

Lógica Computacional

Aula Teórica 13: Sintaxe da Lógica de Primeira Ordem

António Ravara

Departamento de Informática

4 de Abril de 2011

Necessidade de uma linguagem mais rica

Limitações da Lógica Proposicional

- Apenas compõe asserções com os operadores de negação, disjunção, conjunção e implicação.
- Trata declarações que não envolvam estes operadores como atómicas, por muito elaboradas que sejam.
- Não permite expressar constantes, propriedades, funções.
- Quer-se raciocinar sobre factos como:
 - $3^2 = 9$
 - $\forall n \in \mathbb{N}_0 \ n \geq 0$
 - $\forall x, y \in \mathbb{N} \ \exists z \in \mathbb{N} \ (x^2 + y^2 = z^2)$
 - *Qualquer estudante é mais novo que algum professor*
- A Lógica Proposicional representa estas asserções como básicas (um símbolo proposicional, p).

Lógica de Primeira Ordem

Ingredientes: os da Lógica Proposicional, mais

- Constantes: representam elementos concretos de conjuntos.
Exemplos: 3, 1.5, True
- Variáveis: representam elementos arbitrários de conjuntos.
Exemplos: n , m , x , y , x_1
- Funções: compõem constantes e variáveis com operadores para fazer determinado cálculo.
Exemplos: $\text{Suc}(n)=n+1$
- Predicados: expressam propriedades (como relações).
Exemplos: $2 = 1 + 1$, $2 > 3$, $\text{Estudante}(\text{Pedro})$,
 $\text{Professor}(\text{António})$, $\text{Mais_novo}(x,y)$
- Quantificadores (universal e existencial): identificam todos ou alguns elementos de um conjunto.
Exemplos: $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x (|x - a| < \delta \rightarrow |f(x) - b| < \varepsilon)$
 $\forall x (\text{Estudante}(x) \rightarrow (\exists y (\text{Professor}(y) \wedge \text{Mais_novo}(x, y))))$

Que símbolos usar?

Assinatura

Uma *assinatura de primeira ordem* é um par de conjuntos

$\Sigma = (SF, SP)$ sendo:

- $SF = \{SF_i\}_{i \in \mathbb{N}_0}$, onde cada SF_i é um conjunto de símbolos de *função* de aridade i e em SF os conjuntos são disjuntos dois a dois.
- $SP = \{SP_i\}_{i \in \mathbb{N}_0}$, onde cada SP_i é um conjunto de símbolos de *predicado* de aridade i e em SP os conjuntos são disjuntos dois a dois.

Os símbolos em SF_0 chamam-se *constantes*;

Os símbolos em SP_0 chamam-se *símbolos proposicionais*.

Uma assinatura

Exemplo

- $SF = \{SF_i\}_{i \in \mathbb{N}_0}$, com
 - $SF_0 = \{Zero\}$
 - $SF_1 = \{Suc\}$
 - $SF_i = \emptyset$, para todo o $i \geq 2$
- $SP = \{SP_i\}_{i \in \mathbb{N}_0}$, com
 - $SP_1 = \{\neg\}$
 - $SP_2 = \{=, >, <\}$
 - $SP_i = \emptyset$, para todo o $i = 0$ ou $i \geq 3$

Predicados são relações, mas podem ser vistos como funções para $\{0, 1\}$.

Alfabeto

Alfabeto de primeira ordem sobre Σ e X

Dada uma assinatura de primeira ordem $\Sigma = (SF, SP)$ e um conjunto numerável X de *variáveis*, o *alfabeto de primeira ordem sobre Σ e X* , denotado por Alf_{Σ}^X , é constituído por:

- cada um dos elementos de SF_i , para cada $i \in \mathbb{N}_0$;
- cada um dos elementos de SP_i , para cada $i \in \mathbb{N}_0$;
- cada um dos elementos de X ;
- o símbolo $\perp$ (falso, contradição ou absurdo);
- os conectivos disjunção, $\vee$, conjunção, $\wedge$ e implicação, $\rightarrow$;
- os quantificadores universal, $\forall$, e existencial, $\exists$;
- o símbolo $,$ e os parênteses esquerdo e direito, $($ e $)$.

Assume-se que $X \cap SF_i = \emptyset$ e $X \cap SP_i = \emptyset$, para cada $i \in \mathbb{N}_0$

Termos

Conjunto de termos induzidos por uma assinatura

O conjunto de termos induzidos por Alf_{Σ}^X , denotado por T_{Σ}^X , é definido indutivamente pelas seguintes regras.

- $c \in T_{\Sigma}^X$, para cada $c \in SF_0$;
- $x \in T_{\Sigma}^X$, para cada $x \in X$;
- se $t_1, \dots, t_n \in T_{\Sigma}^X$ então $f(t_1, \dots, t_n) \in T_{\Sigma}^X$ para cada $f \in SF_n$, com $n > 0$.

Exemplos

Considere-se a assinatura do exemplo anterior e assumase $x \in X$.

- $Zero \in T_{\Sigma}^X$.
- $x \in T_{\Sigma}^X$.
- $Suc(Zero) \in T_{\Sigma}^X$, $Suc(x) \in T_{\Sigma}^X$, $Suc(Suc(Zero)) \in T_{\Sigma}^X$.

Linguagem de primeira ordem

Linguagem de primeira ordem induzida por Alf_{Σ}^X

A linguagem das fórmulas de primeira ordem induzida por Alf_{Σ}^X , denotada por F_{Σ}^X , é definida indutivamente pelas seguintes regras.

- $P \in F_{\Sigma}^X$, para cada $P \in SP_0$;
- $\perp \in F_{\Sigma}^X$;
- se $t_1, \dots, t_n \in T_{\Sigma}^X$ então $P(t_1, \dots, t_n) \in F_{\Sigma}^X$ para cada $P \in SP_n$, com $n > 0$;
- se $\varphi, \psi \in F_{\Sigma}^X$ então $(\varphi \vee \psi) \in F_{\Sigma}^X$, $(\varphi \wedge \psi) \in F_{\Sigma}^X$ e $(\varphi \rightarrow \psi) \in F_{\Sigma}^X$;
- se $x \in X$ e $\varphi \in F_{\Sigma}^X$ então $(\forall x \varphi) \in F_{\Sigma}^X$ e $(\exists x \varphi) \in F_{\Sigma}^X$.

As fórmulas são asserções sobre as entidades representadas pelos termos.

Linguagem de primeira ordem

Exemplos de fórmulas que não são de primeira ordem

Sejam x é uma variável, f uma função e P e Q predicados.

- Argumentos das funções e dos predicados são termos, não fórmulas:

$$Q(f(P(x))) \text{ e } P(Q(x))$$

não são fórmulas de primeira ordem.

- Quantificam-se variáveis, não funções, predicados ou fórmulas:

$$\forall x \forall f. P(f(x)), \forall x \forall P. P(Q(x)), \text{ e } \forall \psi (\psi \vee P(x))$$

não são fórmulas de primeira ordem.

Intuição

O que representam os termos e fórmulas?

- Constantes referem entidades concretas.
- Variáveis referem entidades arbitrárias.
- Funções expressam cálculo.
- Relações expressam predicados (propriedades).
- Quantificador universal expressa uma asserção sobre todas as entidades (de um conjunto).
Captura ideias como “todo”, “qualquer”, “cada um”, etc.
- Quantificador existencial expressa uma asserção sobre algumas entidades (de um conjunto).
Captura ideias como “algum”, “pelo menos um”, “existe um”, etc.

Da linguagem natural para lógica de primeira ordem

Exemplos

- “O João é uma criança” escreve-se $C(\text{João})$;
“A Ana é mãe do João” escreve-se $M(\text{Ana}, \text{João})$;
“O João é mais novo que a Ana” escreve-se $N(\text{João}, \text{Ana})$;
- “Qualquer criança é mais nova que a sua mãe” escreve-se

$$\forall x \forall y (C(x) \wedge M(y, x)) \rightarrow N(x, y)$$

- “A função f é sobrejectiva” escreve-se

$$\forall y \exists x f(x) = y$$

- “O conjunto tem pelo menos três elementos diferentes”
escreve-se

$$\exists x \exists y \exists z (\neg(x = y) \wedge \neg(x = z) \wedge \neg(y = z))$$

Funções ou predicados: uma questão de escolha

“Os filhos de meu pai são meus irmãos”

- “Pai” como predicado.

Dada uma assinatura $\Sigma = (SF, SP)$, com

- $eu \in SF_0$
- $SP_2 = \{F, I, P\}$

obtém-se a formulação

$$\forall x \forall y ((P(x, eu) \wedge F(y, x)) \rightarrow I(y, eu))$$

- “Pai” como função (“Pai de” é uma relação unívoca).

Dada uma assinatura $\Sigma = (SF, SP)$, com

- $eu \in SF_0$ e $P \in SF_1$
- $SP_2 = \{I, F\}$

obtém-se a formulação

$$\forall x (F(x, P(eu)) \rightarrow I(x, eu))$$