathcal{H}$

Objectivo do algoritmo

A função $\mathcal{H} : E_P \to \{0, 1\}$ determina se dada fórmula de Horn é contraditória ou possível.

Teorema: correcção e completude de $\mathcal{H}$

Dado $\varphi \in E_P$, tem-se que:

- $\mathcal{H}(\varphi) = 1$ se e só se φ é possível;
- $\mathcal{H}(\varphi) = 0$ se e só se φ é contraditória.

Resultados sobre o algoritmo $\mathcal{A}$

Proposição

Se $\mathcal{A}(\varphi, \{\top\}) = \mathcal{C}$ e $\bot \notin \mathcal{C}$ então tomando V tal que $V(p) = 1$ para cada $p \in \mathcal{C}$ e $V(q) = 0$ para cada $q \in (\mathcal{C} \setminus P) \cap \mathrm{SMB}(\varphi)$, tem-se que $V \Vdash \varphi$.

Se o algoritmo diz que a fórmula é possível, então atribuindo 1 aos símbolos da fórmula que ocorrem no output de $\mathcal{A}$ e 0 aos que não ocorrem, obtém-se uma valoração que satisfaz a fórmula.

Lema

A função $\mathcal{A}$ é monótona crescente.

Logo, se no cálculo da função se coloca $\bot$ no conjunto, pode-se parar esse cálculo (pois $\bot$ estará no conjunto final).

Resultados sobre o algoritmo $\mathcal{A}$

Seja φ uma forma de Horn, *i.e.*, $\varphi = \bigwedge_{i=1}^{n}(C_i \rightarrow L_i)$.

Lema

$$\{\top\} \subseteq \mathcal{A}(\varphi, \{\top\}) \subseteq \{\top\} \cup \bigcup_{i=1}^{n} L_i$$

Prova por indução natural.

Corolário

Se $\bot \notin \bigcup_{i=1}^{n} L_i$ então $\bot \notin \mathcal{A}(\varphi, \{\top\})$.

Aplicação do algoritmo

Exemplo

- Qual a natureza de $p \wedge (\neg r \vee s) \wedge (r \vee \neg p \vee \neg q) \wedge (\neg r \vee \neg s) \wedge q$?
- A fórmula está na FNC;
- A fórmula não é válida (pelo Lema da validade das disjunções);
- Como está na forma de Horn, aplica-se o algoritmo.

Emulação do algoritmo

Natureza de $p \wedge (\neg r \vee s) \wedge (r \vee \neg p \vee \neg q) \wedge (\neg r \vee \neg s) \wedge q$

Converte-se primeiro para a forma de Horn. Seja
$\varphi = (\top \to p) \wedge (r \to s) \wedge ((p \wedge q) \to r) \wedge ((r \wedge s) \to \bot) \wedge (\top \to q)$
Aplica-se agora o algoritmo. Sejam
$\varphi_1 = (r \to s) \wedge ((p \wedge q) \to r) \wedge ((r \wedge s) \to \bot) \wedge (\top \to q)$,
$\varphi_2 = (r \to s) \wedge ((p \wedge q) \to r) \wedge ((r \wedge s) \to \bot)$.

$$
\begin{array}{rcl}
\mathcal{A}(\varphi, \{\top\}) & = & \mathcal{A}(\varphi_1, \{\top, p\}) \\
 & = & \mathcal{A}(\varphi_2, \{\top, p, q\}) \\
 & = & \mathcal{A}((r \to s) \wedge ((r \wedge s) \to \bot), \{\top, p, q, r\}) \\
 & = & \mathcal{A}((r \wedge s) \to \bot, \{\top, p, q, r, s\}) \\
 & = & \mathcal{A}(\top, \{\top, p, q, r, s, \bot\}) \\
 & = & \{\top, p, q, r, s, \bot\}
\end{array}
$$

Como $\bot \in \{\top, p, q, s, \bot\}$, então $\mathcal{H}(\varphi) = 0$, logo pelo lema, a fórmula φ é contraditória.

Emulação do algoritmo

Natureza de $p \wedge (\neg r \vee s) \wedge (r \vee \neg p \vee \neg q) \wedge (\neg r \vee \neg s)$

Converte-se primeiro para a forma de Horn.
Seja $\varphi = (\top \to p) \wedge (r \to s) \wedge ((p \wedge q) \to r) \wedge ((r \wedge s) \to \bot)$
Aplica-se agora o algoritmo. Seja
$\psi = (r \to s) \wedge ((p \wedge q) \to r) \wedge ((r \wedge s) \to \bot))$.

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(\varphi, \{\top\}) &= \\ \mathcal{A}(\psi, \{\top, p\}) &= \\ \{\top, p\} & \end{aligned}$$

Como $\bot \notin \{\top, p\}$, então $\mathcal{H}(\varphi) = 1$, logo pelo lema, a fórmula φ é possível.
Considere-se a valoração V tal que $V(p) = 1$ e $V(q) = V(r) = V(s) = 0$. Facilmente se verifica que $V \Vdash \varphi$.

Emulação do algoritmo

Natureza de $p \wedge (\neg r \vee s) \wedge (r \vee \neg p) \wedge \neg r$

Converte-se primeiro para a forma de Horn.
Seja $\varphi = (\top \to p) \wedge (r \to s) \wedge (p \to r) \wedge (r \to \bot)$,
$\varphi_1 = (r \to s) \wedge (p \to r) \wedge (r \to \bot)$, e
$\varphi_2 = (r \to s) \wedge (r \to \bot)$
Aplica-se agora o algoritmo. Seja
$\varphi_1 = (r \to s) \wedge (p \to r) \wedge (r \to \bot)$.

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{A}(\varphi, \{\top\}) & = \\ \mathcal{A}(\varphi_1, \{\top, p\}) & = \\ \mathcal{A}(\varphi_2, \{\top, p, r\}) & \supseteq \\ \{\top, p, r, \bot\} & \end{array}$$

Pois $\mathcal{A}$ é monótona crescente. Como $\bot \in \mathcal{A}(\varphi, \{\top\})$, então $\mathcal{H}(\varphi) = 0$, logo pelo lema, a fórmula φ é contraditória.